Math. P. 219 li

Heuner

[illegible]

Math. S. 219 g

Joh. Friedr. Heuner's
Lehrgang
des
Rechenunterrichts
mit
gleichmäßiger Berücksichtigung
des
Kopf- und Zifferrechnens.

Dreizehnte, mit besonderer Rücksicht auf das im deutschen Reiche giltige Münz-, Maß- und Gewichtssystem umgearbeitete Auflage.

Mittels h. Ministerial-Rescriptes wurde Heuner's Lehrgang des Rechenunterrichts nebst den dazu gehörigen Aufgabenheften für alle bayerischen Schulen zum Gebrauche empfohlen.

Mit zwei Figurentafeln.

Ansbach.
Verlag von Fr. Seybold.
1875.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Druck von C. Brügel und Sohn in Ansbach.

Vorrede zur siebenten Auflage.

Nachdem das Buch mehreremale nach einander fast ohne alle Veränderung aufgelegt worden ist, hat dasselbe in der gegenwärtigen Auflage eine um so durchgreifendere Umarbeitung erfahren und zwar nicht nur eine Umarbeitung in Bezug auf den Lehrstoff, welche durch die gesetzliche Einführung der metrischen Maße und Gewichte eine gebotene war, sondern auch eine solche in Bezug auf Einrichtung, Methode und Lehrverfahren, welche aus Gründen der Zweckmäßigkeit hervorging, und zu welcher ich mich um so unbedenklicher glaubte entschließen zu dürfen, als der Gebrauch der früheren Auflagen neben der vorliegenden schon durch den neuen Lehrstoff abgeschnitten erschien.

Auf die nähere Bezeichnung der Veränderungen, welche ohnehin am besten aus dem Buche selbst zu ersehen sind, kann und muß hier verzichtet werden. Ziel und Zweck war überall, die Uebersicht zu erleichtern, den Unterricht theils zu vereinfachen, theils tiefer zu begründen, sowie dem seinem Berufe als Lehrer entgegenreifenden Jünglinge zur Herrschaft über den Gegenstand zu verhelfen und ihn zu befähigen, denselben einst mit Geschick und Erfolg zu behandeln.

Daß nur ein frei, ein ohne Buch in der Hand ertheilter Unterricht ein lebendiger, frischer und wirksamer sein könne, und daß daher die ausführliche Bezeichnung des Lehrverfahrens nur zur Vorbereitung auf die Unterrichtsstunde zu benützen sei, wird für den erfahrenen Lehrer kaum bemerkt zu werden brauchen; für angehende Lehrer möchte dieß jedoch eine nicht zu übersehende Bemerkung sein.

Ansbach, den 10. März 1870.

Vorrede zur zehnten Auflage.

Kaum sind zwei Jahre verflossen, nachdem das Buch in Folge der gesetzlichen Einführung der metrischen Maße und Gewichte eine Umarbeitung erfahren hat; so verläßt dasselbe die Presse abermal in nicht unbedeutend veränderter Auflage. Die Veranlassung dazu ist dießmal das inzwischen zu Stande gekommene und theilweise auch schon in's Leben getretene deutsche Reichs-Münzgesetz. Zwar hätte auf die neue Münzordnung, der bisherigen süddeutschen Währung gegenüber, auch in untergeordneter Weise Bedacht genommen werden können, wobei die Veränderung eine geringere Dimension angenommen haben würde. Da es jedoch keinem Zweifel unterliegt, daß das Reichs-Münzgesetz in nicht ferner Zeit zur völligen Durch-

führung gelangen wird, und da, wenn in dem Buche beim Eintritte dieses Zeitpunktes die neuen Münzverhältnisse nur in beschränkter Weise behandelt sein würden, dann nochmal eine Umarbeitung stattfinden müßte, was besonders für die Anstalten, in welchen dieser Lehrgang eingeführt ist, sehr mißlich wäre; so habe ich es für zweckmäßiger gehalten, die neue deutsche Reichs-Währung sogleich möglichst vollständig und allseitig zu behandeln, und die bisherige süddeutsche nur insoweit zu berücksichtigen, als es mir bei der jetzigen Uebergangsperiode nothwendig schien. Wird sich später der Unterricht auf das neue deutsche Münzverhältniß allein zu erstrecken haben, so braucht dann nur von dem die bisherigen Münzen betreffenden Abschnitte des Buches abgesehen und bei einzelnen Aufgaben bloß die Benennung verändert zu werden. Auf die Brauchbarkeit der gegenwärtigen und jeder bis dahin etwa noch folgenden gleichlautenden Auflage wird also das zu erwartende vollständige Inslebentreten des deutschen Reichs-Münzgesetzes einen beschränkenden Einfluß nicht haben.

Ansbach, den 10. Juni 1872.

Vorrede zur dreizehnten Auflage.

Mit Ausnahme des Abschnittes über die Kettenregel, welcher zur Förderung des Denkrechnens eine Umarbeitung erfahren hat, und einzelner Rechnungsbeispiele, welche theils geeignetere Lösungen, theils der deutschen Reichsgeldwährung entsprechende Benennungen erhalten haben, ist die gegenwärtige Auflage mit den beiden früheren völlig übereinstimmend.

Ansbach, den 8. Juni 1875.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

Erster Cursus.

Die Zahlen von Eins bis Hundert.

Zweiter Cursus.

Die Grundrechnungsarten in größeren Zahlen.

Dritter Cursus.

Fünfter Cursus.

Sechster Cursus.

Siebenter Cursus.

Erster Cursus.

Die Zahlen von Eins bis Hundert.

Vorbemerkung.

Die Zahlen von Eins bis Hundert liegen vor allen übrigen Zahlen der Anschauung offen und werden im Leben am häufigsten angewendet. Darum und weil das Rechnen mit ihnen die Grundlage zu allem Rechnen bildet, so können und müssen sie unter allen Zahlen am gründlichsten behandelt werden. Der Schüler muß von jeder derselben eine möglichst klare und vollständige Kenntniß erhalten. Es ist aber einleuchtend, auch schon vielfach nachgewiesen*), anerkannt und durch die Erfahrung festgestellt, daß die gründliche Kenntniß der Zahl weniger aus der gleichzeitigen Betrachtung ganzer Zahlenreihen, als vielmehr aus der allseitigen Betrachtung der einzelnen Zahlen erwächst. Wir sind deßhalb für die letztere Weise, für die individuelle Behandlung der Zahl. Demgemäß durchschreiten wir das Gebiet des ersten Hunderts von Zahl zu Zahl. Am Ende eines Zehners aber findet ein Rückblick, eine Wiederholung statt. Die Uebungen verbreiten sich dann über alle Zahlen desselben, beziehungsweise über den ganzen bis dahin zurückgelegten Zahlenraum.

Nur mit den Zahlen von Eins bis Zehn machen wir eine Ausnahme. Um nämlich das gegen die individuelle Behandlung der Zahl bestehende Bedenken, daß sie im Anfange wegen der fast gleichzeitigen Vorführung sämmtlicher Rechengeschäfte eine besondere Lehrgewandtheit erfordere und die Thätigkeit des Lehrers über die Gebühr in Anspruch nehme, zu beseitigen, und um diese Methode, der selbst ihre Gegner zugestehen, daß sie den Charakter eines bildenden Unterrichts habe, einen stufenweisen Fortschritt in sich schließe, die Denkthätigkeit der Kinder sehr

*) Zuerst und am gründlichsten von Grube in seinem Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule.

befördere und allen todten Mechanismus ausschließe, besonders für angehende Lehrer zugänglicher zu machen; so wird von uns das Gebiet des ersten Zehners dreimal durchschritten: zuerst, um die Zahlen nach ihrem Unterschiedsverhältnisse in's Auge zu fassen und die Schüler in die darauf bezüglichen Operationen einzuführen; dann, um die Zahlen nach ihrem Theilverhältnisse zu betrachten und die Schüler mit den Operationen bekannt zu machen, welche sich auf dieses Verhältniß beziehen; zuletzt, um eine Zahl nach der andern allseitig anzuschauen und zu behandeln.

Weiterhin wird sogleich jede neue Zahl allseitigt behandelt. Dabei wird ebenso zu Werke gegangen, wie man sich überhaupt klare Kenntniß von einzelnen Dingen verschafft. Wir fassen zuerst das Ganze in's Auge und bestimmen hierauf sowohl den zwischen ihm und den bereits bekannten Zahlen bestehenden Unterschied, als das zwischen dem Ganzen und seinen Theilen bestehende Verhältniß.

Mit diesen formalen Zahlenübungen verbinden wir sogleich und so innig als möglich das angewandte Rechnen. Denn soll der Rechenunterricht wirklich theoretisch-praktisch sein, wie man mit Recht verlangt, so muß er es durchweg sein, vom Anfange an und auf jeder Stufe.

So schreiten also Kenntniß der Zahl, Fertigkeit im Operiren und praktisches Rechnen, in natürlicher Verbindung und sich gegenseitig fördernd, gleichmäßig fort. Der Lehrgang, einfach und konsequent und darum auch von den Schülern unschwer zu erkennen, macht es ihnen möglich, den Lehrstoff selbstthätig zu ergreifen und sich dessen zu bemächtigen. Mit jeder neuen Zahl erweitert sich der Kreis der Vorstellungen des Schülers und mehrt sich sein Besitz. Er fühlt das Wachsthum seiner Kraft. Sein Bewußtsein wird gehoben, seine Lernbegierde gesteigert. Er arbeitet immer mehr aus Lust und Liebe zur Sache. Und dieß, sowie die beständige Abwechslung, welche der Lehrgang in die Thätigkeit der Lernenden bringt, macht, daß sie dieser Beschäftigung nie müde werden.

In Bezug auf das Lehrverfahren sei bemerkt:

1) Bei jeder Uebung werde die Sache auf mannigfache Weise, durch räumlich vorhandene, wie durch zeitlich eintretende Dinge, als: Würfel, Hände, Bücher, Federn, Münzen, Maße, Klänge, Silben, Schritte u. dgl. m. wiederholt zur Anschauung gebracht. Als stereotypes Anschauungsmittel aber sei, nebst den Fingern, Punkten oder Strichen, das sogenannte russische Rechenbrett empfohlen. Aus mehreren Gründen. Das dekatische Zahlensystem baut sich an ihm anschaulich auf; die Zahlen lassen sich daran sehr leicht und schnell umstellen; der Lehrer hat, wenn er sich neben oder hinter dasselbe stellt, die Schüler beständig vor sich, und deren Augen sind, indem sie sich darauf fixiren, zugleich auf ihn gerichtet. Nur werde dasselbe nicht sogleich mit seinen hundert Kugeln vorgeführt. Der Schüler sehe zuerst nur das Gestell mit den (zehn) leeren Drähten, welche auf beiden Seiten durch den Rahmen gehen, an einem Ende umgebogen und am

andern, um sie leicht herausnehmen zu können, mit einer Schraubenmutter versehen sind. Für die Zahl Eins thue man eine Kugel in die oberste Stange, für Zwei 2 Kugeln in die zweite Stange, für Drei 3 Kugeln in die dritte Stange u. s. f. bis Zehn. Ehe man zur Zahl Elf übergeht, nehme man alle Kugeln wieder heraus und bringe in die erste oder oberste Stange 10 derselben und in die nächste darunter eine. Bei Zwölf werde dieser einen Kugel eine zweite beigefügt, bei Dreizehn eine dritte u. s. f.

2) Die Veranschaulichung der Zahlen und der Zahlenoperationen ist selbstverständlich zunächst Sache des Lehrers, aber nicht ausschließlich und nicht immer. Vielmehr ist der Schüler so bald als möglich anzuhalten, Theil daran zu nehmen. Es ist dieß das beste Mittel, den Schüler aus seinem mehr oder weniger passiven Verhalten in Selbstthätigkeit zu versetzen und ihn zu befähigen, bei irgend einer Ungewißheit in diesem Bereiche durch Versinnlichung der Sache sich selbst zu helfen.

3) In Allem, was der Schüler vermittelst der äußeren Anschauung klar begriffen hat, muß derselbe durch freie Uebung im Kopfe sofort auch fest und sicher werden. Zur deutlichen Einsicht muß Sicherheit und Fertigkeit kommen.

4) Vorstellungen und Begriffe, besonders rein abstrakte, wie die von Zahlen, werden durch einmaliges Auffassen und Einüben noch nicht für immer Eigenthum des Geistes. Werden sie nicht von Zeit zu Zeit wieder aufgefrischt und erneuert, so verbleichen sie nach und nach und verlieren sich endlich völlig. Darum werde fleißig wiederholt, sowohl mit Anschauung als frei im Kopfe. Gelegenheit dazu bietet sich bei jeder neuen Zahl.

5) Eine besondere Sorgfalt verdient das Rechnen mit der angewandten Zahl, die übrigens mit der bloß benannten nicht verwechselt werden darf. Aufgaben wie:

3 Liter + 2 Liter = ? 3 × 2 Aepfel = ?
5 Meter — 2 Meter = ? $^1/_3$ × 6 Pfennige = ?

sind Aufgaben mit der bloß benannten Zahl, man mag die Gegenstände dabei vor sich haben oder nicht. Was mit den gegebenen Zahlen geschehen soll, ist in diesen Fällen angezeigt. Das Geschäft des Rechners besteht allein darin, die bezeichnete Operation auszuführen.

Anders ist es bei den Aufgaben mit der angewandten Zahl. Dergleichen sind: Eine Bäuerin verkauft zuerst 3 Liter Milch und dann 2; wie viel im Ganzen? Von 5 Meter Zeug wurden 3 Meter verbraucht; wie viel ist noch vorhanden? Für 1 Pfennig erhalte ich 2 Aepfel; wie viel für 3 Pfennige? 3 Stück kosten 6 Pfennige; was kostet 1 Stück? — Hier ist nicht angezeigt, was mit den gegebenen Zahlen gethan werden muß, um die verlangte Antwort zu erhalten. Die mit den Zahlen auszuführenden Operationen sind also in der Aufgabe nicht schon bezeichnet, sondern erst zu entdecken. Und gerade das, nämlich das Auffinden der zum Resultate führenden Operationen, das Auflösen oder Beurtheilen der Aufgabe, ist hier der Schwer- und Angelpunkt der Berechnung. Der Schüler muß klar und deutlich einsehen, daß man für 3 Pfennige 3mal so viel Aepfel bekommt, als für einen,

und daß 1 Stück nur den dritten Theil so viel kostet, als 3 Stück. Zu dieser Einsicht gelangt derselbe aber wieder nur durch die Anschauung und zwar am leichtesten und sichersten, wenn man sich dabei der realen Dinge selbst bedient. In den Fällen, wo sie nicht zu Handen sind, lasse man ihre Stelle durch ähnliche Dinge, wenigstens durch Zeichnungen an der Wandtafel vertreten.

6) Nie werde in Einem fort so lange gerechnet, bis bei den Kindern eine geistige Abspannung bemerkbar ist. Eine halbe Stunde auf einmal wird für das erste Schuljahr das rechte Zeitmaß sein.

7) Endlich hüte man sich vor dem Fehler, dessen sich besonders eifrige Anfänger gerne schuldig machen: zu eilen, die Schüler vorwärts zu drängen und seine Leistungen nach der Quantität des behandelten Stoffes zu bemessen. Wo das geschieht, da wird nichts recht begriffen und gelernt; da ist kein wohlthätiger Einfluß auf die Entwicklung des kindlichen Geistes; da kommt die rechte Lehr- und Lernfreudigkeit nicht auf, wohl aber gibt es Unmuth und Verdruß genug. Wer in seiner Schule die Freude eines gedeihlichen Fortschrittes, den schönsten Lohn des Lehrers, kennen lernen und genießen will; wer es mit der ihm anvertrauten Jugend und mit sich selbst gut meint: der gehe nicht eilfertig, sondern langsam, aber bestimmt und sicher vorwärts; der weiche von keinem Punkte, bis die Schüler die Sache verstehen und ihrer Herr geworden sind; der muthe den Kleinen nicht zu, Alles sogleich zu begreifen und zu können; der suche, wenn etwas nicht recht gehen will, die Ursache davon zunächst in sich und denke darüber nach, wie es dem Verständnisse der Kinder näher zu legen sei; der sei sich stets bewußt, daß mehr gethan ist, wenn eine Zahl allseitig und gründlich durchgearbeitet und eine praktische Aufgabe klar und verständig gerechnet wird, als wenn zehn derselben einseitig und leichthin durchgenommen worden, und daß, je genauer und sorgfältiger das Eine geschieht, desto leichter und besser es mit dem Andern geht, das darauf folgt.

In Schulen mit einer Altersklasse nehme man sich zwei Jahre Zeit mit diesem Cursus, in Schulen mit mehreren Klassen drei. In diesen gehe das Pensum für das erste Schuljahr nicht über die Zahl 10 hinaus, in jenen nicht über 20. Dabei wird vorausgesetzt, daß die betreffende Schülerabtheilung in den einklassigen Schulen wöchentlich viermal, in den mehrklassigen zwei bis dreimal Rechenunterricht erhalte.

Der erste Zehner.

Erste Uebung.

Bilden und Zerlegen, Zuzählen, Abziehen und Unterscheiden.

Die Zahlen Eins bis Fünf.

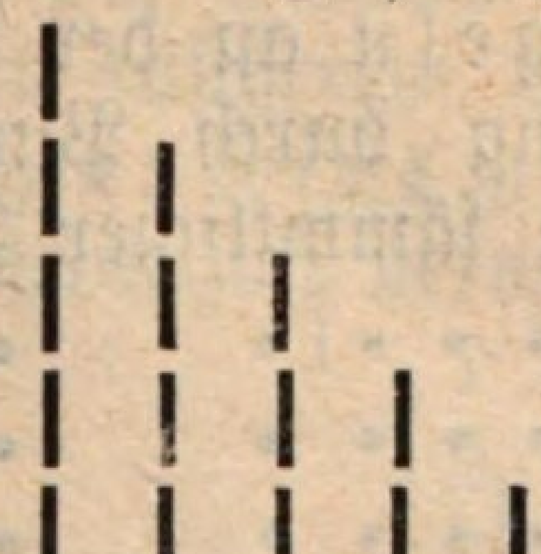
§ 1. **Bilden und Auffassen** (durchaus anschaulich).

Mit Strichen.

Man macht an die Wandtafel einen senkrechten Strich und fragt: Was ist das? (Ein Strich.) Wie viele Striche sind es? (Ein Strich) Neben diesen Strich macht man einen zweiten und veranlaßt die Kinder zu sprechen: Ein Strich und ein Strich sind zwei Striche. An die Seite des zweiten Strichs setzt man einen dritten, und die Kinder sprechen: Zwei Striche und ein Strich sind drei Striche. So fort bis: Vier Striche und ein Strich sind fünf Striche.

Dieß wird so oft wiederholt, bis sich die Schüler geläufig ausdrücken.

Dann setzt man die Zahlen, wie folgt, untereinander,



zeigt — in und außer der Ordnung — auf die einzelnen Reihen hin und läßt von den Schülern die Zahlen benennen. Hierauf nennt man selbst bald diese, bald jene Zahl, und einer der Schüler zeigt darauf hin.

Mit den Kugeln an der Rechenmaschine.

In die erste oder oberste Stange kommt eine Kugel, in die zweite Stange kommen zwei, u. s. f. Im Uebrigen wird ebenso verfahren, wie oben bei der Veranschaulichung durch Striche.

Mit den Fingern einer Hand.

Streckt einen Finger empor! (Zeigefinger.) Streckt zwei Finger empor! (Daumen und Zeigefinger.) Drei Finger! (Daumen-, Zeige- und Mittelfinger.) Vier Finger! (Alle, ohne den Daumen.) Fünf Finger! — Dieß wiederholt und auch außer der Ordnung.

Was ist einmal an dem Kopfe? Was habt ihr zweimal an euch? Welche Thiere haben zwei Füße? Welche haben vier? Wie viele Wände hat die Schulstube? Wie viel Fenster hat sie? Wie viel Flügel hat dieses Fenster? Und wie viel Glasscheiben hat dieser Flügel?

| Das ist Eins. Dafür setzt man das Zeichen 1, das ihr jetzt schreibt.

Der Lehrer schreibt die Ziffer immer in langsamem Takte einigemal an die Tafel und macht hiebei darauf aufmerksam, in welcher Ordnung die einzelnen Züge auf einander folgen müssen. Dann werden die Schüler angehalten, das Zeichen in derselben Weise so lange nachzubilden, bis sie es richtig und ziemlich geläufig schreiben können.

§ 2. Das Zerlegen (in zwei Elemente).

Mit Würfeln, Büchern oder andern frei beweglichen Dingen.

Man legt zwei Würfel (von verschiedener Farbe) auf den Tisch, nahe zusammen. Wie viel Würfel sind das? (Zwei.) Nun rückt man einen vom andern etwas weg. Wie viel Würfel liegen jetzt auf dem Tische? (Noch gerade so viel, zwei.) Aber wie liegen sie jetzt? (Auseinander.) Wie viel Würfel liegen da? (Einer.) Und da? (Auch einer.) Was habe ich also aus der Zwei gemacht? (Eins und Eins.)

So abgefragt und veranschaulicht wird ferner zerlegt:

3 in 2 und 1	4 in 3 und 1	5 in 4 und 1
in 1 und 2	in 2 und 2	in 3 und 2
	in 1 und 3	in 2 und 3
		in 1 und 4

Dieß wird öfter wiederholt, so daß der Lehrer bloß die Veranschaulichung gibt, und die Schüler das Veranschaulichte in vollständigen Sätzen aussprechen: 2 ist 1 u. 1; 3 ist 2 u. 1; 3 ist 1 u. 2 u. s. w.

Dasselbe geschieht auch mit Kugeln an der Rechenmaschine und mit Punkten. Die Veranschaulichung durch Punkte gibt eine feststehende und übersichtliche Darstellung sämmtlicher Fälle.

•	•|•	••|•	•••|•	••••|•
		•|••	••|••	•••|••
			•|•••	••|•••
				•|••••

Der einzelne Punkt bleibt, wie er ist. Eins ist Eins. — Die zwei Punkte können wir zwar nicht so, wie 2 Würfel oder Kugeln, auseinander rücken. Trennen oder zerlegen können wir sie aber doch. Wir thun dieß — und zwar vor den Augen der Schüler — durch einen kleinen Strich. Auf der einen Seite dieses Striches ist Eins, und auf der andern ist Eins. So ist also Zwei zerlegt in Eins und Eins.

Eben so zerlegen wir die Drei einmal in 2 u. 1, und dann in 1 u. 2 u. s. w.

Zuletzt, wenn sämmtliche Fälle vor Augen stehen, deutet der Lehrer auf die einzelnen Zahlen (indem er mit einem Stäbchen darüber hinstreicht) und auf ihre Theile hin, und die Schüler sprechen wieder in vollständigen Sätzen: 1 ist 1; 2 ist 1 u. 1 ꝛc.

| | Das ist Zwei, und dafür setzt man das Zeichen 2, das die Schüler nun schreiben lernen.

§. 3. Das Zusammenzählen.

a. In Verbindung mit dem Zerlegen und anschaulich.

Mit Würfeln, Büchern ꝛc. Man stellt zwei Würfel auf und fragt: Wie viel ist das? Antwort: Zwei. Nun rückt man sie etwas auseinander, und die Schüler sprechen: Zwei ist Eins und Eins. Hierauf werden die Würfel wieder vereinigt, und dabei heißt es: Eins und Eins ist Zwei.

So auch mit den Zahlen 3, 4 und 5. Die obige Darstellung durch Punkte läßt ersehen, wie oft jede Zahl in zwei Elemente zerlegt und aus diesen wieder zusammengesetzt werden kann.

Das Nämliche wird mit den Kugeln an der Rechenmaschine ausgeführt. —

Auch an den Punkten, welche bei dem Zerlegen zur Veranschaulichung gedient haben, kann das Zusammenzählen geübt werden. Bei •|• deutet der Lehrer zuerst auf die eine, dann auf die andere Eins, und die Schüler sprechen: 1 u. 1 ist 2. Bei • •|• streicht der Lehrer zuerst über die Zwei hin, deutet dann auf Eins, und die Schüler sprechen: 2 u. 1 ist 3 u. s. w.

b. Für sich und anschaulich.

Mit den Fingern der beiden Hände. Der Lehrer hebt eine Hand mit 1 ausgestreckten Finger empor, und die Schüler sprechen: „Eins"; dann hebt er die andere Hand mit 1 ausgestreckten Finger empor, und die Schüler sprechen: „und Eins", und indem er nun die zwei Finger zusammenthut, fahren die Schüler fort: „ist Zwei". Dieß wird noch ein- oder einigemal in rascherem Tempo wiederholt und dabei im Zusammenhange gesprochen: Eins und Eins ist Zwei.

Ebenso wird wiederholt veranschaulicht und zusammengezählt:

2 und 1	1 und 2	1 und 3
3 und 1	2 und 2	2 und 3
4 und 1	3 und 2	1 und 4

c. Frei im Kopfe.

Die vorstehenden Fälle, in und außer der Ordnung. Wie viel ist 1 + 1? 2 + 1? 1 + 2? ꝛc.

d. Angewandt.

Karl bekommt vom Pathen 1 Apfel und von der Pathin 1 Apfel;

wie viel Aepfel hat er nun? — Ein Vater hat 2 Knaben und 2 Mädchen; wie viel Kinder also? — Ein Fuhrmann hat 3 Rappen; dazu kauft er sich noch 2 Schimmel; wie viel Pferde hat er jetzt? — Emilie hat 2 Ostereier und bekommt noch 3 dazu; wie viel Ostereier hat sie nun im Ganzen? — Fritz erhält am Christfeste eine übersilberte Nuß und 2 vergoldete Nüsse; wie viel Nüsse hat er also erhalten? ꝛc.

| | | Das ist Drei, und dafür setzt man das Zeichen 3.

§. 4. Das Abziehen.

a. Anschaulich.

Mit Würfeln, Büchern ꝛc.

Der Lehrer stellt 5 Würfel auf. Wie viel ist das? (Fünf.) Nun nimmt er 1 Würfel davon weg. Ist es noch Fünf? (Nein.) Ist es jetzt mehr oder weniger als Fünf? (Weniger.) Warum? (Weil Eins weggenommen worden ist.) Wie viel ist es daher jetzt weniger? (Eins.) Und wie viel ist noch da? (Noch 4.) Man stellt nun den fünften Würfel nochmal hin, und indem man ihn wieder wegnimmt, heißt es: Fünf weniger Eins ist Vier.

So fortfahrend wird veranschaulicht und gesprochen: 4 weniger 1 ist 3; 3 weniger 1 ist 2; 2 weniger Eins ist 1; 1 weniger 1 ist Nichts.

Wird einigemal wiederholt.

Mit den Fingern einer Hand, indem man mit Hülfe der andern Hand einen Finger nach dem andern einbiegt. Der Lehrer veranschaulicht, und die Schüler sprechen. Nachdem dieß einigemal so geschehen, thun die Schüler Beides zugleich.

An der Rechenmaschine.

Der Lehrer zeigt auf die Kugel in der ersten Stange, und die Schüler sprechen „Eins". Indem er dieselbe auf die andere Seite schiebt, sprechen sie: „weniger Eins." Und indem er auf die vorige, nun leere Stelle der Kugel zeigt: „ist Nichts." Im Zusammenhange: Eins weniger Eins ist Nichts.

So die folgenden Fälle bis zur Geläufigkeit:

Erste Stange: 1—1.
2te Stange: 2—1, 2—2.
3te Stange: 3—1, 3—2, 3—3.
4te Stange: 4—1, 4—2, 4—3, 4—4.
5te Stange: 5—1, 5—2, 5—3, 5—4, 5—5.

b. Frei im Kopfe.

Die nämlichen Fälle, wie oben, in und außer der Ordnung. Wie viel ist 1—1? 5—1? 3—1? ꝛc.

c. Angewandt.

Karl hat 2 Aepfel; einen davon ißt er; wie viel hat er noch? — Sophie hat 3 Pfennige; nun kauft sie für 2 Pf. Aprikosen; wie viel Geld bleibt ihr übrig? — Für die 2 Pf. erhält sie 5 Aprikosen; 2 davon gibt sie ihrem Bruder; wie viel hat sie noch? — Ein Mann hat 4 Pferde;

2 davon verkauft er; wie viel Pferde besitzt er nun? — Wie viel Pfennige gilt 1 5=Pfgstück? Anton bekommt von seinem Vater 1 5Pfst., um für 4 Pf. Bretternägel zu holen; wie viel Pfennige muß er wiederbringen?

| | | | Das ist Vier und dafür setzen wir das Zeichen 4.

§. 5. Das Unterscheiden (Unterschiedsuchen).

a. Die Schüler lernen erkennen, was gleiche und ungleiche Zahlen sind.

Man stellt zwei Schüler von gleicher Größe nebeneinander. Welcher von den beiden ist größer, als der andere? (Keiner.) Welcher ist kleiner als der andere? (Keiner.) Sie sind also — ihrer Größe nach — einander gleich. — Nun stellt man zwei Schüler von verschiedener Größe nebeneinander. Sind diese auch einander gleich? (Nein; A, der eine Schüler, ist größer als B, und B ist kleiner als A.)

Eben so mit zwei gleichgroßen und mit zwei ungleichgroßen Stäbchen und Linien in senkrechter und in wagrechter Lage.

Dann mit Zahlen:

• • • • •   • • • •

• • • • •   • • • • •

5 und 5. Auf die eine Fünf zeigend: Wie viel ist das? (5.) Auf die andere Fünf zeigend: Und wie viel ist das? (Auch 5.) Welche Zahl ist die größere: die obere Fünf, oder die untere Fünf? (Sie sind einander gleich.) Was für Zahlen sind also Fünf und Fünf? (Zwei gleiche Zahlen.)

4 und 5. Auf die Vier zeigend: Wie viel ist das? (4.) Auf die Fünf zeigend: Wie viel ist das? (5.) Sind diese zwei Zahlen auch einander gleich? (Nein.) Welche Zahl davon ist die größere? Und welche ist die kleinere?

So kann auch noch veranschaulicht werden, daß 4 und 4 zwei gleiche, 3 und 4 zwei ungleiche, 3 und 3 zwei gleiche, 2 und 3 aber ungleiche Zahlen sind.

b. Es wird bestimmt, um wie viel eine Zahl größer ist als die andere.

Man stellt zwei Schüler von verschiedener Größe nebeneinander. So viel der größere Schüler über den andern hinausragt, um so viel ist er größer, als dieser.

Dem ähnlich thut man mit zwei ungleich großen Stäbchen und Linien, sowohl in senkrechter wie in wagrechter Lage.



So viel die größere Linie über die kleinere hinausgeht, um so viel ist sie größer, als diese.

Dann mit Zahlen.*)

• • • • • • • • • •
• • • • | • • • • | • • • • | • • • • | • • • •
• • • • • • • • • •
• • • | • • • | • • • | • • • • • | • • | • • • | •

4 und 5. Hindeutend: Wie viel ist das? (4.) Und das? (5.) Welche Zahl ist die größere? (Die Fünf.) Um wie viel geht 5 über 4 hinaus? (Um Eins.) Also ist 5 um 1 größer als 4.

3 und 5. Hindeutend: Wie viel ist das? (3.) Und das? (5.) Welche Zahl ist die größere: 3 oder 5? (5.) Um wie viel geht 5 über 3 hinaus? (Um Zwei.) Also ist 5 um 2 größer als 3. — So fort.

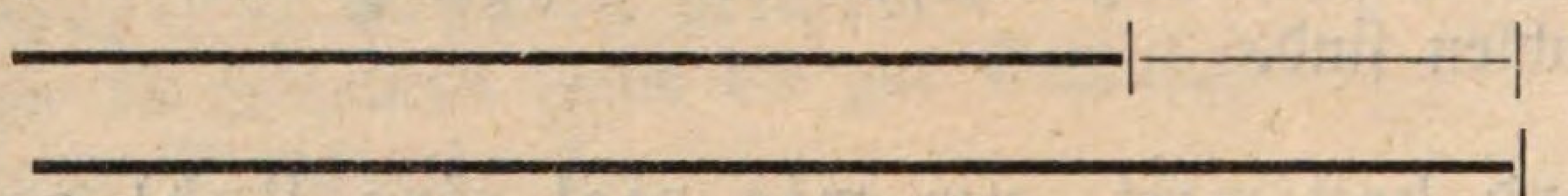
Zuletzt deutet der Lehrer auf die mit Punkten dargestellten Zahlen bloß hin, und die Schüler sprechen das, was sie aus der Anschauung erkennen, in einem vollständigen Satze aus. Indem der Lehrer z. B. zuerst auf die 5, dann auf die 4 (zuerst also auf die größere, dann auf die kleinere der beiden Zahlen) zeigt, sprechen die Schüler: 5 ist um 1 größer als 4. —

Dies bis zur Geläufigkeit. Dann frei im Kopfe. Man fragt: Welche Zahl ist größer: 2 oder 1? Antw. 2. Um wie viel? Antw. Um Eins. Um wie viel ist 4 größer als 2? 5 größer als 1? ꝛc.

c. Es wird bestimmt, um wie viel eine Zahl kleiner ist als die andere.

Man stellt wieder zwei Schüler von ungleicher Größe neben einander. So viel der kleinere Schüler noch wachsen oder größer werden muß, bis er dem andern gleichkommt, um so viel ist er kleiner als dieser. Dies zeigt der Lehrer an, indem er seine Hand über dem kleineren Schüler so hoch empor hebt, bis sie mit der Größe des andern Schülers in gleicher Richtung ist.

Ebenso mit zwei Linien von ungleicher Größe.



Um wie viel muß ich die obere Linie größer machen, damit sie der untern gleich ist? (Durch eine feine Linie dieses anzeigend: Um so viel.) Warum muß ich sie gerade um so viel größer machen? (Weil sie um so viel kleiner ist.) So noch einigemal mit je zwei andern Linien.

Dann mit Zahlen.

• • • • • • • • • • • • • • • •
• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •
• • • • • • • • • • • • • • • •
• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •

*) Hier ist das, was die größere Zahl mehr ist, als die kleinere, durch einen kleinen Strich bezeichnet. Beim Unterrichte kann man dieß durch ein Stäbchen andeuten.

4 und 5. Hinzeigend: Wie viel ist das? (4.) Und das? (5.) Welche Zahl ist die kleinere? (Die Vier.) Um wie viel muß ich sie größer machen, damit sie der Fünf gleich ist? (Um Eins.) Um wie viel ist also 4 kleiner als 5?

3 und 5. Hinzeigend: Wie viel ist das? (3.) Und das? (5.) Welche Zahl ist die kleinere? (Die Drei.) Um wie viel muß ich die Drei größer machen, damit sie der Fünf gleich ist? (Um 2.) Um wie viel ist also 3 kleiner als 5? — So fort.

Am Ende wird vom Lehrer auf die Zahlen — jetzt zuerst auf die kleinere, dann auf die größere — bloß hingezeigt, und von den Schülern wird das aus der Anschauung erkannte wieder in vollständigen Sätzen ausgesprochen. Indem also der Lehrer z. B. zuerst auf 4 und dann auf 5 zeigt, sprechen die Schüler: 4 ist um 1 kleiner als 5. — Auch dieß bis zur Geläufigkeit.

Dann frei im Kopfe. Welche Zahl ist kleiner: 1 oder 2? Um wie viel? — Welche Zahl ist kleiner; 2 oder 3? Um wie viel? rc.

Karl hat 1 Apfel, Fritz hat 2; wie viel Aepfel hat Fritz mehr als Karl? Ein Fuhrmann hat 2 Schimmel und 3 Rappen; wie viel Schimmel hat er weniger, als Rappen? — Lotte bekam 4 Ostereier; Marie bekam 2; wie viel Ostereier bekam Lotte mehr, als Marie? — Ein Vater hat 4 Söhne und 3 Töchter; wie viel Töchter hat er weniger als Söhne?

| | | | | Das ist Fünf, und dafür setzt man das Zeichen 5.

[Aufgaben zum Kopfrechnen. Erstes Heft. Uebung A.]

§. 6. Das Rechnen mit Ziffern.

(Siehe Aufgaben zum Zifferrechnen, erstes Heft. Seite 1.)

Auf dieser Stufe tritt dem mündlichen Rechnen das schriftliche an die Seite und begleitet es von Zahl zu Zahl und bei jeder Zahl allmählich wieder von Uebung zu Uebung. Beides fällt hier der Ausführung nach völlig zusammen. Deßhalb ist für das schriftliche Rechnen eine besondere Anweisung auch nicht nöthig. Nur die Art und Weise, wie der Schüler in den Gebrauch des Aufgaben-Heftchens einzuführen ist, sei kurz bemerkt.

Der Lehrer schreibe aus dem Büchlein die Aufgaben über die Zahlen oder über die Zahl, die so eben anschaulich und frei im Kopfe behandelt worden ist, an die Wandtafel, spreche sie ausführlich mit den Kindern durch, erkläre diesen dabei die arithmetischen Zeichen und setze die Ergebnisse hinzu. Dann lösche er die Resultate wieder ab, lasse einen Schüler an die Tafel treten und von ihm dasselbe wiederholen. Gleiches geschehe von einem zweiten, dritten rc., bis es geht. Hierauf nehmen die Schüler selbst das Aufgabenheft zur Hand und einer nach dem andern liest und rechnet eine von denselben Aufgaben daraus vor. Dann wird es von ihnen auf den Schiefertafeln ausgeführt. — So verfahre man immer, so oft im Aufgabenhefte eine Uebung zum Erstenmale erscheint. Auch kann das, was so in der Schule schriftlich gerechnet worden ist, nochmals als Hausaufgabe gegeben werden.

Die Zahlen von Sechs bis Zehn.

§. 7. Vorbemerkung.

Wie die Zahlen von Eins bis Fünf gemeinschaftlich, so werden die Zahlen von Sechs bis Zehn einzeln behandelt.

Die Zahl, welche zur Behandlung kommt, wird zuerst gebildet und dann zerlegt; auf das Zerlegen folgt das Zuzählen, das Abziehen und das Bestimmen des Unterschiedes.

Die ganzen Zahlen in ihrer Reihenfolge entstehen, indem die Eins wiederholt zu sich genommen wird. 1+1 = 2; (1+1) + 1 oder 2+1 = 3 ꝛc. So geht immer aus der zuletzt erhaltenen Zahl, indem sich ihr ein neues Element, eine neue Eins, anschließt, die nächstfolgende hervor. Die neue Zahl wird also gebildet, indem man die zuletzt behandelte Zahl um Eins vermehrt.

An das Bilden der Zahl schließt sich in sehr natürlicher Weise das Zerlegen derselben an. Ist 5+1 = 6, so ist auch 6 = 5+1. Die Uebung des Zerlegens ist von besonderem Werthe. Durch sie wird der Schüler nicht nur befähigt, die Zahl an ihren Bestandtheilen schnell und bestimmt zu erkennen, sondern auch, sie nach ihrem vollen Inhalte innerlich klar anzuschauen. Die Zahl Sieben (•••••••) sogleich im Ganzen aufzufassen, ist kaum möglich. Sicher und leicht wird sie hingegen als • • • • | • • • oder als • • • | • • • | • erkannt. Auch wenn man diese Zahl sich denken oder innerlich anschauen will, kann es nur so geschehen. Man versuche es nur selbst. Nebst dem bildet das Zerlegen der Zahlen die beste Grundlage zu den Rechengeschäften. Weiß der Schüler, daß 7 = 4+3, so wird er gewiß auch leicht begreifen, daß 4+3=7, daß 7—4=3, und daß 7 um 3 größer ist als 4. Und sieht derselbe die 6 als •• •• ••, d. i. als 3×2, so wird er, wie wir später finden werden, aus eben dieser Anschauung leicht erkennen, daß 3×2=6, daß 2 in 6 dreimal enthalten und daß 2 der dritte Theil oder $^1/_3$ von 6 ist.

Die Uebung des Zahlenzerlegens ist also nicht nur der Boden, auf dem unsern Schülern eine gründliche und allseitige Kenntniß der Zahl erwächst, sondern sie führt ihn auch auf die einfachste Weise in die Rechengeschäfte ein.

§. 8. Die Zahl Sechs.

a. Bilden. | | | | | | 5 + 1 = 6.

5 Striche und 1 Strich sind 6 Striche. 5 Schüler und 1 Schüler sind 6 Schüler. 5 Finger und 1 Finger sind 6 Finger. 5 Pferde und 1 Pferd sind 6 Pferde. 5 Kugeln (in der sechsten Stange der Rechenmaschine) und 1 Kugel sind 6 Kugeln. 5 + 1 = 6.

b. Zerlegen in zwei Elemente.

Die 6 Kugeln in der Rechenmaschine werden nun zerlegt, und dabei wird gesprochen, wie folgt:

• • • • •	•	6 ist 5 + 1
• • • •	• •	6 ist 4 + 2
• • •	• • •	6 ist 3 + 3
• •	• • • •	6 ist 2 + 4
•	• • • • •	6 ist 1 + 5

Nachdem dieß in und außer der Reihenfolge wiederholt ist, tritt ein Schüler an die Rechenmaschine; der Lehrer sagt, wie die Zahl zu zerlegen ist, und der Schüler führt es aus. Zerlege 6 in 4 + 2, in 5 + 1, in 3 + 3 ꝛc.

Ein Vater hat 6 Kinder, Knaben und Mädchen; wie viel Knaben und wie viel Mädchen können es sein?

c. Zerlegen in mehrere Elemente und in Verbindung damit das Zusammenzählen.

6 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1; 4 + 1 = 5, + 1 = 6; 4 + (1 + 1) = 6; 4 + 2 = 6.

6 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1; 3 + 2 = 5, + 1 = 6; 3 + (2 + 1) = 6; 3 + 3 = 6.

6 = 2 + 4 = 2 + 2 + 2; 2 + 2 = 4, + 2 = 6; 2 + (2 + 2) = 6; 2 + 4 = 6.

6 = 1 + 5 = 1 + 2 + 3; 1 + 2 = 3, + 3 = 6; 1 + (2 + 3) = 6; 1 + 5 = 6.

Wie viel muß ich zu 5 legen, um 6 zu erhalten? Wie viel zu 3, zu 1, zu 4, zu 2?

Zu welcher Zahl muß ich 1 legen, um 6 zu erhalten? Zu welcher Zahl muß ich 3 legen? Zu welcher 5, 2, 4?

d. Abziehen.

Veranschaulicht mit Würfeln, Fingern und an der Rechenmaschine, in und außer der Ordnung:

6 — 1, 6 — 2, 6 — 3, 6 — 4, 6 — 5, 6 — 6.

Frei im Kopfe:

Wie viel ist 6 — 1? u. 5 — 1? 6 — 1 — 1? 6 — 2?
„ „ „ 6 — 2? u. 4 — 1? 6 — 2 — 1? 6 — 3?
„ „ „ 6 — 2? u. 4 — 2? 6 — 2 — 2? 6 — 4?
„ „ „ 6 — 4? u. 2 — 1? 6 — 4 — 1? 6 — 5?

Wie viel ist 6 — 1? 6 — 5? 6 — 3? 6 — 2? 6 — 4? 6 — 6?

Wie viel muß ich von 5 wegnehmen, damit 5 übrig bleibt? Wie viel, damit 1 übrig bleibt? damit 3 übrig bleibt? ꝛc.

Ein Knabe hat 6 Nüsse; 2 davon schenkt er seiner Schwester und 2 ißt er; wie viel hat er noch? Auf einem Baume sitzen 6 Vögel; 3 davon fliegen fort; wie viel bleiben sitzen?

e. Unterscheiden.

• • • • • •
• • • • • •

6 und 6 sind zwei gleiche Zahlen. Löscht man 1 von 6 weg, so steht

• • • • •

• • • • • •

5 und 6; 6 ist um 1 größer als 5, und 5 ist um 1 kleiner als 6. Kommt wieder 1 von 5 weg, so steht

• • • •

• • • • • •

4 und 6; 6 ist um 2 mehr als 4, und 4 ist um 2 weniger als 6 u. s. w.

Karl hat 6 Pfennige, Fritz hat 4; wie viel Pfennige hat Karl mehr als Fritz?

In einem Blumenstrauße sind 6 Nelken und 3 Rosen; wie viele Rosen sind in dem Strauße weniger als Nelken?

Für die Zahl Sechs (|||.|||) setzt man das Zeichen 6.

Diese Ziffer lernen nun die Schüler schreiben; dann werden sie nach §. 6 angeleitet, die betreffenden Uebungen aus dem Aufgabenhefte zu rechnen.

---

§. 9. Die Zahl Sieben.

Veranschaulicht wird die Sache wie bei der Zahl Sechs.

a. Das Bilden der Zahl. $6 + 1 = 7$.

b. Das Zerlegen derselben in zwei Elemente:

$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 3 + 4 = 2 + 5 = 1 + 6.$

Ich habe in meinen 2 Händen 7 Geldstücke; wie viel in jeder?

c. Das Zerlegen in mehrere Elemente und in Verbindung damit das Zusammenzählen.

$7=5+2=5+1+1$; $5+1=6, +1=7$; $5+1+1=7$; $5+2=7$.
$7=4+3=4+2+1$; $4+2=6, +1=7$; $4+2+1=7$; $4+3=7$.
$7=3+4=3+3+1$; $3+3=6, +1=7$; $3+3+1=7$; $3+4=7$.
$7=2+5=2+4+1$; $2+4=6, +1=7$; $2+4+1=7$; $2+5=7$.
$7=1+6=6+1$; $6+1=7$; $1+6=7$.

Wie viel muß ich zu 6 legen, um 7 zu erhalten? Wie viel zu 4, zu 2, zu 5, zu 1, zu 3?

Zu welcher Zahl muß ich 2 legen, um 7 zu erhalten? Zu welcher Zahl muß ich 4 legen? Zu welcher 2, 5, 3? ꝛc.

d. Abziehen.

Anschaulich: 7 — 1, 7 — 2, 7 — 3, 7 — 4, 7 — 5, 7 — 6, 7 — 7.

In und außer der Ordnung.

Frei im Kopfe.

Wie viel ist 7—1? und 6—1? 7—1—1? 7—2?
" " " 7—2? und 5—1? 7—2—1? 7—3?
u. s. w.

Wie viel ist 7 — 2? 7 — 4? 7 — 3? 7 — 5? 7 — 1? 7 — 6?

Wie viel muß ich von 7 wegnehmen, daß 5 übrig bleibt? Wie viel, daß 3 übrig bleibt? daß 6 übrig bleibt? ꝛc.

Von 7 Aufgaben hat Karl 3 gemacht; wie viel hat er noch zu fertigen? — Ein Knabe geht mit dem Vater zu seinem Pathen, der 7 Stunden weit weg wohnt. Nachdem sie 2 Stunden Wegs gegangen sind, kehren sie ein; dann machen sie wieder 2 Std. und kehren wieder ein. Wie weit haben sie nun noch zu gehen?

e. Unterscheiden.

7 ist um 1 mehr als 6, und 6 ist um 1 weniger als 7.
7 ist um 2 mehr als 5, und 5 ist um 2 weniger als 7.
u. s. w.

Hier wird die Benennung und die Aufeinanderfolge der Wochentage eingeübt und der Schüler hierdurch zugleich mit den Ordnungszahlen bekannt gemacht.

Was für einen Tag haben wir heute? Was für ein Tag ist gestern gewesen? Was für einer wird morgen sein? Wie heißen die sämmtlichen Tage in der Woche? Wie viel Tage hat die Woche? Welcher Schüler ist der erste (der zweite, der dritte ꝛc.) auf dieser Bank? Welcher Tag ist der erste Wochentag? Welcher ist der zweite? ꝛc. Der wie vielte Tag in der Woche ist der Sonntag? der Dienstag? ꝛc.

Für die Zahl Sieben (| | | | · | | |) setzt man das Zeichen 7.

---

§. 10. Die Zahl Acht.

a. Bilden. $7 + 1 = 8$.

b. Zerlegen. $8=7+1=6+2=5+3=4+4=3+5$ ꝛc.

c. Zerlegen und Zusammenzählen.

8=6+2=6+1+1; 6+1=7,+1=8; 6+1+1=8; 6+2=8.
8=5+3=5+1+2; 5+1=6,+2=8; 5+1+2=8; 5+3=8.
8=4+4=4+2+2; 4+2=6,+2=8; 4+2+2=8; 4+4=8.
u s. w.

Wie viel muß ich zu 7, zu 5, zu 3, zu 6 ꝛc. legen, um 8 zu erhalten?

Zu welcher Zahl muß ich 1 (4, 6, 2, 5, 3) legen, um 8 zu erhalten?

d. Abziehen.

Mit Anschauung; 8—1, 8—2, 8—3, 8—4, 8—5 ꝛc.

Frei im Kopfe:

Wie viel ist 8 — 1? u. 7 — 1? 8 — 1 — 1? 8 — 2?
" " " 8 — 2? u. 6 — 1? 8 — 2 — 1? 8 — 3?
" " " 8 — 2? u. 6 — 2? 8 — 2 — 2? 8 — 4? ꝛc.

Wie viel muß ich von 8 wegnehmen, um 5 übrig zu haben? Wie viel, um 4, um 7, um 5, um 2 übrig zu haben?

Heinrich hat von 8 Nüssen nur noch 3; wie viel hat er schon gegessen? Von 8 Aufgaben hat er noch 4 zu machen; wie viel hat er schon fertig? ꝛc.

e. Unterscheiden.

8 ist um 1 mehr als 7, und 7 ist um 1 weniger als 8.
8 ist um 2 mehr als 6, und 6 ist um 2 weniger als 8.
u. s. w.

Welche Zahl ist um 2, 4, 6, 3, 5, 7 kleiner als 8?

Von 2 Kühen gibt die eine 3 Liter Milch und die andere 5; wie viel Milch geben beide zusammen? 6 Liter davon verbraucht die Bäuerin selbst; wie viel kann sie verkaufen?

Für die Zahl Acht (| | | | · | | | |) setzt man das Zeichen 8.

---

§. 11. Die Zahl Neun.

a. Bilden. 8 + 1 = 9.

b. Zerlegen. 9=8+1=7+2=6+3=5+4=4+5 ꝛc.

c. Zerlegen und Zusammenzählen.

9=7+2=7+1+1; 7+1=8+1=9; 7+1+1=9; 7+2=9.
9=6+3=6+2+1; 6+2=8+1=9; 6+2+1=9; 6+3=9.
u. s. w.

Wie viel muß ich zu 8, zu 5, zu 7, zu 4, zu 6, zu 2 legen, um 9 zu erhalten?

Zu welcher Zahl muß ich 3 legen, um 9 zu erhalten? Zu welcher Zahl muß ich 1 legen? zu welcher 4, 6 ꝛc.

In einem Garten stehen 9 Bäume, Birn- und Aepfelbäume; wie viel können es von jeder Sorte sein?

d. Abziehen.

Mit Anschauung: 9 — 1, 9 — 2, 9 — 3, 9 — 4, 9 — 5 ꝛc.

Frei im Kopfe.

Wie viel ist 9 — 1? u. 8 — 1? 9 — 1 — 1? 9 — 2?
" " " 9 — 2? u. 7 — 1? 9 — 2 — 1? 9 — 3?
" " " 9 — 3? u. 6 — 1? 9 — 3 — 1? 9 — 4? ꝛc.

Wie viel muß ich von 9 wegnehmen, daß 6 übrig bleibt? Wie viel, damit 8, 5, 3, 6, 2, 7, 4 übrig bleibt?

Marie bekam 1 Sechser und 1 Groschen, um für 8 Kr. Brod zu holen; wie viel Geld muß sie wiederbringen?

e. Unterscheiden.

9 ist um 1 mehr als 8, und 8 ist um 1 weniger als 9.
9 ist um 2 mehr als 7, und 7 ist um 2 weniger als 9.
u. s. w.

Welche Zahl ist um 2 kleiner als 9? Welche um 4, um 6? ꝛc.

Emilie ist 9 Jahre alt; ihre Schwester Auguste ist um 3 Jahre jünger; wie alt ist diese? — Die fleißige Louise fängt Nachmittags um 4 Uhr an zu stricken und hört um 9 Uhr Abends wieder auf; wie viele Stunden lang hat sie gestrickt? — Eugen und Karl theilen 9 Kirschen so miteinander, daß Eugen eine mehr erhält als Karl; wie viel bekommt jeder? — Anton hat 9 Bg. Papier und will Schreibhefte daraus machen, jedes zu 3 Bg.; wie viele Schreibhefte wird er bekommen?

Für die Zahl Neun (||| ||| |||) setzt man die Ziffer 9.

---

§. 12. Die Zahl Zehn.

a. Bilden. 9 + 1 = 10.
b. Zerlegen. 10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4 = 5 + 5 ꝛc.
c. Zerlegen und Zusammenzählen.
10 = 8 + 2 = 8 + 1 + 1; 8 + 1 = 9, + 1 = 10; 8 + 1 + 1 = 10; 8 + 2 = 10.
10 = 7 + 3 = 7 + 1 + 2; 7 + 1 = 8, + 2 = 10; 7 + 1 + 2 = 10; 7 + 3 = 10.
u. s. w.

Wie viel muß ich zu 8 legen, um 10 zu erhalten? Wie viel zu 6, zu 9, zu 5, zu 7? ꝛc.

Zu welcher Zahl muß ich 1 legen, um 10 zu erhalten? Zu welcher Zahl muß ich 5 legen? Zu welcher 2, 4? ꝛc.

Ein Kutscher hat 10 Pferde, Schimmel und Rappen; wie viel Schimmel und wie viel Rappen können es sein?

d. Abziehen.
Mit Anschauung: 10—1, 10—2, 10—3, 10—4, 10—5 ꝛc.
Frei im Kopfe: 10 — 1, und 9 — 1; 10 — 1 — 1; 10 — 2.
10 — 2, und 8 — 1; 10 — 2 — 1; 10 — 3.
u. s. w.

Wie viel muß man von 10 wegnehmen, wenn 8 übrig bleiben soll? Wie viel, um 5, 7, 3, 9 ꝛc. übrig zu haben?

Von 10 Pfg. gibt Karl 6 Pfg. einem Armen; wie viel Geld hat er noch? — Wilhelm soll 10 Ziegel auf den Hausboden tragen; wie oft muß er gehen, wenn er jedesmal 2 nimmt? — Albert hat 10 Nüsse; davon ißt er täglich 3; wie viel bleibt ihm für den letzten Tag? — Louise hat 10 Aprikosen; am ersten Tag ißt sie eine davon, am andern Tag 2, am dritten Tag 3; wie viel bleiben ihr für den 4. Tag? —

e. Unterscheiden.
10 ist um 1 mehr als 9, und 9 ist um 1 weniger als 10.
10 ist um 2 mehr als 8, und 8 ist um 2 weniger als 10.
u. s. w.

Welche Zahl ist um 2 kleiner als 10? Welche ist um 5 (um 3, um 7, um 4, um 6) kleiner als 10?

Statt Eins sagt man auch Einser oder Einer. Die Zahl 2 besteht aus 1 + 1; sie besteht also aus 2 Einern. Die Zahl 3 = 1 + 1 + 1; sie hat 3 Einer, u. s. w.

Zehn Einer zusammen nennt man 1 Zehner. Sind 9 Einer auch 1 Zehner? Wie viel fehlt daran? Wie viel fehlt an 8 Einern zu 1 Zehner? Wie viel an 7 Einern? 2c.

| • • • • • • • • • • |

= 1 Zehner und 0 Einer, geschrieben 10.

Was bedeutet die Ziffer 1, wenn sie allein (1) steht? Was bedeutet sie, wenn zu ihrer Rechten eine Null steht? (10) Schreibt 1 Einer! 1 Zehner!

Uebersicht und Wiederholung der bisherigen Uebungen innerhalb des ganzen ersten Zehners.

Vorbemerkung.

Die bereits vorgekommenen Operationen werden nun zur möglichst großen Sicherheit und Fertigkeit gebracht. Dabei steht die äußere Anschauung im Hintergrund. Sie tritt nur dann hervor, wenn sich bei einem oder dem andern Schüler findet, daß seinem Bewußtsein etwas entwichen ist. Außerdem muß derselbe sich jede Zahl mit der Menge ihrer Einer im Geiste vorstellen, er muß sie also innerlich anschauen und mit der reinen Zahl operiren.

§. 13. Zählen.

1) Auf- und Abwärtszählen zwischen 1 und 10.
2) Welche Zahl steht vor 4? nach 4? vor 7? nach 7? 2c.
3) Zwischen welchen zwei Zahlen steht 6? 9? 4? 2c.
4) Welche Zahlen stehen zwischen 2 und 6? zwischen 5 und 8? 2c.

§. 14. Zerlegen.

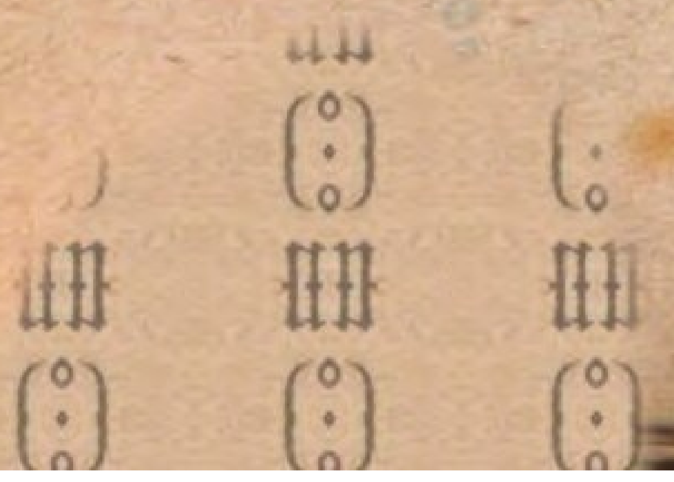
2=1+1	3=2+1	4=3+1	5=4+1	6=5+1
	=1+2	=2+2	=3+2	=4+2
		=1+3	=2+3	=3+3
			=1+4	2c.

So fort bis 10.

Verfahren.

In welche 2 Theile läßt sich die Zahl 2 zerlegen? (In 1 + 1.) Sind dieß zwei gleiche, oder zwei ungleiche Theile? (2 gleiche Theile.)

In welche 2 Theile kann die Zahl 3 zerlegt werden? (In 2+1, und in 1 + 2.) Was für Theile sind dieß: gleiche oder ungleiche? (Das sind ungleiche Theile.)



Wie läßt sich die Zahl 4 zerlegen? (In 3 + 1, 2 + 2, 1 + 3.) Was für Theile sind dieß? (2 + 2 sind gleiche Theile, 3 + 1 und 1 + 3 sind ungleiche Theile.)

Sind sämmtliche Zahlen bis 10 in dieser Weise durchgesprochen, so nehmen die Schüler ihr Rechenheft zur Hand und lesen die betreffenden Aufgabenreihen (S. 3 Nro. 1 und 2) mit Angabe der fehlenden Zahlen einzeln und im Chore vor. Hierauf folgt die Ausführung auf der Schiefertafel.

§. 15. Zusammenzählen.

Mit 1.

1 + 1, 2 + 1, 3 + 1, 4 + 1, 5 + 1, 6 + 1, 7 + 1, 8 + 1, 9 + 1.

Ich nenne Zahlen, und ihr zählt immer Eins dazu.

6! (6 + 1 = 7.) 4! (4 + 1 = 5.) 8! (8 + 1 = 9.) ꝛc.

Mit 2.

1 + 2, 3 + 2, 5 + 2, 7 + 2; 2 + 2, 4 + 2, 6 + 2, 8 + 2.

Nun zählt ihr zu jeder Zahl, die ich nenne, immer 2.

6! (6 + 2 = 8.) 3! (3 + 2 = 5.) 7! (7 + 2 = 9.) ꝛc.

Ebenso mit 3, 4, 5 ꝛc. Nur sehe man darauf, daß die Summe nie mehr als 10 betrage.

Dann Folgendes:

a.	1 + ? = 2	1 + ? = 3	7 + ? = 10	4 + ? = 6	6 + ? = 8
	2 + ? = 4	3 + ? = 6	5 + ? = 9	3 + ? = 10	2 + ? = 6
	4 + ? = 8	6 + ? = 9	3 + ? = 8	7 + ? = 9	5 + ? = 10

Man fragt: Wie viel muß ich zu 1 legen, um 2 zu erhalten? Wie viel zu 2, um 4 zu bekommen? Wie viel zu 4, um 8 zu haben? ꝛc.

b.	? + 1 = 2	? + 3 = 6	? + 5 = 10	? + 2 = 8	? + 3 = 10
	? + 2 = 4	? + 4 = 8	? + 4 = 9	? + 6 = 8	? + 7 = 9

Zu welcher Zahl muß ich 1 legen, um 2 zu erhalten? Oder: Wie heißt die Zahl, wenn ich 1 dazu lege, so erhalte ich 2? ꝛc.

Aufgaben z. Zifferr. S. 3 Nr. 3 und 4. (Mündl. und schriftl.)

§. 16. Abziehen.

Mit 1.

10 — 1, 9 — 1, 8 — 1, 7 — 1, 6 — 1, 5 — 1, 4 — 1 ꝛc.

Ich nenne Zahlen, und ihr zieht 1 davon ab.

5! (5 — 1 = 4.) 8! (8 — 1 = 7.) 6! (6 — 1 = 5.) ꝛc.

Mit 2.

10 — 2, 8 — 2, 6 — 2, 4 — 2, 2 — 2; 9 — 2, 7 — 2, 5 — 2, 3 — 2.

Nun zieht ihr von jeder Zahl, die ich nenne, immer 2 ab.

9! (9 — 2 = 7.) 5! (5 — 2 = 3.) 10! (10 — 2 = 8.) ꝛc.

Ebenso mit 3, 4, 5, 6, 7, 8 9.

Dann Folgendes:

a.	4 — ? = 2	10 — ? = 5	6 — ? = 4	8 — ? = 5	10 — ? = 3
	6 — ? = 3	7 — ? = 6	10 — ? = 7	8 — ? = 3	9 — ? = 5
	8 — ? = 4	9 — ? = 6	10 — ? = 4	5 — ? = 2	9 — ? = 4

Man fragt: Wie viel muß ich von 4 wegnehmen, damit 2 übrig bleibt? Wie viel von 6, damit 3 übrig bleibt? ꝛc.

b. ? — 2 = 3 ? — 4 = 3 ? — 6 = 3 ? — 8 = 2 ? — 2 = 5.
? — 4 = 5 ? — 5 = 2 ? — 2 = 6 ? — 3 = 6 ? — 7 = 3.

Man fragt: Wie heißt die Zahl: wenn ich 2 davon wegnehme, so bleibt 3 übrig? Oder: Karl ißt 2 Nüsse und hat dann noch 4; wie viel Nüsse hat er gehabt?

Aufg. z. Zifferr. S. 4 Nr. 5 und 6. (Mündl. und schriftl.)

Im Anschlusse hieran werden auch die Aufgaben Nr. 7 bis 10 gerechnet. Es wird jedoch ausdrücklich bemerkt, daß das schriftliche Rechnen nicht früher eintreten darf, bis die Aufgaben sicher und fertig frei im Kopfe gerechnet werden können.

§. 17. Zusammenzählen und Abziehen in Verbindung.

a. 4 + 5 — 8 = ? b. 5 — 3 + 6 = ?

Die Form für die mündliche und schriftliche Ausrechnung dieser Aufgaben ist folgende:

a.	b.
4 + 5 = 9	5 — 3 = 2
9 — 8 — 1	2 + 6 = 8
4 + 5 — 8 = 1	5 — 3 + 6 = 8

Das sind kurze und einfache Schlüsse, wodurch nicht nur das Nachdenken, sondern auch das Sprechvermögen der Kinder außerordentlich geübt wird. Darum halte man darauf. Der Unterricht im Rechnen muß auch sprachbildend sein. Und er kann es sein, wie nicht leicht ein anderer. Auf keinem andern Gebiete des Unterrichts ist es möglich, die Kinder Alles, was sie angeschaut, aufgefaßt und sich klar vorgestellt haben, in dem Maße genau sprachlich darstellen zu lehren, wie auf dem Gebiete des Rechenunterrichts. Auf keinem andern Gebiete des Unterrichts können schon die kleinsten Schulkinder so selbstständig Vorstellungen, Urtheile und Schlüsse bilden und die ganze Thätigkeit ihrer noch so unentwickelten Denkkraft so zusammenhängend und erschöpfend darstellen lernen, als auf diesem; denn ihre sprachliche Mittheilung besteht hier lediglich in einem Beschreiben oder Erzählen dessen, was sie gleichzeitig wirklich thun oder so eben gethan haben.

Aufg. z. Zifferr. S. 5 Nr. 11 (Mündl. und schriftl.)

§. 18. Bestimmen des Unterschiedes.

Zwei gerade Linien von einerlei Länge, zwei Kugeln von einerlei Größe, die Zahlen 3 und 3 2c. sind einander gleich. Eine kleinere und eine größere gerade Linie, eine kleinere und eine größere Kugel, die Zahlen 2 und 3 2c. sind nicht einander gleich; sie unterscheiden sich von einander.

Wodurch unterscheiden sich diese zwei (ungleich langen) Schieferstifte von einander? Wodurch sich diese zwei Linien? Wodurch können sich zwei Häuser von einander unterscheiden? Wodurch zwei Bäume? Wodurch zwei Zahlen? (Zwei Zahlen können sich nur dadurch von einander unterscheiden, daß die eine größer oder kleiner ist als die andere.) Wodurch unterscheiden sich z. B. die Zahlen 5 und

8 von einander? (8 ist um 3 größer als 5, und 5 ist um 3 kleiner als 8. Die Zahlen 5 und 8 unterscheiden sich also um 3 von einander. Der Unterschied zwischen 5 und 8 ist 3.)

Um wie viel unterscheiden sich von einander die Zahlen

3 u. 9?	9 u. 6?	10 u. 3?	2 u. 3?	4 u. 7?
2 u. 6?	6 u. 5?	2 u. 5?	4 u. 1?	6 u. 10?
5 u. 7?	4 u. 2?	6 u. 1?	3 u. 7?	9 u. 5?
8 u. 10?	5 u. 4?	2 u. 9?	10 u. 5?	2 u. 8?
2 u. 7?	10 u. 7?	8 u. 6?	8 u. 9?	6 u. 4?

Dann folgende Fragen:

a. Welche Zahl ist um 1 größer als 2? als 4? als 6? ꝛc.
" " " " 1 kleiner als 2? als 4? als 6? ꝛc.
Welche Zahl ist um 2 größer als 1? als 3? als 5? ꝛc.
" " " " 2 kleiner als 9? als 7? als 5? ꝛc.
u. s. w.

b. Welche zwei Zahlen unterscheiden sich von einander
um 1? (Antw. 1 u. 2, 2 u. 3, 3 u. 4 — 9 u. 10.)
um 2? (Antw. 1 u. 3, 2 u. 4, 3 u. 5 — 8 u. 10.)
u. s. w.

Während der folgenden Uebungen von §. 19 bis §. 25, wobei der Lehrstoff zunächst bloß anschaulich und frei im Kopfe behandelt wird, haben die Schüler zur Selbstbeschäftigung sämmtliche Aufgaben ihres Heftes von Seite 1 bis Seite 5 Nr. 11 mehrmal schriftlich zu bearbeiten.

Zweite Uebung.

Das Zerlegen in (gleiche Theile) und im Anschlusse hieran das Vervielfachen, Enthaltensein und Theilen.

§. 19. Die Zahl Zwei.

Lehrstoff:

2 = 2 × 1, und 2 × 1 = 2.)
1 ist in 2 2 mal.
1 ist $^1/_2$ von 2 (die Hälfte von 2.)

Lehrverfahren:

a. 2 = 2 × 1, und 2 × 1 = 2.

Zählt, wie oft ich einen Punkt mache! (1 mal 2 mal.)

• •

Wie viel ist das? (Zwei.) Nun zerlege ich diese Zahl.

• | •

In was habe ich die Zwei zerlegt? (In 1 + 1.) Wie vielmal 1 ist es? (2 × 1.) Zwei ist also wie vielmal 1?

Zwei ist 2 mal Eins.

Wie viel ist 1 + 1? (1 + 1 = 2.) Wie viel ist also 2×1?

Zweimal Eins ist Zwei.

---

b. 1 ist in 2 2mal enthalten.

Wie viele Eins hat die Zwei in sich? (Zwei.) Wie vielmal 1 hat die 2 in sich? (2 × 1.) Wie vielmal ist 1 in 2 enthalten? (2 mal.)

1 ist in 2 zweimal enthalten.

---

c. 1 = ½ von 2.

In wie viele Theile habe ich diese Nuß getheilt? (In 2 Theile.) Sind es 2 gleiche, oder 2 ungleiche Theile? (2 gleiche Theile.) Was für ein Theil ist dieß? (Der halbe Theil, die Hälfte.)

Auf die Zahl • | • hindeutend: In wie viele Theile ist die Zwei getheilt? Sind es 2 gleiche, oder 2 ungleiche Theile? Wie viel beträgt ein Theil? Was für ein Theil ist diese Eins von der Zwei?

1 ist der halbe Theil von 2; 1 ist die Hälfte von 2.

Wiederholend:

2 ist wie vielmal 1? 2 = 2 × 1.

Wie viel ist 2×1? 2 × 1 = 2.

Wie oft ist 1 in 2 enthalten? 1 ist in 2 zweimal enthalten.

Was für ein Theil ist 1 von 2? 1 ist die Hälfte von 2.

§. 20. Die Zahl Drei.

• | • | •

a. Zählt, wie oft ich einen Punkt mache! (1mal, 2, 3mal.) Wie heißt die Zahl? (3.) Nachdem man die Drei abgetheilt: In was habe ich die Drei zerlegt? (In 1 + 1 + 1.) In wie vielmal 1? (In 3 × 1.) 3 ist also wie vielmal 1? (3 = 3 × 1. Wie viel ist 1 + 1 + 1 zusammen? (3.) Wie viel ist also 3 × 1? (3 × 1 = 3.) 3 = 3 × 1, und 3 × 1 = 3.

b. Wie viele Eins hat die Drei in sich? Wie vielmal 1 hat die 3 in sich? Wie vielmal ist 1 in 3 enthalten?

1 ist in 3 dreimal enthalten.

c. In wie viele Theile ist die 3 zerlegt? Sind es gleiche oder ungleiche Theile? Wie viel beträgt ein Theil? Der wie vielte Theil ist diese (letzte) Eins? (Zählen: 1, 2, 3; der dritte Theil.) Anstatt „dritter Theil" sagt man auch „Drittheil" oder „Drittel." Diese Eins ist also 1 Drittel von 3. Und diese (andere) Eins? (Diese Eins ist auch ⅓ von 3.) Und diese Eins? (Diese Eins ist auch ⅓ von 3.). Jede Eins ist 1 Drittel von 3. Wie viel ist 1 Drittel von 3? Wie viel sind zwei 3tel von 3?

Wiederholend:

3 ist wie vielmal 1? 3 = 3 × 1.

Wie viel ist 3 × 1? 3 × 1 = 3.

Wie oft ist 1 in 3 enthalten? 1 ist in 3 dreimal enthalten.

Was für ein Theil ist 1 von 3? 1 ist 1 Drittel von 3.

§. 21. Die Zahl Vier.

• | • | • | •

4 = 4 × 1, und 4 × 1 = 4.

1 ist in 4 4mal.

1 ist $^1/_4$ von 4.

Man fragt: 4 ist wie vielmal 1? (4 ist 4 × 1.) Wie viel ist 4 × 1? (4 × 1 = 4.) Wie vielmal ist 1 in 4 enthalten? (1 ist in 4 viermal enthalten.) Der wie vielte Theil ist diese (letzte) Eins von 4? (1, 2, 3, 4; der vierte Theil.) Was für ein Theil ist jede Eins von 4? (Jede 1 ist $^1/_4$ von 4.)

Wie viel ist $^1/_4$ von 4? Wie viel sind $^3/_4$ von 4?

• • | • •

4 = 2 × 2, und 2 × 2 = 4.

2 ist in 4 2mal.

2 ist $^1/_2$ von 4 (die Hälfte von 4.)

Hier kommt zum Erstenmal eine Kollektiv-Einheit vor. 1 + 1 oder 2 soll als einmal 2 aufgefaßt werden. Um dieß den Schülern zu erleichtern, so veranlaßt man (höchstens) 10 derselben, von der rechten Hand 2 Finger in die Höhe zu strecken. Wie viel Finger streckt dieser Schüler empor? (2.) Und dieser? (Auch 2.) u. s. w. Wie viel Schüler sind dieß? Wie vielmal 2 Finger strecken sie in die Höhe? (10 × 2 F.) Nun zieht ein Schüler nach dem andern seine Hand zurück, und dabei heißt es: 9 × 2 Finger, 8 × 2 Finger ꝛc. einmal 2 Finger.

2 Finger sind 1 × 2 Finger; 4 Finger sind 2 × 2 Finger.

| • • | 2 ist 1 × 2. | • • | • • | 4 ist 2 × 2.

Wie viel ist 2 × 2? Wie vielmal ist 2 in 4 enthalten? In wie viele Theile ist die 4 zerlegt? Wie viel beträgt ein Theil? Was für ein Theil ist 2 von 4?

§. 22. Die Zahl Fünf.

• | • | • | • | •

5 = 5 × 1; 5 × 1 = 5.

1 ist in 5 5mal.

1 ist $^1/_5$ von 5.

Wie viel ist $^1/_5$ von 5? Wie viel sind $^2/_5$ ($^3/_5$, $^4/_5$) von 5?

• • | • • | •

5 = 2 × 2 + 1; 2 × 2 + 1 = 5.

§. 23. Die übrigen Zahlen.

Von diesen geben wir nur den Stoff und überlassen die unterrichtliche Behandlung dem Lehrer.

•|•|•|•|•|•	••|••|••	•••|•••
6=6×1; 6×1=6.	6=3×2; 3×2=6.	6=2×3; 2×3=6.
1 ist in 6 6mal.	2 ist in 6 3mal.	3 ist in 6 2mal.
1 ist $^1/_6$ von 6	2 ist $^1/_3$ von 6	3 ist $^1/_2$ von 6.

7=7×1; 7×1=7	7=3×2+1	7=2×3+1
1 ist in 7 7mal	3×2+1=7	2×3+1=7
1 ist $^1/_7$ von 7		

8=8×1	8=4×2	8=2×3+2	8=2×4
8×1=8	4×2=8	2×3+2=8	2×4=8
1 ist in 8 8m.	2 ist in 8 4mal		4 ist in 8 2m.
1=$^1/_8$ v. 8	2=$^1/_4$ v. 8		4=$^1/_2$ v. 8

9=9×1	9=4×2+1	9=3×3	9=2×4+1
9×1=9	4×2+1=9	3×3=9	2×4+1=9
1 ist in 9 9mal		3 ist in 9 3mal	
1=$^1/_9$ v. 9		3=$^1/_3$ v. 9	

10=10×1	10=5×2	10=3×3+1	10=2×5
10× 1=10	5×2=10	3×3+1=10	2×5=10
1 ist in 10 10m.	2 ist in 10 5m.	10=2×4+2	5 ist in 10 2m.
1 ist $^1/_{10}$ v. 10	2 ist $^1/_5$ v. 10	2×4+2=10	5 ist $^1/_2$ v. 10

§. 24. Uebersichtliche Darstellung und Wiederholung.

Bloß mit Anschauung.

Die verschiedenen Fälle stehen, wie folgt, veranschaulicht an der Wandtafel.

•|•   •|•|•   •|•|•|•   •|•|•|•|•   •|•|•|•|•|•   •|•|•|•|•|•|•

• •|• •   • •|• •|• •

• • •|• • •

•|•|•|•|•|•|•|•   •|•|•|•|•|•|•|•|•   •|•|•|•|•|•|•|•|•|•

• •|• •|• •|• •   • • •|• • •|• • •   • •|• •|• •|• •|• •

• • • •|• • • •   • • • • •|• • • • •

Der Lehrer zeigt hin, und die Schüler sprechen. Sie lesen das Veranschaulichte ab, wie sie das durch Buchstaben dargestellte Wort ablesen..

Einige Worte des Lehrers genügen, sie in den betreffenden Gang einzuführen.

Erster Gang: Zerlegen.

2=2×1; 3=3×1; 4=4×1; 4=2×2; 5=5×1; 6=6×1 rc.

Zweiter Gang: Vervielfachen.

2×1=2; 3×1=3; 4×1=4; 2×2=4; 5×1=5; 6×1=6 rc.

Dritter Gang: Enthaltensein.

1 ist in 2 2mal enthalten; 1 ist in 3 3mal enthalten; 1 ist in 4 4mal, 2 ist in 4 2mal enthalten u. s. f.

Vierter Gang: Theilen.

1 ist $^1/_2$ von 2; 1 ist $^1/_3$ von 3; 1 ist $^1/_4$ von 4, 2 ist $^1/_2$ von 4 rc.

Fünfter Gang: Zerlegen und Vervielfachen.

2=2×1; 2×1=2; 3=3×1; 3×1=3; 4=4×1; 4×1=4; 4=2×2; 2×2=4 u. s. f.

Sechster Gang: Enthaltensein und Theilen.

1 ist in 2 2mal enthalten, 1 ist die Hälfte von 2; 1 ist in 3 3mal enthalten, 1 ist $^1/_3$ von 3; 1 ist in 4 4mal enthalten, 1 ist $^1/_4$ von 4; 2 ist in 4 2mal enthalten, 2 ist $^1/_2$ von 4 rc.

Siebenter Gang: Alles in Verbindung.

2=2×1; 2×1=2; 1 ist in 2 2mal enthalten; 1 ist $^1/_2$ von 2.
3=3×1; 3×1=3; 1 ist in 3 3mal enthalten; 1 ist $^1/_3$ von 3.
4=4×1; 4×1=4; 1 ist in 4 4mal enthalten; 1 ist $^1/_4$ von 4.
4=2×2; 2×2=4; 2 ist in 4 2mal enthalten; 2 ist $^1/_2$ von 4.
u. s w.

§. 25. Fortsetzung und Erweiterung.

Frei im Kopfe.

2 ist wie viel mal 1?

Wie viel ist 2×1? Welche Zahl muß ich 2 mal nehmen, um 2 zu erhalten? Wie oft muß ich 1 nehmen, um 2 zu bekommen?

Wie oft ist 1 in 2 enthalten? Welche Zahl ist 2mal in 2 enthalten? In welcher Zahl ist 1 zweimal enthalten?

Was für ein Theil von 2 ist 1? Von welcher Zahl ist 1 die Hälfte? Wie viel ist die Hälfte von 2?

3 ist wie vielmal 1?

Wie viel ist 3×1? Welche Zahl muß ich 3mal nehmen, um 3 zu erhalten? Wie oft muß ich 1 nehmen, um 3 zu bekommen?

Wie oft ist 1 in 3 enthalten? Welche Zahl ist 3mal in 3 enthalten? In welcher Zahl ist 1 3mal enthalten?

Was für ein Theil von 3 ist 1? Von welcher Zahl ist 1 ein Drittel? Wie viel ist der dritte Theil von 3?

4 ist wie vielmal 1?

Wie viel ist 4×1? Welche Zahl muß ich 4mal nehmen, um 4 zu erhalten? Wie oft muß ich 1 nehmen um 4 zu bekommen?

Wie oft ist 1 in 4 enthalten? Welche Zahl ist 4mal in 4 enthalten? In welcher Zahl ist 1 viermal enthalten?

Was für ein Theil von 4 ist 1? Von welcher Zahl ist 1 der vierte Theil? Wie viel beträgt 1 Viertel von 4?

4 ist wie vielmal 2?

Wie viel ist 2×2? **Welche Zahl** muß ich 2mal nehmen, um 4 zu erhalten? **Wie oft** muß ich 2 nehmen, um 4 zu erhalten? u. s. w.

§. 26. Angewandte Aufgaben.

1. Ein Apfel kostet 3 Pfg., wie viel kosten 3 Aepfel?

Wie viel Aepfel werden gekauft? (3.) Wie viel kostet der eine Apfel? (3 Pfg.) Wie viel der andere Apfel? (Auch 3 Pfg.) Wie viel mal 3 Pfg. kosten die 2 Aepfel? Wie viel kostet der dritte Apfel? (Auch 3 Pfg.) Wie viel mal 3 Pfg. kosten also die 3 Aepfel? (3×3 Pfg.) Wie viel ist das? (3×3 Pfg. = 9 Pfg.) Wie viel kosten also die 3 Aepfel? Antwort: 9 Pfg.

Anschaulich:

○ ○ ○ 3 × 1 Apfel kosten
• • • • • • • • • 3 × 3 Pfg. = 9 Pfg.

2. 1 Meter Band kostet 2 Pfg.; was kosten 4 Meter?

——— | ——— | ——— | ——— 4 × 1 Meter kosten
2 Pfg. | 2 Pfg. | 2 Pfg. | 2 Pfg. 4 × 2 Pfg. = 8 Pfg.

Die Veranschaulichung wird mit dem Meter in seiner **wirklichen** Größe und mit einer Schnur ausgeführt, an welche man von Meter zu Meter einen Knoten macht.

3. Vier Knaben erhalten 8 Ostereier; wie viel bekommt einer davon?

Wie viel Knaben sind's? Und wie viel Eier erhalten sie mit einander? Darf Einer allein die Ostereier behalten? Was müssen sie also damit thun? (Theilen.) Wie viel Theile müssen sie daraus machen? (4.) Warum? (Weil es 4 Knaben sind.) Den wievielten Theil bekommt also 1 Knabe von den 8 Eiern? (Den 4. Theil.) Wie viel ist der 4. Theil von 8 Eiern? (2 Eier.) Wie viel bekommt also jeder Knabe? (Jeder bekommt 2 Eier.)

Anschaulich: • • | • • | • • | • •

4 Knaben, 4 gleiche Theile; also erhält
1 Knabe den 4. Theil von 8 Eiern = 2 Eier.

4. Zwei Pfund Kirschen kosten 10 Pfg.; was kostet 1 Pfund?

[|] 2 Pfd. = 1 Pfd. + 1 Pfd.
• • • • • | • • • • • 10 Pfg. = 5 Pfg. + 5 Pfg.

Was kosten die 2 Pfd. Kirschen? (10 Pfg.) Und was sollen wir suchen? (Was 1 Pfd. kostet.) Wir theilen daher die 2 Pfd. in 1 Pfd. + 1 Pfd. In wie viel gleiche Theile haben wir die 2 Pfd. getheilt? (In 2 gleiche Theile.) Wie müssen wir nun auch die 10 Pfg. theilen, damit wir sehen, wie viele Pfennige auf 1 Pfd. kommen? (Auch in 2 gleiche Theile.) Thut es! (10 Pfg. = 5 Pfg. + 5 Pfg.) Wie viele Pfennige kommen auf 1 Pfd.? (5 Pfg.)

Was für ein Theil ist 1 Pfd. von 2 Pfd.? Und was für ein Theil sind 5 Pfg. von 10 Pfg.? Wir sprechen daher: Wenn 2 Pfd. Kirschen 10 Pfg. kosten, so kostet 1 Pfd. den **halben** Theil von 10 Pfg., nämlich 5 Pfg.

5. Ein Vater vertheilt unter seine Kinder 8 Pfirsiche und gibt jedem 2; wie viel Kinder sind es?

Wie viel Pfirsiche vertheilt der Vater? Und wie viel gibt er jedem Kinde? Bei dem ältesten fängt er an. Wie viel gibt er diesem? (2.) Wovon nimmt er die 2 Pfirsiche weg? Wie viel Pfirsiche hat er jetzt noch? (Noch 6.) Nun gibt er dem zweiten Kinde auch zwei Pfirsiche. Wovon nimmt er diese weg? Und wie viel hat er jetzt noch? (Noch 4) u. s. w. Wie viel mal hat der Vater 2 Pfirsiche von den 8 Pfirsichen wegnehmen können? (4mal) Wie viel Kinder sind es also? (4 Kinder.)

Anschaulich: • • | • • | • • | • •

Aufg. z. Kopfrechnen. Uebung B.

Dritte Uebung.

Die allseitige Behandlung der einzelnen Zahlen.

§. 27. Verfahren.

Die Zahl Eins.

Wie viel ist 1 × 1? Wie viel ist 1 — 1? Wie viel mal ist 1 in 1 enthalten?

Die Zahl 2.

1. Wie viel muß ich zu 1 legen, um 2 zu erhalten?
2. Wie viel ist 2 — 1? 2 — 2?
3. Um wie viel unterscheiden sich 2 und 2? 2 und 1?
   (2 = 2; 2 ist um 1 mehr als 1, und 1 ist um 1 weniger als 2.)
4. 2 ist wie viel mal 1? Wie viel ist 2 × 1?
5. Wie oft ist 1 in 2, 2 in 2 enthalten?
6. Was für ein Theil (der wie vielte Theil) ist 1 von 2?

Die Zahl 3.

1. Wie viel muß man zu 2, zu 1 legen, um 3 zu erhalten?
2. Wie viel ist 3 — 1? 3 — 3? 3 — 2?
3. Um wie viel unterscheiden sich 3 und 3? 3 und 2? 1 und 3?
4. 3 ist wie viel mal 1? wie viel mal 2? wie viel mal 3?
5. Wie oft ist 1 in 3, 3 in 3 enthalten?
6. Was für ein Theil ist 1 von 3? Suche ²/₃ von 3!

Die Zahl 4.

1. Wie viel ist zu 3, zu 2, zu 1 zu legen, um 4 zu erhalten?
2. Wie viel ist 4 — 2? 4 — 4? 4 — 1? 4 — 3?
3. Vergleiche 4 und 4 (4 u. 3, 2 u. 4, 4 u. 1) miteinander!
4. 4 ist wie viel mal 1? wie viel mal 2? wie viel mal 3?
5. Wie oft ist 1 in 4, 2 in 4, 4 in 4 enthalten?
6. Was für ein Theil ist 1 von 4? 2 von 4?

u. s. w.

Aufg. z. Kopfr. Dritte Uebung. I.

§. 28. Verbindung verschiedener Operationen in zusammengesetzten Aufgaben.

Dergleichen Aufgaben sind:

a. Wie viel ist $4 \times 2 + 1$? $4 \times 2 - 1$?

Der Schüler antwortet: $4 \times 2 = 8$, $8 + 1 = 9$; also ist $4 \times 2 + 1 = 9$.

b. Wie viel ist $^1/_2$ von $8 + {}^1/_4$ von 8 zusammen?

Der Schüler antwortet: Die Hälfte von 8 ist 4, und der vierte Theil von 8 ist 2; $4 + 2 = 6$; also ist $^1/_2$ von $8 + {}^1/_4$ von $8 = 6$.

c. Wie viel ist $10 - {}^3/_4$ von 8?

$^1/_4$ von $8 = 2$, und $^3/_4$ von $8 = 3 \times 2$ oder 6; $10 - 6 = 4$; also ist $10 - {}^3/_4$ von $8 = 4$.

d. Wie groß ist der Unterschied zwischen $^2/_3$ von 6 und $^2/_3$ von 9?

• •|• •|• • $^1/_3$ von $6 = 2$, $^2/_3$ von $6 = 2 \times 2$ oder 4.

• • •|• • •|• • • $^1/_3$ von $9 = 3$, $^2/_3$ von $9 = 2 \times 3$ oder 6.

Der Unterschied von 4 und 6 ist 2; $^2/_3$ von 9 sind also um 2 mehr als $^2/_3$ von 6.

Aufg. z. Kopfrechnen. Uebung C.

Der zweite Zehner.

§. 29. Vorbemerkung.

Sämmtliche Operationen werden jetzt sogleich mit jeder einzelnen Zahl vorgenommen. Sie zerfallen in zwei Gruppen: in solche, durch welche die Schüler das Unterschiedsverhältniß, und in solche, durch welche sie das Theilverhältniß kennen lernen, in dem die neue Zahl zu den bereits bekannten steht.

Zur ersten Gruppe gehört das Bilden der Zahl und das Zerlegen derselben in zwei Elemente, das Zuzählen und Abziehen und das Bestimmen des Unterschiedes; zur zweiten Gruppe gehört das Zerlegen der Zahl in mehrere Elemente, das Vervielfachen, Enthaltensein und Theilen.

§. 30. Die Zahl Elf.

1. Das Bilden und Zerlegen der Zahl (in zwei Elemente) und im Anschlusse hieran das Zuzählen, Abziehen und Unterscheiden.

|• • • • • • • • • • | •

Zehn und Eins, 1 Zehner und 1 Einer. Der einzelne Einer

gehört zum zweiten Zehner. Zehn und Eins nennt man mit *einem* Worte Elf und setzt dafür die Ziffer 11.

Die Ziffer 1 zur Linken bedeutet 1 *Zehner*, die Ziffer 1 zur Rechten 1 *Einer*. Beide zusammen gelten also 1 Zehner und 1 Einer, 10 + 1 oder Elf.

Die Zahl 11, welche durch Punkte oder Ringlein, möglichst stark in die Augen fallend, an der Wandtafel dargestellt ist, wird nun durch einen kleinen senkrechten Strich in 10 + 1 zerlegt und dieser Strich bei jeder folgenden Zerfällung um Eins vorgerückt.

| • • • • • • • • • • | •

a. In was habe ich 11 zerlegt? (In 10 + 1.) Wie viel muß ich zu 10 legen um 11 zu erhalten? Wie viel ist 10 + 1?

b. Wie viel ist 11 — 1? (Der einzelne Einer wird verdeckt.)

c. Um wie viel geht 11 über 10 hinaus? Um wie viel ist 11 mehr als 10? Um wie viel steht 10 gegen 11 zurück? Um wie viel ist also 10 weniger als 11?

| • • • • • • • • • | • | •

a. In was ist 11 jetzt zerlegt? (In 9 + 1 + 1 oder in 9 + 2.) Wie viel muß ich zu 9 legen, um 11 zu erhalten? (Noch 1 + 1 oder 2.) Wie zählst du 9 und 2 zusammen? (9 + 1 = 10, + 1 = 11.)

b. Wie viel ist 11 — 1? und 10 — 1? Wie viel ist also 11 — 1 — 1? Wie viel ist 11 — 2? Wie zieht man 2 von 11 ab? (11 — 1 = 10, und 10 — 1 = 9.)

Um wie viel geht 11 über 9 hinaus? (Um 1 + 1 oder 2.) Um wie viel steht 9 gegen 11 zurück? Wie viel beträgt also der Unterschied zwischen 9 und 11? (11 ist um 2 größer als 9, und 9 ist um 2 kleiner als 11.)

Ebenso werden die folgenden Fälle behandelt:

11 = 8 + (2 + 1) oder 8 + 3
= 7 + (3 + 1) oder 7 + 4
= 6 + (4 + 1) oder 6 + 5
= 5 + (5 + 1) oder 5 + 6
= 4 + (6 + 1) oder 4 + 7
= 3 + (7 + 1) oder 3 + 8
= 2 + (8 + 1) oder 2 + 9
= 1 + (9 + 1) oder 1 + 10

Nach der Uebung *mit* Anschauung folgt dieselbe *ohne* Anschauung, *frei im Kopfe*. Man fragt:

a. Wie viel muß ich zu 7 legen, um 11 zu erhalten? (3 + 1 oder 4.) Wie viel zu 4? (6 + 1 oder 7.) ꝛc.

Wie zählt man 8 und 3 zusammen? (8 + 2 = 10, + 1 = 11.) Wie 5 und 6? (5 + 5 = 10, + 1 = 11.) Wie 9 + 2? 7 + 4? 6 + 5? 4 + 7? 3 + 8? 2 + 9?

b. Wie nehme ich 3 von 11 weg? (Zuerst den einzelnen Einer und dann noch 2 Einer von dem Zehner; 1 von 11 bleibt 10, und 2

von 10 bleibt 8.) Wie 6 von 11? (Zuerst 1, dann noch 5; 1 von 11 bleibt 10 und 5 von 10 bleibt 5.)

Wie viel ist 11 — 3? 11 — 5? 11 — 8? 11 — 6? 11 — 4? 11 — 7? rc.

c. Wie viel ist 8 — 8? (8 — 8 = 0.) Wie viel ist aber 11 — 8? (11 — 8 = 3.) Warum bleibt hier 3 übrig? (Weil 11 um drei mehr ist als 8.) Wie findet man also auch, um wie viel 11 mehr ist als 8? (Wenn man 8 von 11 abzieht.)

Wie viel ist 5 — 5? Wie viel ist aber 11 — 5? Warum bleibt hier 6 übrig? (Weil 11 um 6 mehr ist als 5.) Um wie viel ist 11 mehr als 9? als 6? 3? 7? 4? rc.

2. **Das Zerlegen der Zahl (in mehrere Elemente) und im Anschlusse hieran das Vervielfachen, Enthaltensein und Theilen.**

Die Uebung in der Anschauung, im Auffassen der veranschaulichten Zahl und ihrer Veränderungen ist die erste formale Seite des Rechenunterrichts. Sie ist eine Uebung für das Auge in Sicherheit und Raschheit des Ueberblicks und eine Uebung im Abstrahiren mathematischer Wahrheiten aus ihrer sinnlichen Darstellung. Das Auffassen der von dem Lehrer gegebenen Veranschaulichung genügt aber allein nicht. Wie in der Geometrie der Schüler zu befähigen ist, die Figur frei aus dem Kopfe zu zeichnen, so muß derselbe in der Arithmetik befähigt werden, Zahlbegriffe und Zahlenoperationen anschaulich darzustellen.

Demgemäß erhalten die Schüler die Aufgabe, die Zahl Elf in Punkten oder Ringlein zehnmal schön geordnet unter einander zu setzen. Diese theilen sie nun durch kleine senkrechte Striche so ab, daß die erste Reihe zeigt, aus wie viel mal 1 die Zahl besteht, die zweite Reihe, aus wie viel mal 2 sie besteht rc., und prägen sich dann die verschiedenen Zerfällungen durch wiederholtes Anschauen recht fest ein.

In der nächsten Rechenstunde wird es abgefragt und besprochen, wie folgt:

11 ist wie viel mal 1? Wie viel ist 11 × 1? Wie oft kann 1 von 11 weggenommen werden? Wie oft ist 1 in 11 enthalten? 11 ist wie viel mal so groß als 1? 1 ist was für ein Theil von 11?

Die Frage: 11 ist wie viel mal so groß als 1? ist in ihrer Art für die Schüler neu und wird daher schwerlich richtig beantwortet werden. In diesem Falle sind einleitende Fragen nothwendig. Wie viel mal ist die Eins zu setzen, um 2 zu erhalten? 2 ist daher wie viel mal so groß als 1? (2 ist zwei mal so groß als 1.) Wie viel mal muß 1 gesetzt werden, um 3 (4, 7, 10, 11) zu erhalten? 3 (4, 7, 10, 11) ist daher auch wie viel mal so groß als 1?

11 =? × 2. (11 = 5 × 2 + 1.) Rechne 5 × 2 + 1!

11 =? × 3. (11 = 3 × 3 + 2.) Wie rechnest du 3 × 3 + 2?

11 = ? × 4. (11 = 2 × 4 + 3.) Wie viel ist 2 × 4 + 3?
u. s. w.

Anm. Das Theilverhältniß zweier Zahlen zu einander wird, selbst in Rechenbüchern, sehr häufig inkorrekt ausgedrückt, wie zum Beispiel: „6 ist 2 mal mehr oder 2 mal größer als 3, und 3 ist 2 mal weniger oder 2 mal kleiner als 6." Wenn nämlich **6** zwei mal mehr oder größer ist als 3, so ist **3** einmal mehr oder größer als 3; und wenn 3 zweimal weniger oder kleiner ist als **6**, so ist 3 einmal weniger oder kleiner als **3**. Es ist aber 3 weder einmal mehr oder größer, noch einmal weniger oder kleiner als 3; sondern 3 = 1 × 3, also einmal so groß als 3. Folglich ist 6 zweimal so groß als 3 oder das Doppelte von 3, und umgekehrt ist 3 der halbe Theil oder die Hälfte von 6. Die Ausdrücke „mehr, weniger, größer, kleiner" dienen zur Bezeichnung des Unterschieds; das Verhältniß dagegen, nämlich das Theilverhältniß, wird durch die Ausdrücke „mal so groß, fach, Theil und tel" bezeichnet. Daran muß fest gehalten werden, wenn nicht Unklarheit und Verwirrung entstehen soll.

§. 31. Die Zahl Zwölf.

1. Bilden, Zerlegen (in 2 Elemente), Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

| • • • • • • • • • • | • •

Zehn und Zwei, 1 Zehner und 2 Einer; die 2 Einer gehören zum zweiten Zehner. Zehn und Zwei nennt man mit einem Worte Zwölf und setzt dafür die Ziffern 12.

Die Ziffer 1 zur Linken bezeichnet 1 Zehner und die Ziffer 2 zur Rechten 2 Einer. Beide zusammen gelten also 1 Zehner und 2 Einer, 10 + 2 oder Zwölf.

| • • • • • • • • • • | • | •

a. Wie ist 12 zerlegt? (In 11 + 1.) Wie viel muß ich zu 11 legen, um 12 zu erhalten? Wie viel ist 11 + 1?

b. Wie viel ist 12 — 1?

c. Um wie viel geht 12 über 11 hinaus? Und um wie viel steht 11 gegen 12 zurück? Wie viel beträgt also der Unterschied zwischen 11 und 12?

| • • • • • • • • • • | • •

a. 12 = 10 + 2. Wie viel muß man zu 10 legen, um 12 zu erhalten? Wie viel ist 10 + 2?

b. Wie viel ist 12 — 2?

c. Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 10 und 12?

| • • • • • • • • • | • | • •

a. 12 = 9 + 1 + 2 oder 9 + 3. Wie viel muß man zu 9 legen, um 12 zu erhalten? (1 + 2 oder 3.) Wie zählt man 9 und 3 zusammen? (9 + 1 = 10, + 2 = 12.)

b. Wie viel ist 12 — 2? und 10 — 1? Wie viel ist 12 — 2 — 1? Wie viel ist also 12 — 3? Wie nimmst du 3 von 12 weg? (12 — 2 = 10, und 10 — 1 = 9.)

c. Um wie viel geht 12 über 9 hinaus? (Um 1 + 2 oder 3.)

Um wie viel steht 9 gegen 12 zurück? (Um 2 + 1 oder 3.) Wie viel beträgt also der Unterschied zwischen 9 und 12?

Eben so die folgenden Fälle:

12 = 8 + (2 + 2) oder 8 + 4
= 7 + 3 + 2 oder 7 + 5
= 6 + 4 + 2 oder 6 + 6
= 5 + 5 + 2 oder 5 + 7
= 4 + 6 + 2 oder 4 + 8
= 3 + 7 + 2 oder 3 + 9
= 2 + 8 + 2 oder 2 + 10.

Dann frei im Kopfe und nur in einzelnen Fällen nachhilfsweise mit Anschauung.

a. Wie viel muß man zu 8 legen, um 12 zu erhalten? (2 + 2 oder 4.) Wie viel zu 6? (4 + 2 oder 6.) ꝛc.

Wie zählt man 9 und 3 zusammen? (9 + 1 = 10, + 2 = 12.) Wie 7 + 5? (7 + 3 = 10, + 2 = 12.) Wie 5 + 7? 8 + 4? 3 + 9? 6 + 6? 4 + 8?

b. Wie nimmt man 5 von 12 weg? (Zuerst 2 und dann noch 3; 2 von 12 bleibt 10, 3 von 10 bleibt 7.) Wie 9 von 12? (Zuerst 2, dann noch 7; 2 von 12 bleibt 10, und 7 von 10 bleibt 3.) ꝛc.

Wie viel ist 12 — 3? 12 — 5? 12 — 8? 12 — 6? 12 — 4? ꝛc.

c. Wie viel ist 7 — 7? 12 — 7? Wie viel beträgt also der Unterschied zwischen 7 und 12? Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 9 und 12? 12 und 8? 6 und 12? ꝛc.

Für die nächste Rechenstunde wird den Schülern aufgegeben, die Zahl 12 in Punkten oder Ringlein zehnmal unter einander zu setzen, zu untersuchen, aus wie viel mal 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 sie besteht, und die Zerfällungen so lange aufmerksam durchzugehen, bis sie sich dieselben eingeprägt haben.

2. Zerlegen (in mehrere Elemente) und im Anschlusse hieran Vervielfachen, Enthaltensein und Theilen.

Wie habt ihr die Zahl 12 zuerst zerlegt? (In 12 × 1.) Wie viel ist 12 × 1? Wie oft ist 1 in 12 enthalten? Was für ein Theil ist 1 von 12?

12, wie viel mal 2? Zählt 6 × 2 zusammen! Wie viel ist 6×2? Wie oft kann man 2 von 12 wegnehmen? Wie oft ist 2 in 12 enthalten? Was für ein Theil ist 2 von 12?

Aus wie viel mal 3 besteht 12? Zählt 4×3 zusammen! Wie viel ist 4 × 3? Wie oft läßt sich 3 von 12 wegnehmen? Wie oft ist 3 in 12 enthalten? Welcher Theil ist 3 von 12?

12 ist wie viel mal 4? Zählt 3 × 4 zusammen! Wie viel ist 3 × 4? Wie oft kann man 4 von 12 abziehen? Wie viel mal ist 4 in 12 enthalten? Was für ein Theil ist 4 von 12?

12, wie viel mal 5? Wie viel ist 2 × 5 + 2? Wie oft läßt

sich 5 von 12 wegnehmen? Wie oft ist 5 in 12 enthalten? (2mal und 2 bleibt übrig.)

u. s. f.

Sind sämmtliche Zerfällungen auf diese Weise durchgenommen, so läßt man von den Schülern diejenigen Fälle, wo die Zahl nur in gleiche Theile zerlegt ist, unterstreichen. Diese werden nun noch besonders behandelt. Sie heißen:

$$\begin{aligned} 12 &= 12 \times 1 \\ &= 6 \times 2 \\ &= 4 \times 3 \\ &= 3 \times 4 \\ &= 2 \times 6 \end{aligned}$$

a. In welche gleiche Theile läßt sich 12 zerlegen? (In 12×1, 6×2, 4×3, 3×4, 2×6.) 12 ist wie viel mal 1, 2, 3, 4, 6?

b. Welche Zahl muß man 2 (6, 4, 3) mal nehmen, um 12 zu erhalten?

c. Wie oft ist 2 (6, 4, 3) in 12 enthalten? Welche Zahl ist in 12 dreimal (6mal, 4mal, 2mal) enthalten? 12 ist wie viel mal so groß als 6? als 4? ꝛc.

d. Was für ein Theil ist 6 (4, 3, 2, 1) von 12? Wie viel ist $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_4$, $^3/_4$, $^1/_6$, $^5/_6$ von 12?

§. 32. Die übrigen Zahlen bis Zwanzig.

Wie Elf und Zwölf, so wird auch jede folgende Zahl dieses Zehners behandelt. Die Veranschaulichung, namentlich die des Zerlegens in mehrere (gleiche) Theile, wird von den Schülern allein ausgeführt. Es ist hiedurch ihrem Thätigkeitstriebe ein Feld geöffnet, auf welchem sie sich eben so gerne als nützlich beschäftigen. Sie arbeiten, getrieben von der Freude am Selbstfinden, dem Unterrichte vor und indem sie diesen fördern, erleichtern sie ihn auch nicht unbedeutend für den Lehrer.

Uebersicht und Wiederholung.

§. 33. Vorbemerkung.

Die äußere oder sinnliche Anschauung tritt nur im Nothfalle ein. Der Schüler muß nun mit den durch die äußere Anschauung gewonnenen Zahlvorstellungen frei im Kopfe operiren und es darin zur Sicherheit und Fertigkeit bringen. Das Vermögen, die Zahlengeschäfte in der Weise auszuführen, daß die Zahl bloß gedacht oder innerlich angeschaut wird, soll dadurch seine besondere Uebung erhalten. Wo freilich vom Anfange an jede sinnliche Anschauung fehlt, wo man den Lehrstoff ohne Weiteres und mit Gewalt dem Gedächtnisse der Schüler aufzudringen sucht, da kann auch von der inneren Anschauung der Zahlen keine Spur vorhanden sein. Was die Kinder in diesem Falle beim Rechnen, auch mit den kleinsten Zahlen, sich vorstellen, ist nicht

die Zahl mit ihrem Inhalte, sondern das Zeichen für die Zahl, die Ziffer. Das Kind ist zur Maschine, der Unterricht zur Dressur herabgewürdigt.

Durch die nun folgenden Uebungen muß das, was einzelnen Schülern entschwunden ist, erneut, was andere durch unregelmäßigen Schulbesuch versäumt haben, nachgeholt, überhaupt alles bis jetzt Behandelte bei sämmtlichen Schülern befestigt und zum Abschlusse gebracht werden. Die später von Stufe zu Stufe stattfindende Wiederkehr gewisser Uebungen soll der Lehrer benützen, um bei einzelnen Schülern die erforderliche Nachhilfe eintreten zu lassen, damit die ganze Klasse im gleichmäßigen Fortschritt erhalten werde. Wer jedoch meint, daß eben darum, weil sich Manches wiederholt, auf keiner Stufe vollständig aufgeräumt zu werden brauche, der täuscht sich sehr. Wird z. B. das Zuzählen und Abziehen mit Uebergang von einem Zehner in den andern nicht schon jetzt, d. i. beim ersten und zweiten Zehner, so durchgenommen, daß die Schüler völlig sicher und fertig darin werden; so wird dieß auch auf den spätern Stufen, wo sich die Operationen mit immer größeren Zahlen wiederholen, nicht mehr dazu kommen. Die Schüler werden es nie zur Sicherheit und Fertigkeit darin bringen. Was daher dem Lehrer hier nochmal recht dringend an's Herz gelegt wird, das ist: **man schreite von einer Uebung zur andern nicht eher fort, bis sämmtliche Schüler vollkommen sicher und fertig darin sind, und gehe zur schriftlichen Darstellung niemals über, bevor die Kinder geläufig frei im Kopfe operiren und sich dabei klar und verständig ausdrücken können.**

§. 34. Zählen.

1) Auf- und Abwärtszählen zwischen 1 und 20.
2) Welche Zahl steht vor 12? nach 12? vor 15? nach 15? ꝛc.
3) Zwischen welchen zwei Zahlen steht 11? 17? 14? ꝛc.
4) Welche Zahlen stehen zwischen 7 und 12? zwischen 9 und 13? ꝛc.

§. 35. Arten der Aufgaben beim Zusammenzählen und Abziehen.

Bei dem Zusammenzählen und dem Abziehen unterscheiden wir von jetzt an dreierlei Arten von Aufgaben:

1) Zuzählen und Abziehen der Grundzahlen ohne Uebergang von einem Zehner in den andern.
2) Zuzählen und Abziehen der Grundzahlen mit Uebergang von einem Zehner in den andern.
3) Zuzählen und Abziehen zusammengesetzter Zahlen.

In allen diesen Fällen wird die Sache zuerst möglichst ausführlich und klar behandelt, fast so, als sei sie den Schülern noch ganz unbekannt. Dann zieht sich die Form der Ausrechnung mehr und mehr zusammen, so daß sie zuletzt nur noch in den nothwendigsten Ausdrücken besteht. Besondere Aufg. hiezu z. Kopfr. bietet Heft I. S. 23—26.

§. 36. Zusammenzählen.

Zuzählen der Grundzahlen ohne Uebergang.

Beispiel: 13 + 4 = ?

Ausführlich:

13 = 1 Zehner + 3 Einer. Dazu sollen noch 4 Einer kommen. Wohin werden wir sie thun: zu dem Zehner, oder zu den drei Einern? Antwort: Zu den drei Einern. Thut es! (3 E. + 4 E. = 7 E.) Wie viel haben wir jetzt anstatt 1 Z. + 3 E.? Antwort: 1 Z. + 7 E. oder 17 E. Wie viel ist also 13 + 4? Antwort: 13 + 4 = 17.

Kürzere Weise:

13+4=? 1 Z. 3 E. + 4 E. = 1 Z. + 7 E. oder 17 E.; 13+4=17.
12+3=? 1 Z. 2 E. + 3 E. = 1 Z. + 5 E. oder 15 E.; 12+3=15.

Bei den schwächeren Schülern kann man sich auch mit folgender Ausrechnung begnügen:

13 + 4 = ? 3 + 4 = 7, 13 + 4 = 17.
12 + 3 = ? 2 + 3 = 5, 12 + 3 = 15.

Zuletzt:

13 + 4 = ? 13 + 4 = 17.
12 + 3 = ? 12 + 3 = 15.

Aufg. z. Zifferr. S. 9, Nr. 1 und 2. (Mündlich und schriftlich.)

2) Zuzählen der Grundzahlen mit Uebergang.

Beispiel: 9 + 3 = ?

Ausführlich:

Wie viel muß ich zu 9 legen, um den ersten Zehner voll zu machen? Noch 1. Wovon nehme ich die 1? Von 3. Wie viel ist dann von 3 noch da? Noch 2. Wie zählst du also 3 zu 9? Zuerst 1, dann noch 2. Thue es! 9 + 1 = 10, 10 + 2 = 12; 9 + 3 = 12.

Kürzere Weise:

9 + 3 = ? 9 + 1 = 10, + 2 = 12; 9 + 3 = 12.
8 + 7 = ? 8 + 2 = 10, + 5 = 15; 8 + 7 = 15.

Noch kürzer:

9 + 3 = ? 9 + (1 + 2) = 12; 9 + 3 = 12.
8 + 7 = ? 8 + (2 + 5) = 15; 8 + 7 = 15.

Zuletzt:

9 + 3 = ? 9 + 3 = 12.
8 + 7 = ? 8 + 7 = 15.

Bis zur größten Sicherheit und Fertigkeit!

Aufg. z. Zifferr. S. 9, Nr. 3 und 4. (Mündlich und schriftlich.)

3) Zuzählen zusammengesetzter Zahlen.

Beispiel: 5 + 11 =?

Hier werden die Schüler rechnen wollen wie bei der vorhergehenden Uebung, nämlich 5 + 5 = 10, + 6 = 16. Man lasse es geschehen. Dann aber sage man, daß die Zahl 11 noch auf eine andere, bequemere Weise zu 5 gezählt werden könne. Diese wird jedoch nicht geradezu mitgetheilt, sondern nur angedeutet. Etwa so: Woraus besteht 11? (Aus 10 + 1.) Das Hinzuzählen der 10 ist, wie ihr wißt, sehr leicht. Wie werden wir also rechnen? Antwort: Wir zählen zu 5 erst 10 und dann noch 1. Thut's: 5 + 10 = 15, + 1 = 16; 5 + 11 = 16.

7 + 12 =? 7 + 10 = 17, + 2 = 19; 7 + 12 = 19.
6 + 14 =? 6 + 10 = 16, + 4 = 20; 6 + 14 = 20.

Aufg. z. Zifferr. S. 10, Nr. 5 und 6. (Mündlich und schriftlich.)

Zu welcher Zahl muß man 1 legen, um 12 (17, 15, 16) ꝛc. zu erhalten? Zu welcher Zahl muß man 2 legen, um 15 (13, 17) ꝛc. zu erhalten? u. s. w.

§. 37. Abziehen.

1) Abziehen der Grundzahlen ohne Uebergang.

Beispiel: 17 — 3 =?

Ausführlich:

17 = 1 Z. + 7 E. Davon sollen 3 E. weggenommen werden. Wovon können wir sie wegnehmen? (Von dem Zehner oder von den 7 E.) Wovon werden wir sie wegnehmen? Antwort: Von den 7 Einern. Thut's! (3 E. von 7 E. bleiben 4 E.) Wie viel haben wir jetzt noch von 1 Z. + 7 Ein.? Antwort: Noch 1 Z. + 4 E. oder 14 Einer. Wie viel ist also 17 — 3? Antwort: 17 — 3 = 14.

Kürzere Weise:

17—3=? 17=10+7; 10+7—3=10+4 od. 14; 17—3=14.
18—5=? 18=10+8; 10+8—5=10+3 od. 13; 18—5=13.

Zuletzt:

17 — 3 =? 17 — 3 = 14.
18 — 5 =? 18 — 5 = 13.

Aufg. z. Zifferr. S. 10, N. 7 und 8 (Mündl. und schriftl.)

2) Abziehen der Grundzahlen mit Uebergang.

Beispiel: 15 — 7 =?

Ausführlich.

Wie nimmt man 7 von 15 weg? Antwort: Zuerst 5, dann noch 2. Thut es! 5 von 15 bleibt 10, und 2 von 10 bleibt 8; 7 von 15 bleibt 8.

Kürzere Weise.

15 — 7 =? 15 — 5 = 10, u. 10 — 2 = 8; 15 — 7 = 8.
11 — 4 =? 11 — 1 = 10, u. 10 — 3 = 7; 11 — 4 = 7.

Noch kürzer:

15 — 7 =? 15 — (5 + 2) = 8; 15 — 7 = 8.
11 — 4 =? 11 — (1 + 3) = 7; 11 — 4 = 7.

Zuletzt:

15 — 7 =? 15 — 7 = 8.
13 — 6 =? 13 — 6 = 7.

Bis zur größten Sicherheit und Fertigkeit!

Aufg. z. Zifferr. S. 11, Nr. 9 und 10. (Mündl. u. schriftl.)

3) Abziehen zusammengesetzter Zahlen.

Beispiel: 15 — 11 =?

Wie viel soll von 15 weggenommen werden? Woraus besteht die Zahl 11? Wie nimmt man also 11 von 15 weg? (Man nimmt zuerst 10 weg und dann noch 1.) Thut's! (10 vou 15 bleibt 5, und 1 von 5 bleibt 4; also ist 15 — 11 = 4.)

18 — 12 =? 18 — 10 = 8 und 8 — 2 = 6; 18 — 12 = 6.
20 — 16 =? 20 — 10 = 10 und 10 — 6 = 4; 20 — 16 = 4.

Aufg. z. Zifferr. S. 11, Nr. 11, 12, 13. (Mündl. u. schriftl.)

Von welcher Zahl muß man 1 wegnehmen, damit 16 (12, 18, 15 2c.) übrig bleibt? Welche Zahl muß man um 2 kleiner machen, um 18 (15, 12, 17 2c.) zu erhalten? u. s. f.

§. 38. Bestimmung des Unterschiedes.

Beispiel. Wie viel beträgt der Unterschied von 8 und 15?

a. Zu 8 muß ich noch 2 + 5 oder 7 legen, um 15 zu erhalten; 8 ist daher um 7 kleiner als 15.

b. 8 von 15 bleibt 7; 15 ist um 7 größer als 8.

Der Unterschied von 8 und 15 ist also 7.

Ebenso auch mit den Zahlen

9 u. 11	4 u. 17	14 u. 17	17 u. 19.
6 u. 12	2 u. 19	16 u. 19	4 u. 20.
8 u. 11	5 u. 20	13 u. 18	16 u. 20.
7 u. 12	3 u. 18	15 u. 20	3 u. 17.

§. 39. Zerlegen in gleiche Theile und die hieran sich anschließenden Uebungen.

In welche gleiche Theile kann die Zahl 12 zerlegt werden? Wie oft ist 2 (3, 4, 6) in 12 enthalten? Wie viel beträgt die Hälfte ($^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$) von 12?

In welche gleiche Theile läßt sich die Zahl 14 zerlegen? Wie oft ist 7 (2) in 14 enthalten? Wie viel ist die Hälfte ($^1/_7$) von 14? Eben so mit 15, 16, 18, 20.

Aufg. z. Zifferr. S. 11 u. 12, Nr. 14, 15, 16.

§. 40. Das Messen und Theilen der Zahlen von 1—20 durch 2.

a.

$1+2,\ 3+2,\ 5+2 \ldots 17+2;\ 19-2,\ 17-2,\ 15-2,\ 13-2$ rc.
$2+2,\ 4+2,\ 6+2 \ldots 18+2;\ 20-2,\ 18-2,\ 16-2,\ 14-2$ rc.

$$2 = 2;\ 1 \times 2 = 2$$
$$2+2 = 4;\ 2 \times 2 = 4$$
$$2+2+2 = 6;\ 3 \times 2 = 6$$
$$2+2+2+2 = 8;\ 4 \times 2 = 8$$

u. s. w.

Das Vervielfachen an dieser Stelle, in und außer der Reihenfolge, wird jedesmal so fest und sicher eingeübt, daß hierin nichts mehr zu wünschen übrig bleibt. Dann gibt man Fragen folgender Art:

1) Welche Zahlen bis 20 lassen sich aus der 2 zusammensetzen?
2) Wie viel ist $4 \times 2 + 1$? $8 \times 2 - 1$? $5 \times 2 + 1$? $9 \times 2 - 1$?
3) Wie vielmal 2 ist 13? 7? 19? 11? 3? 9? 15? 17? rc.
4) 1 Kilogramm hat 2 Pfd.; w. v. Pfd. sind 3, 5, 8 Kilogr.?
5) 1 Meter Band kostet 2 Pfg.; was kosten 2, 3 .... 10 Meter?

b.

1) Aus wie vielmal 2 besteht 8, 6, 10, 14? rc.
2) Wie vielmal ist 2 in 4, in 10, in 16, in 6 rc. enthalten?
3) Was von einer Speise, von einer Waare, von einer Zahl übrig bleibt, heißt Rest. Wie oft kann 2 von 3 weggenommen werden? (1mal, Rest 1.) Wie oft von 7, 11, 14, 5, 19? rc.
4) Wie oft ist 2 enthalten in 3? in 7? in 11? in 15? rc.
5) In welcher Zahl ist 2 3mal (5, 7, 9, 6mal) enthalten?

c.

1) Zerlege die Zahl 4 in 2 gleiche Theile! Eben so 6, 10 rc.
2) Welches ist der halbe Theil von 4, 8, 16, 10? rc.
3) Wovon ist 4 die Hälfte? wovon 6? 3? 7? rc.
4) 2 Schwestern theilen 12 Meter Band; wie viel bekommt jede derselben? Wie viel aber, wenn sie 18 Meter theilen?
5) 2 Meter Band kosten 6 (20, 10, 18 rc.) Kreuzer; wie viel wird 1 Meter kosten?
6) A und B (2 Schüler), theilt diese Nuß hier miteinander! M und N (2 andere Schüler), theilt diese 3 Nüsse unter euch! Wie werden 2 Knaben 5, 7, 9 rc. Aepfel unter sich theilen?

Aufg. z. Zifferr. S. 12. Nr. 17 und 18.

Der dritte Zehner.

§. 41. Die Zahl Einundzwanzig.

Die Schüler haben die Aufgabe gehabt, für sich die Zahl 21 zu

zerlegen. Nachdem sie ihre Aufschriebe vorgelesen, etwaige Fehler berichtigt, und die einzelnen Zerfällungen frei aus dem Kopfe angegeben haben, wird zu Nachstehendem übergegangen.

a. Das Unterschiedsverhältniß der Zahl.

Anschaulich. | • • • • • • • • • • | • • • • • • • • • • | •

Der Lehrer theilt die Zahl mittelst eines Stäbchens ab, und die Schüler sprechen:

21 = 20 + 1 od. 2 Z. + 1 E.
21 = 19 + 1 + 1 od. 19 + 2
21 = 18 + 2 + 1 od. 18 + 3
u. s. w.

Es werden jedoch weder alle möglichen Fälle erschöpft, noch die Zerfällungen nur in ihrer natürlichen Reihenfolge vorgeführt. Hauptsache ist, daß der Schüler die beiden Theile der zerlegten Zahl rasch überblickt, auffaßt und angibt.

Anschaulich und frei im Kopfe.

Wie zählst du 19 + 2 (18 + 3, 17 + 4, 16 + 5 ꝛc.) zusammen?
19 + 2 = 19 + 1 + 1; 19 + 1 = 20, + 1 = 21; 19 + 2 = 21.
18 + 3 = 18 + 2 + 1; 18 + 2 = 20, + 1 = 21; 18 + 3 = 21
u. s. w.

Wie ziehst du von 21 2 (3, 4, 5, 6 ꝛc.) ab?
21 — 2 = 21 — 1 — 1; 21 — 1 = 20 u. 20 — 1 = 19; 21 — 2 = 19.
21 — 3 = 21 — 1 — 2; 21 — 1 = 20 u. 20 — 2 = 18; 21 — 3 = 18.
u. s. w.

Frei im Kopfe.

Wie viel muß man zu 19 legen, um 21 zu erhalten? (1 + 1 oder 2.) Um wie viel geht 21 über 16 hinaus? (Um 4 + 1 oder 5.) Um wie viel steht 18 gegen 21 zurück? (Um 1 + 2 oder 3.) Um wie viel ist 21 größer als 14? (Um 6 + 1 oder 7.) Um wie viel ist 17 kleiner als 21? (Um 3 + 1 oder 4.) Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 15 und 21? (5 + 1 oder 6.) Zwei Zahlen betragen zusammen 21; die eine heißt 12, wie die andere? (8 + 1 oder 9.)

b. Das Theilverhältniß der Zahl.

21 = ? × 2. (20 = 10 × 2; 21 = 10 × 2 + 1.)

21 = ? × 3. Wie oft muß man 3 nehmen, um 21 zu erhalten? (Mit Hilfe der Hand, für jede 3 einen Finger.) 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21; 7mal.) 21 ist also wie vielmal 3? Wie viel ist 7 × 3? Welche Zahl muß man 7mal nehmen, um 21 zu erhalten?

Wie oft kann 3 von 21 weggenommen werden? Wie vielmal ist 3 in 21 enthalten? Welche Zahl ist 7mal in 21 enthalten? Was für ein Theil ist 3 von 21? Wie viel ist $^1/_7$ von 21? $^2/_7$ von 21? ꝛc.

• | • | •   • • •   • | • | • | •   • • • •
• | • | •   • • •   • | • | • | •   • • • •

6 = 3 × 2 und umgekehrt = 2 × 3; 8 = 4 × 2 und umgekehrt = 2 × 4; 14 = 7 × 2 und umgekehrt = 2 × 7; 21 ist = 7 × 3, also auch = 3 × 7. Wie oft ist daher 7 zu nehmen,

um 21 zu erhalten? (3mal.) Thut es! (7 + 7 = 14, 14 + 7 = 21; 2 × 7 = 14, 3 × 7 = 21.) Welche Zahl muß ich 3mal nehmen, um 21 zu erhalten?

Wie oft kann man 7 von 21 wegnehmen? Wie oft ist 7 in 21 enthalten? Welche Zahl ist 3mal in 21 enthalten?

Was für ein Theil ist 7 von 21? Wie viel beträgt 1/3 von 21? Wie viel sind 2/3 von 21?

Wenn man den Faden zum Nähen, zum Stricken einmal nimmt, wie er ist, so ist er einfach. Nimmt man ihn zweimal, so ist er zweifach oder doppelt; nimmt man ihn dreimal, so ist er dreifach ꝛc.

Das Wievielfache ist nun 21 von 7? Und 7 ist was für ein Theil von 21? Das Wievielfache ist 21 von 3? Und 3 ist was für ein Theil von 21?

1 Meter Tuch kostet 7 fl.; was kosten 3 Meter? 1 Meter kostet 3 fl.; was kosten 7 Mtr.; — 3 Pfd. Mehl kosten 21 kr.; wie hoch kommt 1 Pfd.? 7 Pfd. Kirschen zu 21 kr.; wie theuer ist 1 Pfd.?

Für die nächste Rechenstunde bereiten sich die Schüler auf die folgende Zahl vor und untersuchen, aus wie vielmal 2, 3 ꝛc. sie besteht.

§. 42. Die Zahl Zweiundzwanzig.

a. Das Unterschiedsverhältniß der Zahl.

| ••••• ••••• | ••••• ••••• | ••

Anschaulich.
22 = 21 + 1
22 = 20 + 2 od. 2 Z. + 2 E.
22 = 19 + 1 + 2 od. 19 + 3
22 = 18 + 2 + 2 od. 18 + 4
u. s. f.

Anschaulich und frei im Kopfe.

Wie zählst du 19 + 3 (18 + 4, 17 + 5, 16 + 6) zusammen?
19 + 3 = 19 + 1 + 2; 19 + 1 = 20, + 2 = 22; 19 + 3 = 22.
18 + 4 = 18 + 2 + 2; 18 + 2 = 20, + 2 = 22; 18 + 4 = 22. ꝛc.

Wie ziehst du von 22 3 (5, 7, 9, 6) ab?
22 — 3 = 22 — 2 — 1; 22 — 2 = 20, — 1 = 19; 22 — 3 = 19.
22 — 4 = 22 — 2 — 2; 22 — 2 = 20, — 2 = 18; 22 — 4 = 18. ꝛc.

Frei im Kopfe.

Wie viel muß man zu 17 legen, um 22 zu erhalten? Um wie viel geht 22 über 15 hinaus? Wie viel steht 18 gegen 22 zurück? Um wie viel ist 22 größer als 9? (Um 1 + 10 + 2 oder 13.) Um wie viel ist 16 kleiner als 22? Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 14 und 22? Zwei Zahlen betragen zusammen 22; die eine heißt 13; wie die andere?

b. Das Theilverhältniß der Zahl.

22 = ? × 2. Ist 22 mehr oder weniger als 10 × 2? Welche Zahl ist genau 10 × 2? Wir zerlegen daher 22 in 20 + 2. Nun sucht, wie vielmal 2 das ist! (20 ist 10 × 2, und 2 ist 1 × 2; 10 × 2 und 1 × 2 ist 11 × 2; 21 = 11 × 2.)

Wie oft ist 2 in 22 enthalten? (2 ist in 20 10mal und in 2 1mal, in 22 also 11mal enthalten.)

Was für ein Theil ist 2 von 22? Wie viel ist $^1/_{11}$ von 22? Wie viel sind $^3/_{11}$ ($^7/_{11}$, $^{10}/_{11}$) von 22?

Da $22 = 11 \times 2$, so ist 22 auch $= 2 \times 11$. Wie rechnest du 2×11?

An der Rechenmaschine.

• • • • • • • • • •	$10 + 10 = 20$	$2 \times 10 = 20$
• •	$1 + 1 = 2$	$2 \times 1 = 2$
• • • • • • • • • •	$11 + 11 = 22$	$2 \times 11 = 22$
•		

Nach vorstehender Veranschaulichung: $2 \times 11 = 2 \times 10$ und 2×1; $2 \times 10 = 20$, und $2 \times 1 = 2$; $20 + 2 = 22$; $2 \times 11 = 22$.

Wie oft kann man 11 von 22 wegnehmen? Wie oft ist daher 11 in 22 enthalten? Welche Zahl liegt in 22 2mal?

Was für ein Theil ist 11 von 22? Wie viel ist die Hälfte von 22? Wie sucht man die Hälfte von 22? (Die Hälfte von 20 ist 10, und die Hälfte von 2 ist 1; $10 + 1 = 11$.)

22 ist das 2fache von 11, und 11 ist die Hälfte von 22.

22 ist das 11fache von 2, und 2 ist $^1/_{11}$ von 22.

1 Hektoliter Wein kostet 11 fl., wie viel kosten 2 Hektoliter? Wie viele Füße haben 11 Vögel zusammen? 2 Knaben theilen 22 Nüsse; wie viel bekommt Einer davon? 11 fl. nennt man 1 Karolin; wie viel Karolin machen 22 fl.?

In dieser Weise werden sämmtliche Produktzahlen dieses und jedes folgenden Zehners durchgearbeitet.

Vorausgesetzt kann werden, daß die Faktorenpaare derselben dem Lehrer bekannt sind. Die Aufgaben zum Zifferrechnen weisen übrigens auch auf sie hin.

Nach jedem Zehner werden die Faktorenpaare der Produktzahlen von vorn an wiederholt, damit die Schüler, am Ende des ersten Hunderts angelangt, die Faktoren sämmtlicher Produktzahlen desselben inne haben.

Die Primzahlen (23, 29 2c.) werden nur nach ihrem Unterschiedsverhältnisse betrachtet.

Aufg. z. Zifferr. III. Nr. 1—8. Mündlich und schriftlich.

Bei dem Zifferrechnen wird mit dem Abziehen auch das Bestimmen des Unterschieds verbunden. $24 - 16 = 8$; der Unterschied zwischen 24 und 16 ist 8.

---

§. 43. Messen und Theilen der Zahlen 1—30 durch 3

a.

$1 + 3$, $4 + 3$, $7 + 3$ . . . $25 + 3$;	$28 - 3$, $25 - 3$, $22 - 3$ 2c.
$2 + 3$, $5 + 3$, $8 + 3$ . . . $26 + 3$;	$29 - 3$, $26 - 3$, $23 - 3$ 2c.
$3 + 3$, $6 + 3$, $9 + 3$ . . . $27 + 3$;	$30 - 3$, $27 - 3$, $24 - 3$ 2c.

$$3 = 3;\ 1 \times 3 = 3$$
$$3 + 3 = 6;\ 2 \times 3 = 6$$
$$3 + 3 + 3 = 9;\ 3 \times 3 = 9$$
$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 12;\ 4 \times 3 = 12$$
u. s. w.

Ist Vorstehendes in und außer der Ordnung vollständig eingeprägt, dann folgende Fragen und Aufgaben:

1) Welche Zahlen von 1 bis 30 lassen sich aus der 2 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das 2fache von 3? das 5fache von 3? ꝛc.
3) Das Wievielfache von 3 ist 6? 12? 9? 18? 15? ꝛc.
4) Das Verwandeln der Groschen von 1 bis in 10 Kreuzer.

b.

1) Aus wie vielmal 3 besteht 9? 15? 6? 12? 18? ꝛc.
2) Wie oft liegt 3 in 6? in 15? in 9? in 21? ꝛc.
   „ „ „ 3 in 4? in 10? in 8? in 20? ꝛc.
3) In welcher Zahl ist 3 2mal enthalten? in welcher 6mal? ꝛc.
4) Verwandeln der Kreuzer von 3 bis 30 in Groschen.

c.

1) Zerlege die Zahl 6 in 3 gleiche Theile! Eben so 15! 9! ꝛc.
2) Wie viel ist der dritte Theil von 3? von 9? von 24? ꝛc.
3) Suche $1/3$ von 9! von 21! von 27! von 18! ꝛc.
4) Wovon ist 5 der 3te Theil? Wovon ist 8 der 3te Theil? ꝛc.
5) Was kostet 1 Pfd. Mehl, wenn 3 Pfd. 18 (12, 21, 27) kr. kosten?
6) 3 Brüder haben 2 Aepfel unter sich zu theilen; wie werden sie es thun? Wie aber, wenn sie 4 (10, 20) Aepfel mit einander zu theilen haben?

Der vierte Zehner.

§ 44. Anschaulich und frei im Kopfe die einzelnen Zahlen von 30—40.

Nach §. 41. und §. 42.

Ist zu suchen, aus wie vielmal 2 eine Zahl dieses Zehners besteht, so wird dieselbe zuerst zerlegt und zwar in 20 und den Rest, 36 also in 20 + 16, und hievon die Antwort abgeleitet. $20 = 10 \times 2$, und $16 = 8 \times 2$; $10 \times 2 + 8 \times 2 = 18 \times 2$; $36 = 18 \times 2$.

Ist zu suchen, aus wie vielmal 3 eine dieser Zahlen bestehet, so wird dieselbe zuerst in 30 und den Rest, 36 also in 30 und 6 zerlegt. $30 = 10 \times 3$, und $6 = 2 \times 3$; 10×3 und $2 \times 3 = 12 \times 3$.

Soll aber bestimmt werden, wie vielmal 4, oder 5, oder 6 ꝛc. eine Zahl dieses Zehners in sich begreift; so geschieht dies dadurch, daß man

sucht, wie oft 4, oder 5, oder 6 2c zu nehmen ist, um dieselbe zu erhalten.

Mündlich und schriftlich die Aufgaben zum Zifferrechnen IV. Nr. 1—8.

§. 45. Messen und Theilen der Zahlen 1—40 durch 4.

a.

1 + 4, 5 + 4, 9 + 4 . . . . 33 + 4; 37 — 4, 33 — 4, 29 — 4 2c.
2 + 4, 6 + 4, 10 + 4 . . . . 34 + 4; 38 — 4, 34 — 4, 30 — 4 2c.
3 + 4, 7 + 4, 11 + 4 . . . . 35 + 4; 39 — 4, 35 — 4, 31 — 4 2c.
5 + 4, 8 + 4, 12 + 4 . . . . 36 + 4; 40 — 4, 36 — 4, 32 — 4 2c.

4 = 4; 1 × 4 = 4
4 + 4 = 8; 2 × 4 = 8
4 + 4 + 4 = 12; 3 × 4 = 12
4 + 4 + 4 + 4 = 16; 4 × 4 = 16
u. s. w.

Geht Vorstehendes in und außer der Ordnung sicher und fertig, dann folgende Fragen und Aufgaben:

1) Welche Zahlen bis 40 lassen sich aus 4 zusammensetzen?
2) Wie heißt das 2fache, das 3fache, das 5fache 2c. von 4?
3) Das Wievielfache von 4 ist 12? 20? 16? 8? 32? 2c.
4) Zu 1 Kleide braucht man 4 Meter Zeug; wie v. zu 3, 5 2c. Kl.?
5) 3 kr., wie viel Pfennige? 6 kr. = ? pf.; 8 kr. = ? pf.; 10 kr. = ? pf.

b.

1) Wie vielmal 4 ist 12, 32, 24, 40, 16, 28, 36? 2c.
2) Wie oft liegt 4 in 16, in 24, in 12, in 20, in 32? 2c.
3) Wie oft ist 4 in 5, in 6, in 7, in 9, in 14, in 19 2c. enthalten?
4) Wie viel Kreuzer machen 16 pf.? 28 pf.? 35 pf? 21 pf.? 2c.

c.

1) Zerlege 8 in 4 gleiche Theile? Ebenso 20, 32, 16, 28! 2c.
2) Wie viel ist der 4. Theil von 8? von 20? von 12? 2c.
3) Wie viel beträgt ¼ von 12, von 24, von 32, von 16? 2c.
4) A erspart sich in 4 Jahren 36 (24, 32 2c.) fl.; wie viel in 1 J.?
5) Wie theilen sich 4 Kinder in 3 Aepfel?

Wiederholung derjenigen Theile von dem Einmaleins, welche bereits eingeübt worden sind.

1 × 2	1 × 3	1 × 4
2 × 2	2 × 3	2 × 4
3 × 2	3 × 3	3 × 4
|	—	|
10 × 2	10 × 3	10 × 4

Aufg. z. Zifferr. S. 17 N. 9—12.

Der fünfte Zehner.

§. 46. Anschaulich und frei im Kopfe die einzelnen Zahlen von 40—50.

Nach §. 41 und 42.

Wenn zu suchen ist, aus wie vielmal 2 oder 4 eine Zahl dieses Zehners, z. B. 48, besteht, so wird sie in 40 und den Rest zerlegt. $48 = 40 + 8$; $40 = 20 \times 2$, und $8 = 4 \times 2$; 20×2 und $4 \times 2 = 24 \times 2$; $48 = 24 \times 2$ und $= 2 \times 24$. $40 = 10 \times 4$, und $8 = 2 \times 4$; $10 \times 4 + 2 \times 4 = 12 \times 4$; $48 = 12 \times 4$, und auch 4×12.

Ist zu suchen, aus wie vielmal 3 eine solche Zahl besteht, so wird sie in 30 und den Rest zerlegt. $48 = 30 + 18$; $30 = 10 \times 3$, und $18 = 6 \times 3$; $10 \times 3 + 6 \times 3 = 16 \times 3$; $48 = 16 \times 3$, und auch $= 3 \times 16$.

Bei 5, 6, 7 rc. wird das Zusammenlegen angewendet.

§. 47. Mündlich und schriftlich die Aufgaben zum Zifferrechnen V. Nr. 1—8.

§. 48. Messen und Theilen der Zahlen von 1—50 durch 5.

a.

$1 + 5$, $6 + 5$, $11 + 5$ . . . $41 + 5$; $46 - 5$, $41 - 5$, $36 - 5$ rc.
$2 + 5$, $7 + 5$, $12 + 5$ . . . $42 + 5$; $47 - 5$, $42 - 5$, $37 - 5$ rc.
$3 + 5$, $8 + 5$, $13 + 5$ . . . $43 + 5$; $48 - 5$, $43 - 5$, $38 - 5$ rc.
u. s. w. u. s. w.

$5 = 5$; $1 \times 5 = 5$
$5 + 5 = 10$; $2 \times 5 = 10$
$5 + 5 + 5 = 15$; $3 \times 5 = 15$
$5 + 5 + 5 + 5 = 20$; $4 \times 5 = 20$
u. s. w.

1) Welche Zahlen von 1—50 lassen sich aus 5 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das Doppelte von 5? das 4fache von 5 rc.
3) Das Wievielfache von 5 ist 10? 25? 15? 40? rc.
4) Für 1 Gr. kauft man 5 Eier; wie viel für 3 (6, 8, 10) Gr.?

b.

1) Aus wie vielmal 5 besteht 15? 10? 25? 20? rc.
2) Wie oft liegt 5 in 10? in 20? in 35? in 25? rc.
3) „ „ „ 5 in 8? in 42? in 16? in 24? rc.
4) In welcher Zahl ist 5 3mal enthalten? in welcher 5mal? rc.
5) 5 Schiefersteine kosten 1 kr., was kosten 10, 15, 20? rc.

c.

1) Zerlegt die Zahl 10 in 5 gleiche Theile! Ebenso 15, 20, 25 rc.
2) Wie viel ist $^1/_5$ von 10, von 25, von 40, von 30? rc.
3) Wie viel betragen $^2/_5$ von 10? $^3/_5$ von 20? $^4/_5$ von 25?
4) 5 Mann verdienen 15 (20, 35 rc.) fl.; was verdient 1 Mann?
5) 5 Arme erhalten 4 Laibe Brod; wie theilen sie diese?

1×2	1×3	1×4	1×5
2×2	2×3	2×4	2×5
3×2	3×3	3×4	3×5
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Aufg. z. Zifferr. S. 20. Nr. 9—12.

Der sechste Zehner.

§. 49. Anschaulich und frei im Kopfe die einzelnen Zahlen von 50—60.

Nach §. 41 und 42.

§. 50. Mündlich und schriftlich die Aufgaben zum Zifferrechnen VI. Nr. 1—6.

§. 51. Das Messen und Theilen der Zahlen.

a.

1+6, 7+6, 13+6, . . . 49+6; 55—6, 49—6, 43—6 ꝛc.
2+6, 8+6, 14+6, . . . 50+6; 56—6, 50—6, 44—6 ꝛc.
3+6, 9+6, 15+6, . . . 51+6; 57—6, 51—6, 45—6 ꝛc.
u. s. w. u. s. w.

6 = 6; 1 × 6 = 6
6 + 6 = 12; 2 × 6 = 12
6 + 6 + 6 = 18; 3 × 6 = 18
6 + 6 + 6 + 6 = 24; 4 × 6 = 24
u. s. w.

1) Welche Zahlen bis 60 lassen sich aus 6 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das 4fache von 6? das 7fache von 6? ꝛc.
3) Das Wievielfache von 6 ist 12? 30? 18? 42? 36? ꝛc.
4) Wie viel Kreuzer machen 2 Sechser? 3 Sechser? 7 Sechser? ꝛc.

b.

1) Aus wie vielmal 6 besteht 18? 40? 12? 54? ꝛc.
2) Wie oft liegt 6 in 24? in 42? in 18? in 60? in 48? ꝛc.
„ „ „ 6 in 9? in 16? in 31? in 25? in 41?
3) In welcher Zahl liegt 6 2mal? 8mal? 5mal? 3mal? ꝛc.
4) Wie viel Sechser machen 18 kr.? 30 kr.? 12 kr.? 54 kr.? ꝛc.

c.

1) Zerlege in 6 gleiche Theile die Zahl 6! 12! 18! ꝛc.
2) Wie heißt der 6. Theil von 6? von 18? von 30? von 12? ꝛc.
3) Wie viel betragen 5/6 von 18? von 30? von 36? ꝛc.
4) Was kostet 1 Pfd., wenn 6 Pfd. 48 (36, 54) kr. kosten?
5) Wie theilen sich 6 Brüder in 5 Aepfel?

Wiederholung der bis jetzt eingeübten Theile von dem Einmaleins.

Aufg. z. Zifferr. S. 22. Nr. 7—10.

Der siebente Zehner.

§. 52. Anschaulich und frei im Kopfe die einzelnen Zahlen von 60—70.

Nach §. 41 und 42.

Außer dem in den bezeichneten §. §. dargelegten Verfahren kann in einzelnen Fällen auch das folgende angewendet werden:

64=2×32=32+32; 32=2×16; also ist 32+32=2×16+2×16 oder 4×16; 64=2×32=4×16.

68=2×34, und 34=2×17; also ist 68=2×17+2×17 oder 4×17; 68=2×34=4×17.

§. 53. Mündlich und schriftlich die Aufgaben zum Zifferrechnen VII. Nr. 1—6.

§. 54. Messen und Theilen der Zahlen 1—70 durch 7.

a.

1+7, 8+7, 15+7 . . . 57+7; 64—7, 57—7, 50—7 ꝛc.
2+7, 9+7, 16+7 . . . 58+7; 65—7, 58—7, 51—7 ꝛc.
3+7, 10+7, 17+7 . . . 59+7; 66—7, 59—7, 52—7 ꝛc.
u. s. w. u. s. w.

7 = 7; 1 × 7 = 7
7 + 7 = 14; 2 × 7 = 14
7 + 7 + 7 = 21; 3 × 7 = 21
u. s. w.

1) Welche Zahlen bis 70 lassen sich aus 7 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das 3fache, das 5fache ꝛc. von 7?
3) Das Wievielfache von 7 ist 14? 35? 21? 49? 28? ꝛc.
4) Wie viele Tage sind 3 Wochen? 8, 5, 4, 10 Wch.?

b.

1) Aus wievielmal 7 besteht die Zahl 21, 63, 35? ꝛc.
2) Wie oft liegt 7 in 14, in 35, in 21, in 70, in 49? ꝛc.
3) Wie oft liegt 7 in 8, in 16, in 24, in 32, in 40 ꝛc.
4) In welcher Zahl liegt 7 4mal, 7mal, 3mal, 10mal?
5) Wie viel Wochen sind 21, 49, 35, 63, 56, 70 Tage?

c.

1) Zerlegt 21 in 7 gleiche Theile! Deßgleichen 35, 49 ꝛc.
2) Wie heißt der 7. Theil von 14, 49, 70, 21, 56? ꝛc.
3) Suche $^2/_7$ von 14, $^3/_7$ von 21, $^4/_7$ von 42, $^5/_7$ von 49! ꝛc.
4) Jemand verdient in 7 Tag 63 (42, 35) fl.; wie v. in 1 Tg.?
5) 7 Kinder haben 6 Lebkuchen unter sich zu theilen; wie machen sie das?

Wiederholung der bisher eingeübten Theile von dem Einmaleins. Aufg. z. Zifferr. S. 25. Nr. 7—10.

Der achte Zehner.

§. 55. Anschaulich und frei im Kopfe die einzelnen Zahlen von 70—80.
Nach §. §. 41, 42 und 52.

§ 56. Mündlich und schriftlich die Aufgaben zum Zifferrechnen VIII. Nr. 1—6.

§. 57. Messen und Theilen der Zahlen von 1—80 durch 8.

a.

1+8, 9+8, 17+8, . . . 65+8; 73—8, 65—8, 57—8 ꝛc.
2+8, 10+8, 18+8, . . . 66+8; 74—8, 66—8, 58—8 ꝛc,
3+8, 11+8, 19+8, . . . 67+8; 75—8, 67—8, 59—8 ꝛc.
u. s. w. u. s. w.

8 = 8; 1 × 8 = 8
8 + 8 = 16; 2 × 8 = 16
8 + 8 + 8 = 24; 3 × 8 = 24
8 + 8 + 8 + 8 = 32; 4 × 8 = 32
u. s. w.

1) Welche Zahlen von 1—80 lassen sich aus der 8 zusammensetzen?
2) Wie heißt das 4fache von 8? das 7fache von 8? ꝛc.
3) Das Wievielfache von 8 ist 24? 32? 48? 64? ꝛc.
4) Das Pfd. Fleisch zu 8 kr.? was kosten 2 Pfd.? 3 Pfd. ꝛc.

b.

1) Aus wie vielmal 18 besteht 6? 40? 24? 56? ꝛc.
2) Wie oft ist 8 enthalten in 16? in 32? in 48? in 24? ꝛc.
" " " 8 " " 11? in 25? in 37? in 45? ꝛc.
3) In welcher Zahl liegt 8 2mal? 5mal? 3mal? ꝛc.
4) 8 Meter geben 1 Kleid; wie viel Kleider geben 16 Meter? 40 Meter? 64 Meter? 80 Meter?

c.

1) Zerlege in 8 gleiche Theile die Zahl 8! 16! 24! 32! ꝛc.
2) Welches ist der 8. Theil von 24? von 40? von 16? von 32? ꝛc.
3) Wie viel betragen ³/₈ von 24? ⁵/₈ von 48? ⁷/₈ von 32? ꝛc.
4) Was kostet 1 Pfd., wenn 8 Pfd. 32 (48, 72) fl. kosten?
5) 8 Schnitter erhalten 7 Laibe Brod miteinander; wie theilen sie diese?

Wiederholung der bis jetzt behandelten Theile von dem Einmaleins.
Aufg. z. Zifferr. S. 72, Nr. 7—10.

Der neunte Zehner.

§. 58. Anschaulich und frei im Kopfe die einzelnen Zahlen von 80—90.
Nach §. §. 41, und 52.

§. 59. Mündlich und schriftlich die Aufgaben zum Zifferrechnen IX. Nr. 1—6.

§. 60. Messen und Theilen der Zahlen von 1—90 durch 9.

a.

1+9, 10+9, 19+9 . . . 73+9; 82—9, 73—9, 64—9 ꝛc.
2+9, 11+9, 20+9 . . . 74+9; 83—9, 74—9, 65—9 ꝛc.
3+9, 12+9, 21+9 . . . 75+9; 84—9, 75—9, 66—9 ꝛc.
u. s. w. u. s. w.

$$9 = 9;\ 1 \times 9 = 9$$
$$9 + 9 = 18;\ 2 \times 9 = 18$$
$$9 + 9 + 9 = 27;\ 3 \times 9 = 27$$
$$9 + 9 + 9 + 9 = 36;\ 4 \times 9 = 36$$

u. s. w.

1) Welche Zahlen bis 90 lassen sich aus 9 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das 3fache von 9? das 7fache von 9? ꝛc.
3) Das Wievielfache von 9 ist 18? 45? 81? 27? 72? ꝛc.
4) In einem Hause gehen jeden Tag 9 Pfd. Brod auf; wie viel in 2 Tg.? in 4 Tg.? in 7 Tg.? in 10 Tg.?

b.

1) Aus wie vielmal 9 besteht die Zahl 27? 72? 18? 81? ꝛc.
2) Wie oft ist 9 enthalten in 18? in 45? in 72? in 63? ꝛc.
" " " 9 " " 11? in 23? in 33? in 48? ꝛc.
3) In welcher Zahl ist 9 4mal? 7mal? 3mal? 10mal? ꝛc. enth.?
4) Für 9 kr. erhält man 1 Lesebuch; wie viel für 18 kr.; 45 kr.?

c.

1) Zerlegt in 9 gleiche Theile die Zahl 9! 18! 27! 45! 63! ꝛc.
2) Wie groß ist der 9te Theil von 18? von 36? von 9? ꝛc.
3) Sucht $^2/_9$ von 27! $^4/_9$ von 45! $^5/_9$ von 54! ꝛc.
4) Was kostet 1 Pfd., wenn 9 Pfd. 27 (45, 36) kr. kosten?

Wiederholung der bis jetzt gebildeten Theile von dem Einmaleins.
Aufg. z. Zifferr. S. 19. Nr. 7 bis 10.

Der zehnte Zehner.

§. 61. Anschaulich und frei im Kopfe die einzelnen Zahlen von 90—100.
Nach den §. §. 41, 42 und 52.

§. 62. Mündlich und schriftlich die Aufgaben zum Zifferrechnen X. Nr. 1—6.

§. 63 Messen und Theilen der Zahlen von 1—100 durch 10.

a.

1+10, 11+10, 21+10 . . . 81+10; 100—10, 90—10, 80—10 ꝛc.
2+10, 12+10, 22+10 . . . 82+10; 99—10, 89—10, 79—10 ꝛc
3+10, 13+10, 23+10 . . . 83+10; 98—10, 88—10, 78—10 ꝛc.
u. s. f. u. s. f.

$$10 = 10;\ 1 \times 10 = 10$$
$$10 + 10 = 20;\ 2 \times 10 = 20$$
$$10 + 10 + 10 = 30;\ 3 \times 10 = 30$$
$$10 + 10 + 10 + 10 = 40;\ 4 \times 10 = 40$$

u. s. w.

1) Welche Zahlen bis 100 lassen sich aus der 10 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das 5fache von 10? das 3fache von 10? ꝛc.
3) Wie viel Pfennige machen 3, 7, 5, 8, 10, 4 ꝛc. Zehnpfgstck.?
4) Wie viel Dezimeter sind 2, 5, 8, 3, 7, 4, 10 Meter?

b.

1) Aus wie vielmal 10 besteht 20? 50? 100? 80? ꝛc.
2) Wie oft ist 10 enthalten in 30? in 70? in 40? in 60?
 " " " 10 " " 13? in 41? in 77? in 66?
3) In welcher Zahl liegt 10 3mal? 5mal? 2mal? ꝛc.
4) Wie viel Mark machen 20? 50? 80? 100? 15? 24 Zehnpfgstck.?
5) Wie viel Meter sind 30, 70, 40, 100, 17, 35 ꝛc. Dezimeter?

c.

1) Zerlegt in 10 gleiche Theile die Zahl 10! 30! 60! 20? ꝛc.
2) Welches ist der 10. Theil von 20? von 50? von 30? ꝛc.
3) Wie viel betragen $^3/_{10}$ von 40? $^7/_{10}$ von 60? von 100? ꝛc.
4) Was verdient 1 Mann, wenn 10 Mann 30 (50, 80) Mrk. verdienen?
5) Zehn Mann theilen sich in 9 Laibe Brod; wie thun sie das?

Aufg. z. Zifferr. S. 31. Nr. 7—10.

Uebersicht und Wiederholung.

§. 64. Zuzählen und Abziehen der Grundzahlen.

Auf- und Abwärtszählen, bald einzeln, bald im Chor.

Mit 1.	1, 2, 3, 4, 5 . . . 100;	100, 99, 98, 97 ꝛc.
Mit 2.	1, 3, 5, 7, 9 . . . 99;	99, 97, 95, 93 ꝛc.
	2, 4, 6, 8, 10 . . . 100;	100, 98, 96, 94 ꝛc.
Mit 3.	1, 4, 7, 10, 13 . . . 100;	100, 97, 94, 91 ꝛc.
	2, 5, 8, 11, 14 . . . 98;	98, 95, 92, 89 ꝛc.
	3, 6, 9, 12, 15 . . . 99;	99, 96, 93, 90 ꝛc.

Eben so auch mit 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Anm. Ist bisher in unserem Sinne verfahren worden, so sind die Schüler im Zu- und Abzählen mit den Grundzahlen bereits so sicher und fertig, daß es überflüssig ist, mit jeder derselben alle möglichen Reihen zu durchlaufen, mit 4 also viermal hinauf und herunter zu zählen. Es genügt dann, wenn solches mit jeder Zahl nur ein- oder einigemal geschieht. Im entgegengesetzten Falle aber sind nicht nur alle möglichen Fälle zu erschöpfen, sondern es ist bei dieser Uebung überhaupt so lange zu verweilen, bis die erforderliche Sicherheit und Fertigkeit erworben ist.

Aufg. z. Kopfr. S. 39 bis 44.

§. 65. Das Zusammenzählen zweistelliger Zahlen.

50+30=? 50 = 5 Z., und 30 = 3 Z.; 5 Z. + 3 Z. = 8 Z. oder 80 Eimer; 50 + 30 = 80.

40+27=? a. 40 + 20 = 60, 60 + 7 = 67; 40 + 27 = 67.
b. 40=4 Z.; 27=2 Z. 7 E.; 4 Z. + 2 Z. 7 E. = 6 Z. 7 E. oder 67 E.; 40+27=67.

36+40=? a. 30+40=70, 70+6=76; 36+40=76.
b. 36 = 3 Z. 6 E., und 40 = 4 Z.; 3 Z. 6 E. und 4 Z. = 7 Z. 6 E. oder 76 E.; 36+40=76.

56+42=? a. 50+40=90, 6+2=8; 90+8=98.
b. 56 = 5 Z. 6 E.; 42 = 4 Z. 2 E.; 5 Z. + 4 Z. = 9 Z.; 6 E. + 2 E. = 8 E.; 9 Z. + 8 E. = 98 E. oder 98; 56+42=98.

48+36=? a. 40+30=70; 8+6=14; 70+14=84.
b. 48 = 4 Z. 8 E.; 36 = 3 Z. 6 E.; 4 Z. + 3 Z. = 7 Z.; 8 E. + 6 E. = 14 E. oder 1 Z. 4 E.; 7 Z. + 1 Z. 4 E. = 8 Z. 4 E. oder 84 E.; 48 + 36 = 84.

Wiederholtes Zuzählen der Zahlen von 11 bis 20.

Im Chor: 11 + 11 = 22, 22 + 11 = 33, 33 + 11 = 44 2c.
12 + 12 = 24, 24 + 12 = 36, 36 + 12 = 48 2c.
bis
20 + 20 = 40, 40 + 20 = 60, 60 + 20 = 80 2c.

Hiebei ist darauf zu achten, daß die Schüler nicht in den singenden Ton verfallen, sondern sich rasch und bestimmt ausdrücken.

Aufg. z. Zifferr. S. 33 Nr. 3—7. Mündlich und schriftlich.

§. 66. Das Abziehen zweistelliger Zahlen.

80—50=? 80 = 8 Z., und 50 = 5 Z.; 8 Z. — 5 Z. = 3 Z. oder 30 Einer; 80 — 50 = 30.

67—20=? 67 = 6 Z. 7 E., und 20 = 2 Z.; 6 Z. 7 E. — 2 Z. = 4 Z. 7 E. oder 47 Einer; 67 — 20 = 47.

85—43=? a. 85 — 40 = 45, und 45 — 3 = 42; 85 — 43 = 42.
b. 85 = 8 Z. 5 E., und 43 = 4 Z. 3 E.; 5 E. — 3 E. = 2 E., und 8 Z. — 4 Z. = 4 Z.; 4 Z. + 2 E. = 42 E. oder 42.

90—54=? a. 90 — 50 = 40, und 40 — 4 = 36; 90—54=36.
b. 90 = 9 Z., und 54 = 5 Z. 4 E.

Um die 4 E. abzuziehen, nehme ich 1 Z. von den 9 Z. und mache ihn zu 10 Einer; anstatt 9 Zehner habe ich jetzt 8 Z. und 10 E.

10 E. — 4 E. = 6 E., und 8 Z. — 5 Z. = 3 Z.; 3 Z. + 6 E. = 36; also ist 90 — 54 = 36.

74—28=? a. 74 — 20 = 54, und 54 — 8 = 46.
b. 74 = 7 Z. 4 E., und 28 = 2 Z. 8 E.

8 E. von 4 E. abzuziehen, geht nicht; ich nehme daher 1 Z. von den 7 Z. und mache ihn zu 10 E.; 10 E. + 4 E. = 14 E.

14 E. — 8 E. = 6 E., und 6 Z. — 2 Z. = 4 Z.; 4 Z. + 6 E. = 46; also ist 74 — 28 = 46.

Wiederholtes Abziehen der Zahlen von 11 bis 20.

In Chor: 100 — 11 = 89, 89 — 11 = 78, 78 — 11 = 67 rc.
100 — 12 = 88, 88 — 12 = 76, 76 — 12 = 64 rc.
u. s. w.

Aufg. z. Zifferr. S. 33. Nr. 8—12.
Mündlich und schriftlich.

§ 67. Das Vervielfachen.

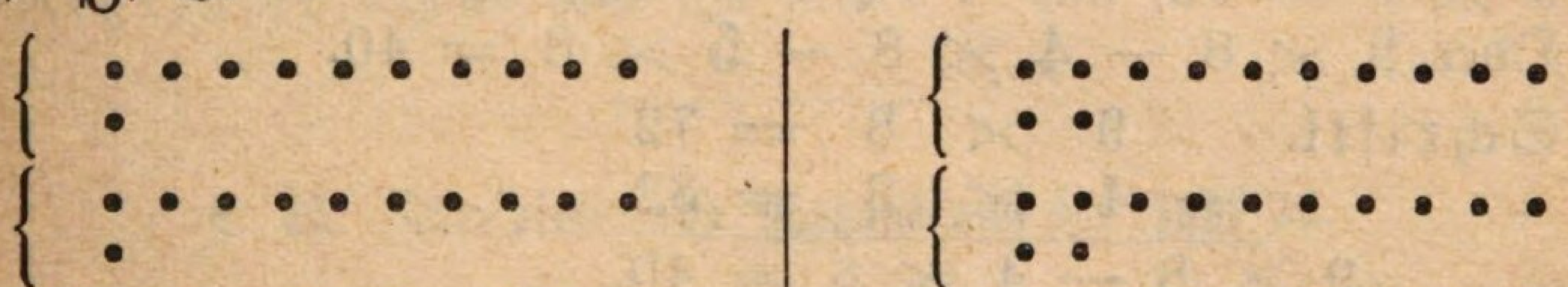
1. Das Einmaleins wird von den Schülern zusammengestellt, tüchtig wiederholt, und vom Lehrer in und außer der Reihenfolge abgefragt.

Aufg. z. Zifferr. S. 34 Nr. 1.

2. Vervielfachung der Grund- und zweistelligen Zahlen durch die Grundzahlen.

2×1	3×1	4×1	5×1	6×1	7×1	8×1	9×1
2×2	3×2	4×2	5×2	6×2	7×2	8×2	9×2
2×3	3×3	4×3	5×3	6×3	7×3	8×3	9×3
2×4	3×4	4×4	5×4	6×4	7×4	8×4	9×4
|	|	|	|	|	|	|	|
2×50;	3×33;	4×25;	5×20;	6×16;	7×14;	8×12;	9×11

Die Fälle bei vorstehender Uebung, wo einer der Faktoren eine zusammengesetzte Zahl ist, werden theilweise am Rechenbrette gerechnet. Z. B.



2×11=2×10+2×1
=20+2 oder 22.

2×12=2×10+2×2
=20+4 oder 24

und so weiter.

Aufg. z. Zifferr. S. 34. Nr. 2.

§. 68. Enthaltensein und Theilen.

1. Die sich ergebende Zahl geht nicht über 10 hinaus.

Mit 2. In welchen Zahlen von 1 bis 20 geht 2 auf?
Wie oft liegt 2 in 4? in 10? in 16? in 12? rc.
Wie heißt die Hälfte von 6? von 10? von 8?

Mit 3. In welchen Zahlen von 1—30 geht 3 auf?
Wie oft liegt 3 in 9? in 15? in 21? in 12? rc.
Wie heißt der dritte Theil von 12? 18? 9? rc.

Mit 4. In welchen Zahlen von 1—40 geht 4 auf?
Wie oft liegt 4 in 12? in 28? in 16? in 24? ꝛc.
Wie heißt der vierte Theil von 8? 20? 12? ꝛc.
So auch mit 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Aufg. z. Zifferr. S. 34, Nr. 3 u. 4.

2. Die sich ergebende Zahl ist größer als 10.
a. Wie oft ist 2 in 72 enthalten?
72 = 60 + 12; 2 ist in 60 30mal und in 12 6mal, in 72 also 30 + 6 oder 36mal enthalten.
b. Wie viel ist der dritte Theil von 84?
84 = 60 + 24; der dritte Theil von 60 = 20 und von 24 = 8; 20 + 8 = 28; der dritte Theil von 84 = 28.
Aufg. z. Zifferr. S. 35, Nr. 5 und 6
(Mündlich und schriftlich.)

§. 69. Die Operationen in Verbindung.

a. 48 + 3 × 7 =?
3 × 7 = 21; 48 + 21 = 69; also ist 48 + 3 × 7 = 69.
b. 75 — 7 × 8 =?
7 × 8 = 56; 75 — 50 = 25, und 25 — 6 = 19; also ꝛc.
c. 4 × 7 + 5 × 7 =?
4 × 7 = 28; und 5 × 7 = 35; 28 + 35 = 63; also ꝛc.
Oder: **4** × 7 + **5** × 7 = **9** × 7; 9 × 7 = 63.
Schriftl.
4 × 7 = 28
\+ 5 × 7 = 35
4 × 7 + 5 × 7 = 63
d. 9 × 8 — 4 × 8 =?
9 × 8 = 72, und 4 × 8 = 32; 72 — 32 = 40; also ꝛc.
Oder **9** × 8 — **4** × 8 — **5** × 8 = 40.
Schriftl.
9 × 8 = 72
— 4 × 8 = 32
9 × 8 — 4 × 8 = 40
e. 1/4 von 64 + 1/3 von 72 =?
1/4 von 64 = 16, und 1/3 von 72 = 24; 16 + 24 = 40; also ꝛc.
Schriftl.
1/4 v. 64 = 16
\+ 1/3 v. 72 = 24
1/4 v. 64 + 1/3 v. 72 = 40
f. 1/2 von 96 — 1/3 von 96 =?
1/2 von 96 = 48 und 1/3 von 96 = 32; 48—32=16; also ꝛc
Schriftl.
1/2 v. 96 = 48
— 1/3 v. 96 = 32
1/2 v. 96 — 1/3 v. 96 = 16
Aufg. z. Zifferr. S. 35, Nr. 7 u. 8.
Mündlich und schriftlich.

§. 70. Zerlegung sämmtlicher Zahlen von 2 bis 100 in gleiche Theile.

2=2×1	5=5×1	7=7×1	9=9×1
3=3×1	6=6×1	8=8×1	=3×3
4=4×1	=3×2	=4×2	10=5×2
=2×2	=2×3	=2×4	=2×5

Eben so mit allen folgenden Zahlen. Zuerst frei im Kopfe, wobei ein Schüler um den andern eine Zahl übernimmt, dann mit Ziffern.

Für Präparandenschulen.

§. 71. Vorbemerkung.

Ohne deutliche Zahlenbegriffe, ohne klares Auffassen der Zahlenverhältnisse, ohne Sicherheit in den Zahlenoperationen gibt es weder einen gewandten Rechner, noch einen guten Rechenlehrer. Der Schul-Präparand soll beides werden. Das zweckmäßigste Mittel, das hiezu als nothwendig Bezeichnete sich anzueignen, ist die durch das Normativ vorgeschriebene allseitige Behandlung der Zahlen von Eins bis Tausend. Es ist daher in der Präparandenschule wenigstens vom ersten Hundert jede Zahl mehr oder weniger ausführlich, im Ganzen aber erschöpfender als in der Volks- oder deutschen Schule zu behandeln. Der Präparand soll das Verhältniß einer Zahl nicht nur zu denjenigen kleineren Zahlen auffassen, von denen sie ein reines Vielfaches, sondern auch zu solchen, von denen sie ein gemischtes Vielfaches ist; deßgleichen soll er das Verhältniß nicht nur derjenigen kleineren Zahlen zu ihr bestimmen, welche einfache Theile, sondern auch derjenigen, welche mehrfache Theile von ihr sind.

---

§. 72. Beispielsweise Behandlung der Zahl 24.

a. Nach dem arithmetischen oder Unterschieds-Verhältniß.

1. Die Zahl 24 der Reihe nach in 23 + 1, 22 + 2, 21 + 3 ꝛc. zu zerlegen, ist für Präparanden zu leicht und nimmt zu viel Zeit in Anspruch. Besser ist es, der Lehrer nennt in vermischter Aufeinanderfolge einen Posten um den andern und läßt den fehlenden möglichst rasch von einem der Schüler angeben. Z. B. 24 ist 19 +? (24 ist 19 + 5) 13! (24 ist 13 + 11) 8! (24 ist 8 + 16) ꝛc.

2. Wie viel muß man zu 17 legen um 24 zu erhalten? (3+4 oder 7.) Wie viel zu 9? (1 + 14 oder 15.) ꝛc.

3. Wie viel ist 24 — 7? 24 — 19? 24 — 12? ꝛc.

4. Um wie viel ist 24 größer als 9? Um wie viel ist 16 kleiner als 24? Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 15 und 24? zwischen 24 und 11?

b. Nach dem geometrischen oder Theilverhältniß.

1. Die Zahl 24 und ihre Faktoren.

$24 = 12 \times 2$	$2 = {}^1/_{12} \times 24$
$= 8 \times 3$	$3 = {}^1/_8 \times 24$
$= 6 \times 4$	$4 = {}^1/_6 \times 24$
$= 4 \times 6$	$6 = {}^1/_4 \times 24$
$= 3 \times 8$	$8 = {}^1/_3 \times 24$
$= 2 \times 12$	$12 = {}^1/_2 \times 24$

Auf diese Uebung hat der Schüler sich vorzubereiten. Er muß das Vorstehende in ein Heft eingetragen haben und auf jede Frage darüber rasch und sicher antworten können. Z. B.

a. Das Wievielfache ist 24 von 8? von 4? von 12? ꝛc.
b. Welcher Theil von 24 ist 6? 2? 8? 3? ꝛc.
c. Wie heißen die einzelnen Faktoren von 24? (2, 3, 4, 6, 8, 12. Oder: 12, 8, 6, 4, 3, 2.)
d. Nenne die Faktorenpaare von 24? (2 u. 12, 3 u. 8, 4 u. 6.)
e. Wie viel beträgt $^3/_4$ ($^5/_6$, $^2/_3$, $^7/_8$) von 24?

2. Die Zahl 24 und die übrigen kleineren Zahlen.

a. Das Wievielfache ist 24 von 9? (24 ist 18 + 6; 18 ist 2×9, und 6 ist $^2/_3 \times 9$; 24 ist also $2^2/_3 \times 9$ oder das $2^2/_3$fache von 9.)
b. Was für ein (mehrfacher) Theil ist 9 von 24? (9 ist 3×3, und 24 ist 8×3; 3 ist $^1/_8$ von 24, 9 also $^3/_8$ von 24.)

Auf dieselbe Weise wie zwischen 24 und 9 wird das Verhältniß auch zwischen 24 und 16, 24 u. 18, 24 u. 20 ꝛc. und so überhaupt immer das Verhältniß zwischen der behandelten größeren Zahl und denjenigen kleineren Zahlen bestimmt, welche ein gemeinschaftliches Maß mit ihr haben.

Da 24 Bogen Schreibpapier = 1 Buch, die Zahl 24 also eine Reduktionszahl ist; so kann hier eine Uebung im Resolviren und Reduciren eintreten. Z. B.

$^7/_8$ Bch., wie viel Bogen? (1 Bch. = 24 Bg., $^1/_8$ Bch. = 3 Bg., $^7/_8$ Bch. = 7×3 oder 21 Bg.)

20 Bg. sind welche Theile vom Buch? (24 Bg. = 1 Bch., 4 Bg. = $^1/_6$ Bch., 20 oder 5×4 Bg. = $^5/_6$ Bch.)

Hie und da werden auch eine Aufgaben mit der angewandten Zahl gegeben, hier z. B.

Wie hoch kommen 24 Pfd., wenn 12 (8, 6, 4, 3, 2) Pfd. 8 Mrk. kosten? 24 Personen verdienen 20 Mrk., wie viel davon kommt auf 12 (8, 6, 4, 3, 2) derselben?

Gehen diese Uebungen frisch und rasch von Statten, was nach wenigen Unterrichtsstunden der Fall sein wird, und wird bei den Primzahlen vorzugsweise oder auch bloß das arithmetische und bei den Produktzahlen vorzugsweise das geometrische Verhältniß in Betracht gezogen; so können in jeder Stunde durchschnittlich 5 Zahlen, sämmtliche Zahlen von 1 bis 100 also in etwa 20 Stunden oder 5 Wochen behandelt

werden. Am Ende hat dann nur noch eine Additions- und Subtraktionsübung wie unter § 65 und § 66 stattzufinden.

Zu bemerken ist noch, daß nach jedem Zehner die bis dahin vorgenommenen Zerfällungen der Produktzahlen in ihre Faktoren zu wiederholen sind, und daß sich die Schüler darauf vorzubereiten haben.

§. 73. Von den Produkt- und Primzahlen.

Nimmt man die Eins, die absolute Einheit, wiederholt zu sich selbst, so entstehen die Zahlen in ihrer Reihenfolge. 1, 2 × 1 = 2, 3 × 1 = 3, 4 × 1 = 4 u. s. f.

Man kann aber auch jede andere Zahl als Einheit setzen und, indem man sie wiederholt zu sich nimmt, Vielfache von ihr bilden. Daher gibt es auch Zahlen, welche noch aus anderen Zahlen entstehen können, als aus Eins. Z. B. 4 und 6. Die Zahl 4 kann auch entstehen aus 2 × 2, und die Zahl 6 aus 3 × 2 und 2 × 3.

Diejenigen Zahlen, welche sich aus keiner andern Zahl erzeugen lassen, als aus Eins, heißen Primzahlen. Diejenigen Zahlen dagegen, welche auch durch Vervielfachung einer andern Zahl entstehen können, werden Produktzahlen genannt.

Die Zahl 5 läßt sich nur bilden, indem die Eins wiederholt zu sich genommen wird. Sie ist daher eine Primzahl. Die Zahl 6 hingegen, die nicht nur aus 6×1, sondern auch aus 3×2 und 2×3 entstehen kann, ist eine Produktzahl.

Jede Zahl (außer Eins) durch deren Vervielfachung eine andere gewisse Zahl entstehen kann, ist ein Faktor derselben. Die 2, 3mal genommen, gibt 6. Mithin ist 2 ein Faktor von 6. Da aber 3 × 2 = 2 × 3, und 6 also auch aus 2 × 3 entstehen kann, so ist nicht nur 2, sondern auch 3 ein Faktor von 6, woraus überhaupt folgt, daß jede Produktzahl wenigstens zwei Faktoren hat.

Zwei Faktoren einer Zahl, von denen der eine den andern bedingt, nennt man ein Faktorenpaar. Manche Produktzahlen haben nur ein Faktorenpaar, andere haben deren mehr. Die Zahl 6 hat nur das Faktorenpaar 2 × 3 oder 3 × 2; die Zahl 12 hat zwei, nämlich 2 × 6 und 3 × 4.

Eine Zahl, welche in einer andern ohne Rest enthalten ist, von derselben also mehrmal, ohne daß ein Rest bleibt, weggenommen oder weggemessen werden kann, nennt man das Maß derselben. Und eine Zahl, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile eine andere Zahl ohne Rest getheilt werden kann, nennt man den Theiler derselben.

3 ist in 15 5mal, und 5 ist in 15 3mal ohne Rest enthalten, 3 und 5, die Faktoren von 15, sind also auch die Maße von 15.

Zerlegt man 15 in 3 gleiche Theile, so kommt auf jeden Theil 5; zerlegt man 15 in 5 gleiche Theile, so kommt auf jeden Theil 3. Man mag also 15 in 3 oder in 5 gleiche Theile zerlegen, so entfällt auf den Theil eine ganze Zahl. 15 ist durch 3 und 5 theilbar.*)

3 und 5, die Faktoren von 15, sind also auch zugleich die Maße und Theiler von 15.

Die Faktoren von 12 sind 2, 3, 4, 6. Alle diese Zahlen sind daher auch in 12 ohne Rest enthalten, und 12 ist durch sie theilbar. Sie sind die Maße nnd Theiler von 12.

Hieraus geht zugleich hervor, daß in den Primzahlen keine andere Zahl (außer der Eins) aufgeht, und daß sie, da 1 nicht theilt, nur durch sich selbst theilbar sind.

Da aus einer Zahl durch ihre Vervielfachung eine ganze Reihe anderer Zahlen entstehen kann, so muß es auch Zahlenreihen und demnach auch Zahlenpaare geben, in denen eine und dieselbe Zahl ohne Rest enthalten ist, und die

*) Theilbar, im weiteren Sinne des Wortes, ist 15 durch jede Zahl. 15 durch 2 getheilt = $7\frac{1}{2}$, 15 durch 16 getheilt = $\frac{15}{16}$. Theilbar, im engern Sinne des Wortes, sind Zahlen nur dann, wenn die Theile weder Brüche, noch gemischte Zahlen, sondern ganze Zahlen sind. Und in diesem Sinne ist 15 außer durch sich selbst nur theilbar durch 3 und 5.

eben darum eine und dieselbe Zahl als Maß oder Theiler gemeinschaftlich haben.

Die Zahlen 4, 6, 8, 10 z. B. sind Vielfache von 2; 2 geht daher auch in allen diesen Zahlen auf. Mithin ist 2 das gemeinschaftliche Maß, der gemeinschaftliche Theiler derselben.

21 und 35 sind Produktzahlen von 7; 7 geht daher sowohl in 21 als in 35 auf; 21 und 35 haben 7 zum gemeinschaftlichen Maße oder Theiler.

Sehr häufig haben zwei oder mehrere gegebene Zahlen mehr als ein gemeinschaftliches Maß. In 8 und 12 geht nicht nur 2 auf, sondern auch 4; die Zahlen 8 und 12 haben also zwei gemeinschaftliche Maße oder Theiler. In 24, 36 und 60 sind 2, 3, 4, 6 und 12 ohne Rest enthalten. Hier gibt es also fünf gemeinschaftliche Theiler. Der größte davon ist 12.

Anm. Wie überaus wichtig es ist, das größte gemeinschaftliche Maß gegebener Zahlen schnell, wie mit einem Blick zu erkennen, wird sich später hundertmal zeigen. Hier nur ein Beispiel. 39 Meter kosten 28 Mrk., wie hoch kommen 52 Meter? Die Aufgabe sei im Kopfe zu rechnen. Kennt man die gemeinschaftlichen Maße von 39 und 52 nicht, so muß man zuerst berechnen, was 1 Mtr. kostet. Man muß also den 39. Theil von 28 Mrk. suchen und ihn dann 52mal nehmen. Wie schwierig! Wie leicht rechnet sichs dagegen, wenn man das größte gemeinschaftliche Maß von 39 und 52 kennt! Dasselbe ist 13. Man geht daher von 39 Meter auf 13 Meter und von 13 Meter auf 52 Meter. Also hat man in diesem Falle nur den 3. Theil von 28 Mrk. zu suchen und denselben 4mal zu nehmen.

Fragen und Aufgaben.

1) Was sind Primzahlen? 2) Wie heißen alle Primzahlen zwischen 1 und 100? 3) Was sind Produktzahlen? 4) Was sind Faktoren? 5) Was sind Faktorenpaare? 6) Was versteht man unter dem Maße oder Theiler einer Zahl? 7) Was heißt: eine Zahl ist durch 7 theilbar? 8) Durch welche Zahlen ist 36 theilbar? Durch welche 57? 75? 84? 96? 9) Was versteht man unter einem gemeinschaftlichen Maße oder Theiler? 10) Welche gemeinschaftliche Maße haben die Zahlen 48 und 72 und welches ist das größte? 11) Welches ist das größte gemeinschaftliche Maß von

9 u. 15?	25 u. 40?	38 u. 57?	51 u. 85?	64 u. 96?
12 u. 18?	26 u. 65?	39 u. 27?	52 u. 78?	65 u. 78?
14 u. 49?	27 u. 45?	40 u. 60?	54 u. 81?	66 u. 88?
15 u. 57?	28 u. 42?	42 u. 70?	55 u. 99?	68 u. 85?
16 u. 88?	30 u. 75?	44 u. 66?	56 u. 84?	69 u. 92?
18 u. 42?	32 u. 80?	45 u. 60?	57 u. 95?	70 u. 84?
20 u. 70?	33 u. 81?	46 u. 69?	58 u. 97?	72 u. 96?
21 u. 91?	34 u. 51?	48 u. 32?	60 u. 90?	75 u. 100?
22 u. 55?	35 u. 98?	49 u. 84?	62 u. 93?	84 u. 48?
24 u. 60?	36 u. 48?	50 u. 75?	63 u. 84?	90 u. 100?

12) Nenne drei Zahlenpaare, bei denen das gemeinschaftliche Maß 11 ist? 13) Ebenso drei Zahlenpaare mit dem gemeinschaftlichen Maße 12! 15! 16! 18! 20! 14) Nenne zwei Zahlen, bei denen das gemeinschaftliche Maß gleich dem zwischen ihnen stattfindenen Unterschiede ist! 15) Nenne zwei Zahlen, deren Unterschied 5mal so groß ist, als ihr gemeinschaftliches Maß! 16) Mit welchen Zahlen innerhalb des ersten Hunderts hat die Zahl 63 gemeinschaftliche Maße?

Zweiter Cursus.

Die Grundrechnungsarten in größeren Zahlen.

Erste Uebung.

Auffassen, Lesen und Schreiben der Zahlen.

I. Die Zahlen bis Tausend.

§ 74. Vorbemerkung.

Die Zahlen von 1 bis 100 sind bekannt. Aus ihnen sind die Zahlen von 100 bis 1000 zusammengesetzt. Ihre Veranschaulichung durch Striche, Kugeln ꝛc. fällt deshalb weg. Dafür ist nöthig, daß der Schüler veranlaßt werde, sie mit den allseitig angeschauten Zahlen von 1 bis 100 zu messen und die Menge ihrer Einheiten (Einer, Zehner und Hunderter) sich klar vorzustellen. Zu diesem Zwecke lassen wir zunächst von einem Hundert zum andern aufwärts zählen. Damit der Schüler aber nicht gedankenlos fortschreite, nicht Zahlennamen ohne Inhalt nenne, so fordern wir ihn öfters auf, inne zu halten, die Stufe, auf der er sich befindet, zu bestimmen und sowohl den schon zurückgelegten, als den noch vorliegenden Weg in's Auge zu fassen. Ist der Schüler auf diese Weise in den Zahlenraum bis Tausend eingeführt, so wird dann vorläufig nur noch die Uebung im Schreiben und Lesen, die Uebung im Messen mit dem Zehner und im Vergleichen (und das Zerlegen in Faktoren) vorgenommen.

---

§. 75. Auffassen der Zahlen bis Tausend.

Zuerst zählen wir zum ersten Hundert wieder alle Zahlen von 1 bis 100.

100, 101, 102, 103, 104, 105, 106 —

Halt! Bei welcher Zahl stehen wir jetzt? Woraus ist die Zahl 106 zusammengesetzt? (Aus 1 Hunderter und 6 Einern.) Zu welchem Hunderter gehören die 6 Einer? (Zum zweiten Hunderter.) Und zu welchem Zehner dieses Hunderts gehören sie? (Zum ersten Z.) Wie viele Einer fehlen noch am diesem ersten Zehner? (Noch 4.) Und wie viele Zehner fehlen noch am zweiten Hundert? (Noch 9.) Weiter!

107, 108, 109, 110, 111, 112, 113 —

Halt! 113 = 1 Hunderter, 1 Zehner und 3 Einer. Die 3 Einer gehören zum 2ten Zehner des 2ten Hunderts; es fehlen noch 7 Einer, bis der 2te Zehner voll ist, und noch 8 Zehner, bis das 2te Hundert voll ist.

Sind wir in dieser Weise bis 200 gekommen, so werden dann wieder alle Zahlen von 1 bis 100 zu 200 gezählt. So geht es fort, bis das Tausend voll ist. Dabei wird immer in jedem Hundert öfters Halt gemacht und, wie angegeben, verfahren. Bei der Zahl 357 heißt es: 357 = 3 Hunderter, 5 Zehner und 7 Einer. Die 7 Einer gehören zum 6ten Zehner des 4ten Hunderts; es fehlen noch 3 Einer, bis der 6te Zehner voll ist, und noch 4 Zehner, bis der 4te Hunderter voll ist.

Ist bis 1000 hinauf gezählt, dann zählen wir von da an wieder abwärts. Auch hiebei halten wir zuweilen inne und sehen zu, wie weit wir uns von 1000 bereits entfernt haben.

1000, 999, 998, 997 . . . . 963 —

Halt! Wie viel haben wir nun von 1000 abgezählt? (Von 1000 bis 970 sind 3 Zehner und von 970 bis 963 sind 7 Einer; also 3 Zehner und 7 Einer.) Weiter!

Bei der Zahl 742 heißt es: Von 1000 bis 800 sind 2 Hunderter, von 800 bis 750 sind 5 Zehner, und von 750 bis 742 sind 8 Einer; also 2 H. + 5 Z. + 8 E.

§. 76. Fortsetzung.

a. Wie heißt die Zahl, welche aus 4 Zehnern besteht? Welche Zahl besteht aus 3 Hundertern und 4 Zehnern? (340.)

Welche Zahl hat 5 Zehner und 8 Einer? Welche hat 7 Hunderter, 5 Zehner und 8 Einer? (758.)

Welche Zahl hat

2 H., 4 Z. u. 3 E.? 3 H., 1 Z. u. 9 E.? 5 H., 7 Z. u. 4 E.?
6 H., 9 Z. u. 5 E.? 8 H., 8 Z. u. 8 E.? 9 H., 3 Z. u. 6 E.?

b. Aus wie vielmal Einhundert besteht die Zahl 700? Aus wie vielmal Hundert und wie vielmal Zehn besteht die Zahl 740? (Aus 7 × 100 + 4 × 10.)

Wie vielmal 10 und wie vielmal 1 hat die Zahl 56? (56 = 5 × 10 + 6 × 1.) Wie vielmal 100 und wie vielmal 10 und wie vielmal 1 hat die Zahl 456? (456 = 4 × 100 + 5 × 10 + 6 × 1.)

Eben so: 347, 573, 758, 684, 392, 923, 876.

§. 77. Das Lesen der Zahlen.

	H.	Z.	E.	
	1	0	1	= 1 Hunderter, 0 Zehner, 1 Einer = 101.
	8	5	0	= 8 Hunderter, 5 Zehner, 0 Einer = 850.
	4	7	6	= 4 Hunderter, 7 Zehner, 6 Einer = 476.
				u. s. w.; zuletzt noch
1	0	0	0	= 10 Hunderter, 0 Zehner, 0 Einer = eintausend.

So zuerst, dann:

204 = 2 H., 0 Z., 4 E. = zweihundertundvier.
740 = 7 H., 4 Z., 0 E. = siebenhundertundvierzig.
583 = 5 H., 8 Z., 3 E. = fünfhundertdreiundachtzig.
u. s. w.

§. 78. Das Schreiben der Zahlen.

a. Innerhalb gezogener Linien.

	H.	Z.	E.
Der Lehrer diktirt: 3 H., 6 Z., 8 E. =	3	6	8
8 H., 0 Z., 3 E. =	8	0	3
2 H., 7 Z., 0 E. =	2	7	0
u. s. w.			
Einhundert und Eins = 1 H., 0 Z., 1 E. =	1	0	1
Zweihundert und zwanzig = 2 H., 2 Z., 0 E. =	2	2	0
Dreihundertfünf und vierzig = 3 H., 4 Z., 5 E. =	3	4	5
u. s. w.			

b. Frei, also ohne Hilfslinien.

Der Lehrer diktirt zuerst wieder: 2 H., 7 Z., 4 E.; 5 H., 0 Z., 3 E. rc., dann so: Dreihundertachtundzwanzig, neunhundertsiebenundachtzig rc. Dabei wird streng darauf gesehen, daß die Schüler die gleichnamigen Einheiten genau unter einander setzen, und das Zahlenschreiben so lange fortgesetzt, bis die nöthige Sicherheit darin gewonnen ist.

c. Hierauf werden diktirte Zahlen (wie oben mündlich) schriftlich aufgelöst.

234 = 2 × 100 + 3 × 10 + 4 × 1.
580 = 5 × 100 + 8 × 10 + 0 × 1 (kein Einer.)
307 = 3 × 100 + 0 × 10 + 7 × 1.
961 = 9 × 100 + 6 × 10 + 1 × 1.
u. s. w.

§. 79. Das Messen mit dem Zehner.

a. Das Messen der reinen Hunderter.

100 = 10 × 10; also ist
2 × 100 oder 200 = 2 × 10 × 10 oder 20 × 10,
3 × 100 oder 300 = 3 × 10 × 10 oder 30 × 10,
4 × 100 oder 400 = 4 × 10 × 10 oder 40 × 10,
u. s. w.

b. Das Messen der Hunderter mit Zehnern.

100 = 10 × 10; also ist
110 = 10 × 10 + 1 × 10 = 11 × 10,
120 = 10 × 10 + 2 × 10 = 12 × 10,
130 = 10 × 10 + 3 × 10 = 13 × 10 rc.
210 = 20 × 10 + 1 × 10 = 21 × 10,
250 = 20 × 10 + 5 × 10 = 25 × 10,
u. s. w.

c. Das Messen der Hunderter mit Zehnern und Einern.

100 = 10 × 10; also ist

101 = 10 × 10 + 1	345 = 34 × 10 + 5
104 = 10 × 10 + 4	896 = 89 × 10 + 6
207 = 20 × 10 + 7	534 = 53 × 10 + 4
702 = 70 × 10 + 2	663 = 66 × 10 + 3

u. s. w.

§. 80. Die mehrfache Leseweise einer Zahl.

200 = 2 × 100 = 2 Hunderter,
= 20 × 10 = 20 Zehner,
= 200 × 1 = 200 Einer.

340 = 3 × 100 + 4 × 10 = 3 Hunderter + 4 Zehner,
= 34 × 10 = 34 Zehner,
= 300 × 1 + 40 × 1 = 340 × 1 = 340 Einer.

578 = 5 × 100 + 7 × 10 + 8 × 1 = 5 H. + 7 Z. + 8 E.,
= 57 × 10 + 8 × 1 = 57 Zehner + 8 Einer,
= 500 × 1 + 70 × 1 + 8 × 1 = 578 × 1 = 578 E.

Dann kürzer:

485 = 4 Hunderter + 8 Zehner + 5 Einer,
= 48 Zehner + 5 Einer,
= 485 Einer.

Es ist dieß für die Folge wichtig und daher recht wohl zu üben.

§. 81. Vergleichen.

Wie viel muß ich zu 154 legen, um 200 zu erhalten?

Antw. Zu 154 lege ich 6, dann habe ich 160, und zu 160 lege ich noch 40, dann habe ich 200; 40 + 6 = 46.

Um wie viel ist die Zahl 1000 größer als 672?

Antw. Ich sehe zu, wie viel ich auf 672 legen muß, um 1000 zu erhalten. Zu 672 noch 8 gibt 680, und zu 680 noch 20 gibt 700; 8 + 20 = 28; zu 700 noch 300 gibt 1000; 28 + 300 = 328. Also ist die Zahl 1000 um 328 [grö]ßer als 672.

Aufgaben zum Kopfrechnen II. Heft. Vorübung Nr. 1—6.

§. 82. Das Zerlegen in Faktorenpaare.

In der Volksschule, wo man sich auf das Nothwendigste beschränken muß, kann dieser und vorläufig auch der folgende Paragraph übergangen werden. In Präparanden-Anstalten dagegen dürften beide unter allen Umständen durchzuarbeiten sein. Die Zöglinge erhalten hierdurch nicht nur eine Einsicht in das gegenseitige Verhältniß vieler Zahlen zwischen 1 und 1000, sondern sie werden zugleich auf Späteres entsprechend vorbereitet.

Beispiel: Wie heißen die Faktorenpaare von 120?

120 = 60 . 2 = 2 . 60
= 30 . 4 = 4 . 30
= 15 . 8 = 8 . 15

120 = 40 . 3 = 3 . 40
= 20 . 6 = 6 . 20
= 10 . 12 = 12 . 10
= 5 . 24 = 24 . 5

Hieran lassen sich nachstehende Fragen anknüpfen:

1. Wie oft liegt 8 in 120? Wie oft 24? 15? 60? 40? ꝛc.
2. Das Wievielfache ist 120 von 30? von 8? von 24? ꝛc.
3. Was für ein Theil von 120 ist 24? 60? 20? ꝛc.
4. Wie viel betragen $^3/_8$ ($^5/_6$, $^{14}/_{15}$, $^{23}/_{30}$ ꝛc.) von 120?
5. Wie heißt das größte gemeinschaftliche Maß von 120 und 80? von 120 und 90? von 120 und 72? von 120 und 100?

In ähnlicher Weise werden folgende Zahlen behandelt: 140, 150, 160, 180, 200, 240, 250, 270, 280, 300, 320, 360, 400, 450, 480, 500, 540, 560, 600, 630, 640, 700, 720, 750, 800, 840, 900, 960, 1000.

Das Geschäft des Zerfällens wird den Schülern überlassen. Der Lehrer überzeugt sich bloß, ob sie die Faktorenpaare alle aufgefunden, notirt und im Kopfe haben, und stellt nach vorbezeichneter Art Fragen.

§. 83. Das Zerlegen in Primfaktoren.

Prim- oder Grundfaktoren sind Zahlen, welche sich nicht weiter in Faktoren zerlegen lassen.

8 = 2 . 4	24 = 2 . 12	120 = 2 . 60
= 2 . 2 . 2	= 2 . 2 . 6	= 2 . 2 . 30
	= 2 . 2 . 2 . 3	= 2 . 2 . 2 . 15
		= 2 . 2 . 2 . 3 . 5

Kürzer:
120 = 2 . 2 . 2 . 3 . 5.

Der Schüler spricht: 120 = 2 . 60, und notirt den Grundfaktor 2; dann spricht er: 60 = 2 . 30, und notirt von diesen beiden Faktoren wieder nur den Grundfaktor 2; dann spricht er: 30 = 2 . 15, und notirt abermal nur 2; und zuletzt spricht er: 15 = 3 . 5, und setzt nun, da nicht nur die 3, sondern auch die 5 ein Grundfaktor ist, sowohl 3, als 5.

II. Die Zahlen über Tausend.

§. 84. Numeriren bis zur Million.

Numeriren heißt zählen, Zahlen lesen und Zahlen schreiben. Wir beginnen mit dem Aufbau nochmal bei den Einern und führen ihn fort bis zur Million. Der Lehrer wird von einer Stufe zur andern nicht eher übergehen, bis die Schüler im Lesen nnd Schreiben der Zahlen in dem bis dahin erweiterten Umfange sicher sind. Znr Erleichterung kann daher immer so verfahren werden, wie bei dem Lesen und Schreiben der Zahlen bis Tausend. (§§. 77 und 78.)

1) 1 × 1 = 1 Einer, geschrieben 1.
2 × 1 = 2 Einer, „ 2.
3 × 1 = 3 Einer, „ 3.
ꝛc.

2) 10 mal 1 Einer = 1 Zehner.

Ein Zehner ist 10mal so groß, als 1 Einer; daher kommt die Ziffer 1, wenn sie einen Zehner gelten soll, um eine Stelle mehr zur Linken, nämlich in die zweite Stelle.

1 Zehner, mit Ziffern geschrieben = 10.
10 × 2 Einer = 2 Zehner, geschrieben 20.
10 × 3 Einer = 3 Zehner, „ 30.
10 × 4 Einer = 4 Zehner, „ 40 ꝛc.
36 = 3 Zehner + 6 Einer, „ 36 ꝛc.

So viel Einer eine Ziffer an sich (oder in der ersten Selle) bedeutet, so viele Zehner bedeutet sie in der zweiten Stelle.

3) 10mal 1 Zehner = 1 Hunderter.

Ein Hunderter ist 10mal so groß, als 1 Zehner; darum wird derselbe auch um eine Stelle weiter links geschrieben, als 1 Zehner. Die Zehner stehen in der zweiten Stelle; die Hunderter kommen also in die dritte.

1 Hunderter, mit Ziffern geschrieben = 100.
10 × 2 Zehner = 2 Hunderter, geschrieben 200.
10 × 3 Zehner = 3 „ „ 300.
10 × 4 Zehner = 4 „ „ 400 ꝛc.
Vierhundert und acht = 4 H. und 8 E. = 408.
Achthundert und fünfzig = 8 H. und 5 Z. = 850.
3hundert fünfundachtzig = 3 H., 8 Z., 5 E. = 385 ꝛc.

So viele Einer eine Ziffer an sich bedeutet, so viel Hunderter bezeichnet sie an der dritten Stelle.

4) 10 × 1 Hunderter = 1 Tausender.

Ein Tausender ist wieder 10mal so groß, als 1 Hunderter; deßhalb wird ein Tausender wieder um eine Stelle weiter links geschrieben, als ein Hunderter. Die Hunderter stehen an der dritten Stelle; die Tausender kommen also in die vierte.

1 Tausender, mit Ziffern geschrieben = 1000.
10 × 2 Hunderter = 2 Tausender, geschrieben 2000.
10 × 3 Hunderter = 2 „ „ 3000.
10 × 4 Hunderter = 4 „ „ 4000.
ꝛc.

So viel Einer eine Ziffer an sich bedeutet, so viel Tausender bezeichnet sie an der vierten Stelle.

3tausend und 400 = 3 T., 4 H., 0 Z., 0 E. = 3400.
8tausend 470 = 8 T., 4 H., 7 Z., 0 E. = 8470.
5tausend 895 = 5 T., 8 H., 9 Z., 5 E. = 5895.
7tausend und 3 = 7 T., 0 H., 0 Z., 3 E. = 7004.
ꝛc.

5) 10 × 1 Tausender = 1 Zehntausender.

Ein Zehntausender ist das Zehnfache von einem Tausender. Die einfachen Tausender stehen in der vierten Stelle; die Zehntausender kommen also in die fünfte.

Ein Zehntausender mit Ziffern geschrieben = 10000.

10 × 2 Tausender = 2 Zehnt. (od. 20tausend) = 20000.

10 × 3 Tausender = 3 Zehnt. (od. 30tausend) = 30000. ꝛc.

So viele Einer eine Ziffer an sich bedeutet, so viele Zehntausender bezeichnet sie in der fünften Stelle.

26tausend	= 2 Zt., 6 T., 0 H., 0 Z., 0 E.	= 26000.
62tausend und 500	= 6 Zt., 2 T., 5 H., 0 Z., 0 E.	= 62500.
75tausend 820	= 7 Zt., 5 T., 8 H., 2 Z., 0 E.	= 75820.
57tausend 468	= 6 Zt., 7 T., 4 H., 6 Z., 8 E.	= 57468.

u. s. w.

In dieser Weise geht man von den Zehntausendern in die Hunderttausende und von den Hunderttausenden in die Millionen über.

§. 85. Fortsetzung.

In welcher Stelle stehen die Einer? die Hunderter? die Zehner? die einfachen Tausender? die Hunderttausender?

1 1 1 1 1 1 1

An die Wandtafel geschrieben.

Hier steht die Ziffer 1 siebenmal. Welche davon steht in der ersten Stelle? in der vierten Stelle? in der 2. Stelle? ꝛc.

Nun sagt mir, was jede 1 in der Ordnung von der rechten Hand gegen die linke bedeutet!

Die 1 in der ersten Stelle gilt 1 Einer. — Die 1 in der zweiten Stelle gilt 1 Zehner, also 10mal 1 Einer. — Die 1 in der dritten Stelle gilt 1 Hunderter, also 10mal 1 Zehner ꝛc.

Mithin gilt jede 1 um eine Stelle weiter links immer zehnmal so viel, als die 1, welche ihr zur Rechten steht.

So thue man noch mit einigen andern Ziffern.

Aus dem Bisherigen wird erkannt, daß jede Ziffer einen Werth an sich (einen absoluten Werth) und einen Stellenwerth hat.

Die Ziffer 5 bedeutet für sich allein stehend 5 Einer oder 5×1; in der zweiten (50) bedeutet sie 5 Zehner oder 50 × 1; in der dritten Stelle (500) gilt sie 5 Hunderter oder 50 Zehner oder 500×1 u. s. f.

Anm. Jetzt ist es an der Zeit, mit den Schülern ausführlich über den Unterschied zwischen Zahl und Ziffer zu sprechen. Die Ziffer ist das Zeichen für die Zahl, wie der Buchstabe das Zeichen ist für den Laut. Ziffer heißt so viel als Zahlzeichen. Die Zahl Acht besteht aus 8 × 1, die Ziffer 8 aus einer zweimal kreisartig gebogenen Linie. Wie man ein Wort mit größeren oder kleineren Buchstaben schreiben kann, ohne daß es dadurch ein anderes wird; so kann auch eine Zahl mit größeren oder kleineren Ziffern geschrieben werden, ohne daß sie sich verändert. Die Zahl Acht wird nicht weniger, wenn man sie mit einer kleineren Ziffer schreibt, und nicht mehr, wenn man sie durch eine größere bezeichnet. Sie besteht immer aus 8 × 1. Das gesprochene Wort „Fuß" besteht aus drei Lauten und eben darum das geschriebene aus drei Buchstaben. Für jeden Laut steht ein Buchstabe. Die drei Laute oder Buchstaben, miteinander verbunden, bilden ein Wort. Fast eben so verhält sich's mit den

Zahlen, z. B. mit der Zahl Zweihundert vierunddreißig. Sie besteht aus dreierlei Einheiten: aus Hundertern, Zehnern und Einern. Um sie zu schreiben, bedürfen wir daher auch drei Ziffern: die Ziffer 2 für die 2 H., die Ziffer 3 für die 3 Z. und die Ziffer 4 für die 4 E. Die 2 H., 3 Z. und 4 E. bilden, vereinigt, nur eine Zahl und ebenso bezeichnen auch die drei aneinander gereihten Ziffern 234 nur eine Zahl, die Zahl „Zweihundertvierunddreißig." Da ihre Bezeichnung aus drei Ziffern besteht und drei Stellen einnimmt, so heißt sie eine dreizifferige oder dreistellige Zahl.

Nun diktire man verschiedene Zahlen und lasse sie von einzelnen Schülern an die Wandtafel senkrecht untereinander schreiben, so lange, bis Alle sicher darin sind. Z. B.

	M.	Ht.	Zt.	T.	H.	Z.	E.
	VII.	VI.	V.	IV.	III.	II.	I.
4hundert und fünfzig = 4 H., 5 Z., 0 E.					4	5	0
3tausend 5hundert 79 = 3 T. 5 H., ꝛc.				3	5	7	9
35tausend 478			3	5	4	7	8
138tausend 594		1	3	8	5	9	4
3 Millionen 543 tausend 765	3	5	4	3	7	6	5

Zuletzt schreibe man selbst Zahlen an die Wandtafel und lasse sie lesen, z. B.

4567 = 4 Tausender, 5 Hunderter, 6 Zehner und 7 Einer;
= 4 × 1tausend, 5 × 1hundert, 6 × 10 und 7 × 1;
= 4tausend 5hundert siebenundsechzig.

73.048 = 7 Zehntausender, 3 Tausender, 0 Hunderter ꝛc.
= 7 × 10 oder 70tausend. + 3taus., zus. 73taus. und 48.

542.763 = 5 Hunderttausender, 4 Zehnt., 2 Tausender ꝛc.
= 5 × 100 oder 500tausend + 4 × 10 oder 40tausend + 2tausend = 542tausend 763.

3.875.216 = 3 Millionen 8 Hunderttaus., 7 Zehnt., 5 Taus. ꝛc.
= (3 × 1 Million oder) 3 Millionen, 875tausend 216.

Auch das Zahlenlesen muß so lange fortgesetzt werden, bis die erforderliche Fertigkeit darin erreicht ist. Zur Erleichterung mag man sich, wie hier oben, eine Zeit lang des Punktes bedienen.

Jede Zahl kann eigentlich auf so vielfache Weise ausgesprochen oder gelesen werden, als sie Stellen hat. Z. B.

37584 = 3 Zehnt., 7 T., 5 H., 8 Z. und 4 E.
= 37 Tausender 5 H., 8 Z. und 4 E.
= 375 Hunderter, 8 Z. und 4 Einer.
= 3758 Zehner und 4 Einer.
= 37584 Einer oder 37584.

Dieß ist in Präparandenschulen schon jetzt, in der Volksschule wenigstens später bei Gelegenheit zu üben.

---

§. 86. Billionen und Trillionen ꝛc.

Obgleich diese Zahlengrößen im Leben niemals wirklich vorkommen, sondern höchstens hie und da einmal genannt werden; so wollen wir den Zehnerbau bis zu denselben, der Vollständigkeit wegen, hier fortführen.

10 Einermillionen = 1 Zehnermillion,
10 Zehnermillionen = 1 Hundertermillion,
10 Hundertermillionen = 1 Tausendermillion,
10 Tausendermillionen = 1 Zehntausendermillion,
10 Zehntausendermillionen = 1 Hunderttausendermillion,
10 Hunderttausendermillionen = 1 Billion.

Da die Einermillionen in der 7. Stelle stehen, so nehmen die Zehnermillionen die 8., die Hundertermillionen die 9. rc., die einfachen Billionen also die 13. Stelle ein.

Zur Erleichterung im Lesen und Schreiben dient die Abtheilung der Ziffern in Gruppen von drei zu drei, und zwar in folgender Art:

3″725.491′860.578 =
3 Billionen 725tausend 491 Millionen 860tausend 578.

In gleicher Weise, wie aus den Millionen die Billion, wird aus den Billionen die Trillion und aus den Trillionen die Quatrillion aufgebaut. Die Zahl

5‴371.468″925.376′529.874

heißt: 5 Trillionen, 371tausend 468 Billionen, 925tausend 376 Millionen, 529tausend 874.

Welch eine große Zahl schon eine Billion ist, läßt sich daraus abnehmen, daß 1 Billion Weizenkörner etwa 145000 bayr. Scheffel oder 322418 Hektoliter gibt. Würde Jemand täglich 18 Stunden lang und in jeder Sekunde 5 Körner zählen, so hätte er etwa 8450 Jahre lang damit zu thun.

---

§. 87. Die römischen Ziffern.

Die Form und Bedeutung der gewöhnlichen römischen Zahlzeichen oder Ziffern ist folgende:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Einen Stellenwerth haben diese Ziffern nicht; sondern so oft die Ziffer I neben einander steht, so oft bedeutet sie Eins; so oft die Ziffer X neben einander steht, so oft bedeutet sie Zehn u. s. w.

II = 1 + 1 oder 2. CC = 100 + 100 oder 200.
III = 1 + 1 + 1 oder 3. CCC = 3 × 100 oder 300.
XX = 10 + 10 oder 20. MM = 1000 + 1000 oder 2000.
XXX = 3 × 10 oder 30. MMM = 3 × 1000 oder 3000.

Steht eine geringere Ziffer vor einer größeren, so wird sie davon abgezogen.

IV = 5 — 1 oder 4. XC = 100 — 10 oder 90.
IX = 10 — 1 oder 9. VD = 500 — 5 oder 495.
VL = 50 — 5 oder 45. CM = 1000 — 100 oder 900.

Steht aber die geringere Ziffer nach der größeren, so wird sie dazu gezählt.

VI = 5 + 1 oder 6. CX = 100 + 10 od. 110.
XI = 10 + 1 „ 11. DV = 500 + 5 „ 505.
LV = 50 + 5 „ 55. MC = 1000 + 100 „ 1100.

Einige Beispiele zur Uebung.

VI = 6	XV = 15
IV = 4	XVI = 16
VIIII = 9	XIV = 14
IX = 9	XXIV = 24
XXXI = 31	CXXV = 125
XXIX = 29	CCCXXXVII = 337
XXXVIII = 38	DLXVIII = 568
LXXXVIIII = 89	DCCCXIIII = 814

MDCCCLXXIV = 1874.

§. 88. Vorbemerkung zu den Grundrechnungsarten.

Betrachten wir irgend eine Rechenaufgabe, wie das Leben sie uns bietet, so ergibt sich, daß in allen Fällen eine Zahl zu suchen ist, die entweder mehr, oder weniger beträgt, als eine gewisse gegebene Zahl. Diese ist daher, um die zu suchende Zahl zu erhalten, in entsprechender Weise zu vermehren oder zu vermindern. Das Vermehren, sowie das Vermindern einer Zahl kann aber auf zweierlei Weise geschehen.

Man kann eine Zahl um verschiedene andere Zahlen, oder wiederholt um sich selbst vermehren.

a. 7 + 5 = 12; 5 + 4 + 3 = 12. (Zusammenzählen.)
b. 4 + 4 + 4 = 12; 3 × 4 = 12. (Vervielfachen.)

Man kann eine Zahl um verschiedene, oder immer nur um gleiche Theile von ihr vermindern.

a. 12 — 5 = 7; 12 — 5 — 4 = 3. (Abziehen.)
b. 12 — 4 — 4 — 4 = 0; 12 = 3 × 4. (Theilen.)
(Da 12 = 3 × 4, so ist 4 in 12 3mal enthalten, und $\frac{1}{3}$ von 12 = 4.)

So entwickeln sich diejenigen Hauptoperationen, welche allem Rechnen zu Grunde liegen und deßhalb die 4 Grundrechnungsarten oder Species heißen, nämlich das Zusammenzählen oder Addiren und die davon abgeleitete kürzere Weise: das Vervielfachen oder Multipliciren, das Abziehen oder Subtrahiren und die davon abgeleitete kürzere Weise: das Theilen oder Dividiren.

Nach dem Grade ihrer Schwierigkeit und nach altherkömmlicher Weise werden sie in folgender Ordnung behandelt: Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren.

Bei jeder Grundrechnungsart findet sowohl ein besonderes Kopf-, als Zifferrechnen statt. Ueber das Verhältniß des Einen zum Andern haben wir uns bereits (§. 85) ausgesprochen. Nur über das Verfahren sei hier im Allgemeinen noch Folgendes bemerkt.

Die Veranschaulichung tritt nur im Nothfalle ein.

Beim Kopfrechnen werden die schwierigen Aufgaben anfangs an die Wandtafel notirt und erst dann, wenn es so geht, frei im Kopfe gerechnet.

Beim Zifferrechnen ist es nothwendig, einzelne Schüler und zwar nicht nur von den mehr-, sondern auch von den minderbegabten so lange an der Wandtafel laut vorrechnen zu lassen, bis man überzeugt sein darf, daß jeder derselben die Sache verstehe und selbstständig darin arbeiten könne. Dieß ist das beste, ja das einzige Mittel, das leidige Voneinander-Absehen aus der Schule entfernt zu halten, und eben darum von großer Wichtigkeit. Denn die Gewohnheit des Absehens ist ein arger Krebsschaden und hauptsächlich da zu Hause, wo der Lehrer, sobald nur einige der bessern Schüler seiner Forderung entsprechen, die weitere Uebung den Schülern allein überläßt, oder mit ihnen zu einer höheren Stufe übergeht. Sowohl jetzt als später, wenn dieselbe Operation beim Rechnen mit der benannten und angewandten Zahl sich wiederholt, sind es dann immer nur Einzelne, welche das Verlangte wirklich leisten; die Mehrzahl sucht sich durch Abschreiben zu helfen. In der Schule geht's; wie aber im Leben? Der andern Nachtheile in geistiger und sittlicher Hinsicht gar nicht zu gedenken.

Zweite Uebung.

Addiren oder Zusammenzählen.

A. Mündlich.

§. 89. Zahlen mit einer geltenden Stelle.

a. Ohne Uebergang in höhere Ordnungen.

Mit 3 + 2.

3 Einer + 2 Einer =? 3 E. + 2 E. = 5 Einer.
3 Zehner + 2 Z. =? 3 Z. + 2 Z. = 5 Z. oder 50 Einer.
3 Hunderter + 2 H. =? 3 H. + 2 H. = 5 H. oder 500 Einer.
3 Tausender + 2 T. =? 3 T. + 2 T. = 5 T. oder 5000 Einer.
3 Zehntaus. + 2 Zt. =? 3 Zt. + 2 Zt. = 5 Zt. oder 50.000 E.
3 Hunderttaus. + 2 Ht. =? 3 Ht. + 2 Ht. = 5 Ht. od. 500.000 E.
3 Mill. + 2 Mill. =? 3 Mill. + 2 Mill. = 5 Millionen.

Ebenso mit 2 + 4   3 + 5
4 + 3   5 + 4

Der Lehrer nennt die Zahlen 2+4, und die Schüler fahren fort
2 E. + 4 E. = 6 Einer.
2 Z. + 4 Z. = 6 Zehner oder 60 E.
u. s. w.

Das Sprechen, nämlich das Sprechen im Zusammenhange von Seite der Schüler muß immer mehr vorherrschen. Andererseits sehe man darauf, daß es nicht in eine Vielwortmacherei ausarte. Alles, was gesprochen wird, muß in Bezug auf die Sache erschöpfend, in Bezug auf die Darstellung wohlgeordnet, möglichst kurz und präcis sein. Wo fünf Worte oder Wörter ausreichen, sollen nicht sechs gebraucht werden.

b. Mit Uebergang in höhere Ordnungen.

8 + 5.

8 E. + 5 E. = 13 E. = 1 Z. + 3 E. oder 13 Einer.
8 Z. + 5 Z. = 13 Z. = 1 H. + 3 Z. oder 130 Einer.
8 H. + 5 H. = 13 H. = 1 T. + 3 H. oder 1300 Einer.
8 T. + 5 T. = 13 T. = 1 Zt. + 3 T. = 13.000 Einer.
8 Zt. + 5 Zt. = 13 Zt. = 1 Ht. + 3 Zt. = 130.000 Einer.
8 Ht. + 5 Ht. = 13 Ht. = 1 Mill. + 3 Ht. = 1'300.000 E.
8 Mill. + 5 Mill. = 13 Millionen.

Eben so mit

5 + 6	7 + 8	6 + 7 + 8	7 + 8 + 7 + 8
6 + 7	8 + 9	7 + 8 + 9	8 + 9 + 8 + 9

---

§. 90. Zahlen mit mehr als einer geltenden Stelle.

90 + 75 =?

a. 90 + 75 = 90 + 70 + 5; 90 + 70 = 160, 160 + 5 = 165; also ist 90 + 75 = 165. — Oder: 90 + 75 = 90 + 10 + 65 = 165.

b. 90 = 9 Z.; 75 = 7 Z. + 5 E.; 9 Z. + 7 Z. + 5 E. = 16 Z. + 5 E. = 1 H. + 6 Z. + 5 E. oder 165 E.; also ist 90 + 75 = 165.

75 + 48 =?

a. 75 = 70 + 5; 48 = 40 + 8; 70 + 40 = 110; 5 + 8 = 13; 110 + 13 = 123.

b. 75 = 7 Z. + 5 E.; 48 = 4 Z. + 8 E.; 7 Z. + 4 Z. = 11 Z.; 5 E. + 8 E. = 13 E. oder 1 Z. + 3 E.; 11 Z. + 1 Z. 3 E. = 12 Z. 3 E. oder 123 E.; also ist 75 + 48 = 123.

c. 75 + 48 = 75 + 5 + 43 = 80 + 43 = 123.

364 + 87 =?

a. 360 + 80 = 440; 4 + 7 = 11; 440 + 11 = 451; 364 + 87 = 451.

b. 364 = 3 H. 6 Z. und 4 E.; 87 = 8 Z. + 7 E.
3 H. 6 Z. + 8 Z. = 3 H. + 14 Z. oder 4 H. + 4 Z.;
4 E. + 7 E. = 11 E. oder 1 Z. + 1 E.
4 H. 4 Z. + 1 Z. 1 E. = 4 H. 5 Z. und 1 E. oder 451 E.
Also ist 364 + 87 = 451.

350 + 470 =?

a. 300 + 400 = 700; 50 + 70 = 120; 700 + 120 = 820.

b. 350 = 3 H. + 5 Z.; 470 = 4 H. + 7 Z.; 3 H. + 4 H. = 7 H.; 5 Z. + 7 Z. = 12 Z. oder 1 H. + 2 Z.; 7 H. + 1 H. 2 Z. = 8 H. + 2 Z. oder 820 E.; also ist 350 + 470 = 820.

c. 350 + 470 = 35 Z. + 47 Z. (= 40 + 42) oder 82 Z. = 820.

476 + 358 =? (An die Wandtafel notirt.)

a. 476 = 400 + 70 + 6; 358 = 300 + 50 + 8.
400 + 300 = 700.
70 + 50 = 120; 700 + 120 = 820.
6 + 8 = 14; 820 + 14 = 834.

b. 476 = 47 Z. 6 E., und 358 = 35 Z. 8 E.;
47 Z. + 35 Z. (oder 50 + 32) = 82 Z. = 820.
6 E. + 8 E. = 14 Einer.
820 + 14 = 834.

c. 476 = 4 H. + 7 Z. + 6 E.; 358 = 3 H. + 5 Z. + 8 E.
4 H. + 3 H. = 7 H.
7 Z. + 5 Z. = 12 Z. oder 1 H. + 2 Z.; 7 H. + 1 H. + 2 Z. = 8 H. + 2 Z.
6 E. + 8 E. = 14 E. oder 1 Z. 4 E.; 8 H. 2 Z. + 1 Z. 4 E. = 8 H. 3 Z. + 4 E. oder 834 E.

Die Ausrechnungsweise unter c ist die weitläufigere. Sie fördert aber ganz vorzüglich die Aufmerksamkeit und das Sprechvermögen der Schüler und bereitet besonders auf das Zifferrechnen vor.

Aufg. z. Kopfr. II. Heft. 1., 2. und 3. Uebung.

B. Schriftlich.

§ 91. Ohne Uebergang in höhere Ordnungen.

Beispiel 1. 30 + 20 + 40 = ?

Um die Zahlen leichter überblicken und zusammenzählen zu können, so setzen wir sie in gerader Linie untereinander. Dann machen wir einen kleinen wagrechten Strich.

30	a. 40 + 20 = 60, 60 + 30 = 90.
20	b. 40 = 4 Z. + 0 E., 20 = 2 Z. + 0 E., 30 = 3 Z. + 0 E.;
40	0 + 0 + 0 E. = 0 E.; 4 Z. + 2 Z. = 6 Z. + 3 = 9 Z.;
90	9 Z. + 0 E. = 90 E.; 40 + 20 + 30 = 90.

Wir haben nun die Zahlen zusammengezählt. Wir haben sie addirt. Denn zusammenzählen heißt addiren, und addiren heißt zusammenzählen; wir haben also addirt oder zusammengezählt. — Die Zahlen, welche man addirt oder zusammenzählt, nennt man Posten. Aus wie viel Posten besteht unsere Rechnung? Wir heißt der erste Posten, von oben nach unten gezählt? Wie der zweite rc. Wie viel machen die drei Posten zusammen? (90.) Das ist die Summe. Was ist mehr: 30 + 20 + 40, oder 90? Die Summe ist nur eine Zahl und diese eine Zahl ist genau so groß, wie die addirten Zahlen miteinander. Durch das Addiren oder Zusammenzählen wird also eine Zahl gefunden, die allein so viel beträgt, als zwei oder mehrere Zahlen zusammengenommen.

Beispiel 2. 21 + 34 + 43 = ?

Ausrechnung.

a.	21	21 = 20 + 1 = 2 Z. + 1 E.	b. 21
	34	34 = 30 + 4 = 3 Z. + 4 E.	34
	43	43 = 40 + 3 = 4 Z. + 3 E.	43
	90		98
	+ 8		
	98		

a. Wie rechnen wir diese Aufgabe frei im Kopfe?
40 + 30 = 70, + 20 = 90; 3 + 4 = 7, + 1 = 8; 90 + 8 = 98.

b. Auf der Tafel addirt man zuerst die Einer.
3 E. + 4 E. = 7 E., + 1 E. = 8 E.; diese 8 Einer schreiben wir sogleich unter die Einer, in die erste Stelle.
4 Z. + 3 Z. = 7 Z., + 2 Z. = 9 Z.; die 9 Zehner schreiben wir unter die Zehner, in die zweite Stelle.
9 Zehner + 8 Einer = 98 Einer; 21 + 34 + 43 = 98.

Es leuchtet ein, daß die erste Additionsweise auf das gewöhnliche (abgekürzte) Verfahren zweckmäßig vorbereitet, das richtige Verständniß desselben vermittelt und die sichere Ueberzeugung gewinnen läßt, daß die Partialsummen zusammen genommen wirklich die Summe aller einzelnen Posten bilden. Man wende sie daher recht häufig an.

Besondere Sorgfalt ist darauf zu verwenden, daß die einzelnen Posten in ihren Stellen völlig richtig, d. i. genau senkrecht so unter einander gesetzt werden, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner rc. zu stehen kommen. Auch halte man die Schüler dazu an, daß sie zur Probe für die Richtigkeit die Posten einmal von unten nach oben und einmal von oben nach unten addiren, und diktire ihnen von Zeit zu Zeit eine Aufgabe.

§. 92. Mit Uebergang in höhere Ordnungen.

Beispiel 1. 46 + 8 + 9 = ?

Ausrechnung.

46	46 + 8 + 9 = 4 Z. + 6 E. + 8 E. + 9 Einer.
8	9 E. + 8 E. = 17 E., + 6 E. = 23 E. oder 2 Z. +
9	3 Einer; die 3 E. schreiben wir unter die Einer, in die erste
63	Stelle; die 2 Z. aber zählen wir zu den 4 Zehnern. 2 Z. + 4 Z. = 6 Z.

Also ist 40 + 6 + 8 + 9 oder 46 + 8 + 9 = 6 Z. + 3 E. = 63.

Beispiel 2. 327 + 468 + 579 = ?

Ausrechnung.

a.			b.
	327	(= 300 + 20 + 7)	327
	468	(= 400 + 60 + 8)	468
	579	(= 500 + 70 + 9)	579
	1200		1374
	150		
	24		
	1374		

a. Wie frei im Kopfe: 500 + 400 = 900, + 300 = 1200; 70 + 60 = 130, + 20 = 150; 9 + 8 = 17, + 7 = 24; 1200 + 150 + 24 = 1374.

b. Nach dem gewöhnlichen Verfahren:

9 E. + 8 E. = 17 E., + 7 E. = 24 E. oder **4** E. (notirt) und 2 Zehner; die 2 Zehner zähle ich sogleich zu den Zehnern.

2 Z. + 7 Z. = 9 Z., + 6 Z. = 15 Z., + 2 Z. = 17 Z. oder **7** Z. (notirt) und 1 Hunderter; den Hunderter zähle ich zu den Hundertern in der dritten Reihe.

1 H. + 5 H. = 6 H., + 4 H. = 10 H., + 3 H. = 13 H. oder 3 H. + 1 T.; die **3** Hunderter schreibe ich unter die Hunderter, und den **1** Tausender setze ich um eine Stelle vor, in die 4. Stelle.

1 T. + 3 H. + 7 Z. + 4 E. = 1374 E.; 327 + 468 + 579 = 1374.

Wenn der Schüler über die Operation klar und geläufig sich aussprechen kann, so wird zum Schnellrechnen übergegangen, wobei die Benennungen, welche den Stellenwerth der Ziffern bezeichnen, als: Einer Zehner, Hunderter 2c. weggelassen werden.

9 + 8 ist 17, und 7 ist 24; 2 im Sinn; 2 + 7 in 9, und 6 ist 15, und 2 ist 17; 1 im Sinn; 1 + 5 ist 6, und 4 ist 10, und 3 ist 13. Summe 1374.

Aufg. z. Zifferr. II. Heft, 1., 2. und 3. Uebung.

Anm. Man könnte fragen: Warum denn nicht sogleich das Verfahren, das beim Schnellrechnen eingehalten wird? Warum zuerst so ausführlich und umständlich? Die Antwort ist: Weil der Schüler beim Rechenunterichte alles, was er thut, verstehen und überall den Grund des Verfahrens erkennen soll; weil nur das klare Verständniß der einzelnen Operationen Einsicht in ihren Zusammenhang gibt, vor auffallenden Irrungen schützt und die Anwendung erleichtert; weil gerade in der einsichtlichen Behandlung dieses Lehrgegenstandes das Bildende desselben liegt, und weil der Schüler nur unter diesen Umständen Interesse an der Sache gewinnt.

§. 93. Ueber die Behandlung der angewandten Aufgaben.

Den angewandten Aufgaben, welche sich auch in unsern Aufgaben zum Kopf- und Zifferrechnen den einzelnen Uebungen in den Grundrechnungsarten anschließen, wird bei weitem nicht die rechte Aufmerksamkeit zu Theil. Nicht selten werden dieselben völlig übergangen, oder es werden, was nicht viel besser ist, die Schüler einfach angeleitet, mit den darin vorkommenden Zahlen ohne Weiteres eben auch wie mit den (unbenannten) Zahlen der vorhergehenden Aufgaben zu verfahren. Durch die angewandten Aufgaben soll aber der Schüler befähigt werden, die gelernte Operation auf Fälle aus dem Leben anzuwenden und dieß mit Verstand und Einsicht zu thun. Wer dieselben also übergeht, der faßt ihren praktischen Zweck und die formal bildende Kraft des Rechenunterrichts überhaupt nicht in's Auge, und wer sie leichthin behandelt, der unterrichtet ohne Erfolg. Denn um den rechten Erfolg zu erzielen, so müssen die Aufgaben dieser Art zunächst besprochen und zwar so besprochen werden, daß der Schüler sich des Grundes klar und deutlich bewußt werde, warum mit den gegebenen Zahlen gerade diese Operation und keine andere vorzunehmen sei, um die verlangte Antwort zu erhalten. Wie solches mit den angewandten Additionsaufgaben geschehen könne, sollen nachfolgende Beispiele zeigen.

§. 94. Verfahren.

A. Mündlich.

Beispiel 1. Der Centner Hopfen wurde um 145 Mrk. gekauft; dann schlug derselbe um 25 Mrk. auf; wie viel kostete er nun?

Auflösung. Wie theuer wurde der Ctr. Hopfen zuerst gekauft? Um wie viel schlug derselbe nachher auf? Wenn sagt man von einer Sache, daß sie aufgeschlagen habe? Wenn, daß sie abgeschlagen habe? Was heißt also: der Ctr. Hopfen schlug um 25 Mrk. auf? Wie viel kostete derselbe, ehe er aufschlug? Wie viel also, nachdem er um 25 Mrk. aufgeschlagen hatte? (145 Mrk. + 25 Mrk. = 170 Mrk.)

Beispiel 2. A kauft eine Wiese; 840 Mrk. bezahlt er sogleich dafür und 175 Mrk. bleibt er schuldig; wie theuer hat er die Wiese gekauft?

Aufl. Was sagt uns die Aufgabe von dem Manne, der hier (der Kürze wegen) A genannt wird? Was sollen wir suchen? Wie viel hat A sogleich bezahlt? Wie viel mußte er später noch bezahlen? Wie viel hat er alsdann für die Wiese im Ganzen bezahlt? (840 Mrk. + 175 Mrk.) Was muß man daher mit den beiden Zahlen thun, um zu finden, wie theuer A die Wiese gekauft hat? Ausr. 840 Mrk. + 175 Mrk. = 1015 Mrk.

Beispiel 3. Von einem Ballen Tuch wurden 36 Mtr. abgeschnitten und 48 Mtr. blieben übrig; wie groß war derselbe?

Aufl. Wie viel wurde von dem Ballen Tuch abgeschnitten? Um wie viel wurde derselbe dadurch kleiner? Und wie viel Meter betrug er alsdann noch? Was müßte man thun, damit der Ballen wieder so groß würde, wie zuvor? Und wie groß würde er dann sein? (48 + 36 Mtr. groß.) Wie findet man also, wie groß der Ballen Tuch anfangs gewesen ist?

Ausr. 48 Mtr. + 36 Mtr. = 84 Mtr.; also war der Ballen 2c.

B. Schriftlich.

Aufg. Die Ausgaben einer Gemeinde betragen für die Erbauung eines neuen Schulhauses 10764 Mrk., für Herstellung einer Brücke 475 Mrk., für Anschaffung einer Feuerlöschmaschine 1236 Mrk. und für verschiedene andere Bedürfnisse 850 Mrk.; wie viel im Ganzen?

Aufl. Wie viel muß die Gemeinde für ihr neues Schulhaus bezahlen? Wie viel für das Schulhaus und die Brücke? (10764 Mrk. + 475 Mrk.) Wie viel für das Schulhaus, für die Brücke, für die Löschmaschine und Anderes zusammen? (10764+475+1236+850 Mk.)

Ausr. 10764 Mrk.
475 "
1236 "
850 "
13325 Mrk.

Dritte Uebung.

Subtrahiren.

§. 95. Das Verfahren.

A. Mündlich.

1. Zahlen mit einer geltenden Stelle.

Mit 5—2.

5 E. — 2 E. = 3 E.; 5 — 2 = 3.
5 Z. — 2 Z. = 3 Z. oder 30 E.; 50 — 20 = 30.
5 H. — 2 H. = 3 H. oder 300 E.; 500 — 200 = 300.
5 T. — 2 T. = 3 T. oder 3000 E.; 5000 — 2000 = 3000
5 Zt. — 2 Zt. = 3 Zt. oder 30.000 Einer.
5 Ht. — 2 Ht. = 3 Ht. oder 300.000 Einer.
5 Mill. — 2 Mill. = 3 Millionen.

Eben so mit 6 — 4, 7 — 3, 8 — 4, 9 — 7.

2. Zahlen mit mehr als einer geltenden Stelle.

Wir behandeln sogleich eine Aufgabe mit dreistelligen Zahlen. Das Verfahren bei den übrigen hieher gehörigen Fällen ist daraus leicht zu ersehen.

869 — 523 =?

(Die Aufgabe wird an die Wandtafel notirt.)

a. 869 — 523 = 869 — (500 + 20 + 3).
869 — 500 = 369;
369 — 20 = 349;
349 — 3 = 346. Also ist 869 — 523 = 346.

b. 869 — 523 = (8 H. — 5 H.) + (6 Z. — 2 Z.) + (9 E. — 3 E.)
8 H. — 5 H. = 3 H.;
6 Z. — 2 Z. = 4 Z.; zusammen 3 H. + 4 Z.
9 E. — 3 E. = 6 E.; also bleiben 3 H., 4 Z. u. 6 E. oder 346 E.

B. Schriftlich.

Beispiel: 785 — 542?

Man schreibt die Zahlen wie beim Addiren unter einander, doch so, daß die kleinere Zahl unter die größere zu stehen kommt.

$$\begin{array}{r} 785 \\ 542 \\ \hline 243 \end{array}$$

785 — 542 = (700 — 500) + (80 — 40) + (5 — 2).

2 E. v. 5 E. bleiben 3 E.; 4 Z. von 8 Z. bleiben 4 Z.; 5 H. von 7 H. bleiben 2 H. Es bleiben also 2 H., 4 Z. und 3 E. oder 243 E.; 785 — 542 = 243.

Dann: 2 von 5 bleibt 3; 4 v. 8 bleibt 4; 5 v. 7 bleibt 2.

Abziehen heißt subtrahiren und subtrahiren heißt abziehen. Wir haben also zwei Zahlen von einander abgezogen oder subtrahirt. 785 ist die volle Zahl und wird daher die Vollzahl (Minuend) genannt. 542 heißt hier, weil sie abgezogen wird, der Abzug oder die Abzugszahl (der Subtrahend.) Die Zahl 243 nennt man, weil sie übrig bleibt, den Rest. Da dieselbe zugleich anzeigt, um wie viel sich 785 und 542 von einander unterscheiden; so wird sie auch der Unterschied (die Differenz) genannt.

§. 96. Mit Borgen.

A. Mündlich.

1 Z. — 3 E. = 10 E. — 3 E. = 7 Einer.
1 H. — 4 Z. = 10 Z. — 4 Z. = 6 Z. oder 60 Einer.
1 T. — 5 H. = 10 H. — 5 H. = 5 H. oder 500 Einer.
1 Zt. — 6 T. = 10 T. — 6 T. = 4 T. oder 4000 Einer.
1 Ht. — 7 Zt. = 10 Zt. — 7 Zt. = 3 Zt. oder 30.000 E.
1 Mill. — 8 Ht. = 10 Ht. — 8 Ht. = 2 Ht. oder 200.000 E.

250 — 7 =?

a. 250 = 240 + 10; 240 + 10 — 7 = 240 + 3 oder 243.

b. 250 = 2 H. + 5 Z. Um davon die 7 E. abziehen zu können, so verwandle ich 1 Z. in E.; 2 H. + 5 Z. = 2 H. + 4 Z. + 10 E.; hievon 7 E. weg, so bleiben 2 H. + 4 Z. + 3 E. oder 243 E. Also ist 250 — 7 = 243.

500 — 30 =?

a. 500 = 400 + 100; 400 + 100 — 30 = 400 + 70 = 470.

b. 500 = 5 H.; 30 = 3 Z. Um die 3 Z. wegnehmen zu können, so verwandle ich 1 H. von den 5 H. in Z.; 5 H. = 4 H. + 10 Z.; 4 H. + 10 Z. — 3 Z. = 4 H. + 7 Z. oder 570 E.

Aufg.				
	130 — 4	540 — 5	200 — 40	400 — 50
	380 — 9	870 — 8	700 — 70	300 — 80

300 — 6 =?

a. 300 = 200 + 100; 200 + 100 — 6 = 200 + 94 od. 294.

b. Um die 6 E. von den 3 H. wegnehmen zu können, so verwandle ich 1 H. in 10 Z., und 1 Z. davon in Einer. 3 H. = 2 H. + 10 Z. = 2 H. + 9 Z. + 10 E. Hievon 6 E. weg, so bleiben 2 H. + 9 Z. + 4 E. oder 294 E.; 300 — 6 = 294.

600 — 54 = ?

a. 600 — 54 = 600 — (50 + 4); 600 — 50 = 550, 550 — 4 = 546; also ist 600 — 54 = 546.

b. 600 — 6 H.; 54 = 5 Z. + 4 E.; 6 H. = 5 H. + 10 Z. = 5 H. + 9 Z. + 10 E.; 5 Z. von 9 Z. bleiben 4 Z., und 4 E. von 10 E. bleiben 6 E.; also bleiben im Ganzen 5 H. + 4 Z. + 6 E. oder 546 E.

140 — 60 = ?

a. 140 — 60 = 140 — (40 + 20); 140 — 40 = 100, und 100 — 20 = 80; 140 — 60 = 80.

b. 140 = 1 H. + 4 Z.; 60 = 6 Z.; die 6 Z. von den 4 Z. wegzunehmen, geht nicht; ich verwandle daher den H. auch in Z.; 1 H. + 4 Z. = 14 Z.; 14 Z. — 6 Z. = 8 Z. oder 80 E.

c. 140 — 60 = 14 Z. — 6 Z. = 8 Zehner oder 80.

450 — 70 = ?

a. 450 — 70 = 450 — (50 + 20); 450 — 50 = 400, und 400 — 20 = 380; 450 — 70 = 380.

b. 450 = 4 H. + 5 Z.; 70 = 7 Z.; 7 Z. von 5 Z. geht nicht; ich verwandle daher 1 H. in Z.; 4 H. + 5 Z. = 3 H. + 15 Z.; 3 H. + 15 Z. — 7 Z. = 3 H. + 8 Z. oder 380 E.

c. 450 — 70 = 45 Z. — 7 Z. = 38 Zehner oder 380.

742 — 68 = ?

a. 742 — 68 = 742 — 60 — 8; 742 — 60 = 482, — 8 = 674.

b. 742 — 68 = 742 — 42 — 26; 742 — 42 = 700, — 26 = 674.

B. Schriftlich.

Beispiel: 83 — 38 = ?

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} {}^{13} \\ 8.3 \\ -\,3\,8 \\ \hline 4\,5 \end{array} \;=\; \begin{array}{r} 70 + 13 \\ 30 + 8 \\ \hline 40 + 5 \end{array} \;=\; \begin{array}{r} 8.3 \\ -\,3\,8 \\ \hline 4\,5 \end{array}$$

83 = 8 Z. + 3 E.; 38 = 3 Z. + 8 E.; 8 E. von 3 E. abzuziehen, geht nicht. Ich borge daher bei den 8 Z. einen Z. und zeige dieß durch einen Punkt hinter der 8 an. Der geborgte Zehner = 10 Einer. 3 E. waren schon vorhanden, 10 E. habe ich dazu entlehnt; also habe ich nun 13 Einer. Anstatt 8 Z. + 3 E. haben wir jetzt 7 Z. + 13 E., was eben so viel ist. Nun ziehe ich 3 Z. 8 E. von 7 Z. 13 E. ab. 8 E. von 13 E. bleiben 5 E., und 3 Z. von 7 Z. bleiben 4 Z. Es bleiben also 4 Z. + 5 E. oder 45 E.; 83 — 38 = 45.

Probe. Man zählt den Rest mit dem Abzug zusammen. Ist richtig abgezogen, so kommt wieder die Vollzahl.

83	Vollzahl
38	Abzug
45	Rest

5 + 8 = 13; 3 oben, 1 hinüber; 1 + 4 = 5, + 3 = 8; 8 oben. Also richtig.

Beispiel 2. 753 — 468 =?

Ausrechnung.

$\overset{14}{}\,\overset{13}{}$		
7. 5. 3	abgekürzt:	7.5.3
4 6 8		468
2 8 5		285

Von 753 soll 468, d. i. von 7 H. 5 Z. und 3 E. sollen 4 H. 6 Z. und 8 E. abgezogen werden. 8 E. v. 3 E. abzuziehen, geht nicht. Ich borge mir daher bei den 5 Zehnern 1 Zehner; 1 Z. + 3 E. = 13 Einer. Anstatt 7 H. + 5 Z. + 3 E. habe ich jetzt 7 H. + 4 Z. + 13 E., was eben so viel ist. 8 E. von 13 E. bleiben 5 E.

6 Z. von 4 Z. wegzunehmen, geht nicht. Ich borge mir daher bei den 7 Hundertern 1 Hunderter. 1 H. und 4 Z. = 14 Z. Anstatt 7 H. und 4 Z. haben wir jetzt 6 H. und 14 Z., was gleich viel ist. 6 Z. von 14 Z. bleiben 8 Z.

4 H. von 6 H. bleiben 2 H.

Der Rest beträgt also 2 H., 8 Z. und 5 E. = 285 E. od. 285.

Wir fassen nun die Ausrechnung, wie sie vor uns steht, nochmal in's Auge.

Die 4 H. hätten wir ohne Weiteres abziehen können; nicht so die 6 Z. und 8 E. Um auch diese abziehen zu können, so haben wir in der Vollzahl 1 Hunderter in Zehner, und 1 Z. in Einer verwandelt. 7 H. + 5 Z. = 6 H. + 15 Z.; 15 Z. + 3 E. = 14 Z. + 13 E. Also sind 7 H. + 5 Z. + 3 E. = 6 H. + 14 Z. + 13 E. Zieht man hievon 4 H., 6 Z. und 8 E. ab, so bleiben 2 H., 8 Z. und 5 E. oder 285 Einer.

Probe. 5 + 8 = 13; 3 oben, 1 im S.; 1 + 8 + 6 = 15; 5 oben, 1 im S.; 1 + 2 + 4 = 7.

Beispiel 3. 8752 — 4984 =?

Ausrechnung.

	16	14	12		
8.	7.	5.	2	=	8.7.5.2
4	9	8	4		4984
3	7	6	8		3768

Beispiel 4. 30 — 7 =?

Ausrechnung.

10		
3.0	=	3.0
7		7
2 3		2 3

Von 30 soll 7 abgezogen werden. 30 = 3 Z. und 0 E.; 7 E. von 0 E. wegzunehmen, geht nicht. Ich borge mir daher bei den 3 Z. einen Zehner. 1 Z. = 10 Einer. Für 3 Zehner stehen jetzt 2 Z. und 10 E. = 20 + 10. Nun ist es möglich, die 7 E. abzuziehen. 7 E. von 10 E. bleiben 3 E. Die 2 Z. bleiben übrig, wie sie sind. Also ist 30 — 7 oder 20 + 10 — 7 = 20 + 3 oder 23.

Beispiel 5. 307 — 243?

Ausrechnung.

10 3.0 7		3.0 7
2 4 3	=	2 4 3
6 4		6 4

Beispiel 6. 600 — 432?

Ausführung.

9 10 10 6.0.0		6.0.0
4 3 2	=	4 3 2
1 6 8		1 6 8

2 E. von 0 E. abzuziehen, geht nicht. Einen Zehner kann ich nicht borgen, denn es sind keine Zehner da. Ich borge daher bei den 6 Hundertern 1 Hunderter; es bleiben also noch 5 H.; dieß deute ich durch einen Punkt hinter 6 an. Der entlehnte H. hat 10 Zehner. Für 6 H. stehen nun 5 H. + 10 Z. Von diesen 10 Z. nehme ich 1 Z. weg; es bleiben also noch 9 Zehner, und das deute ich durch einen Punkt bei 10 (oder 0) an. Der entlehnte Zehner hat 10 Einer. Anstatt 6 H. habe ich jetzt 5 H., 9 Z. und 10 Einer, und das ist eben so viel. Davon ziehe ich nun 4 H., 3 Z. und 2 E. ab.

Am Ende gebe man wieder Additionsaufgaben und lasse von der Summe die einzelnen Posten nacheinander abziehen. Geht es zuletzt auf, so ist dieß die Probe, daß sowohl richtig addirt, als richtig subtrahirt worden ist.

§. 97. Subtractionsaufgaben mit der angewandten Zahl.

A. Mündlich.

Aufg. 1. Ein Fäßchen hält 58 lt; ein anderes hält 120 lt, wie viel also mehr?

Aufl. Wie viel Liter hält das eine und wie viel das andere Fäßchen? Und was sollen wir suchen? Auf welche Weise läßt sich finden, um wie viel 12 mehr ist als 7? (a. Ich sehe zu, wie viel ich zu 7 legen muß, um 12 zu erhalten. b. Ich ziehe 7 von 12 ab.) Wie kannst du also auch finden, wie viel 120 lt mehr sind als 58 lt? (a. Zu 58 muß ich 2 + 40 + 20 oder 62 legen, um 120 zu erhalten. b. 120 — 50 = 70, 70 — 8 = 62. Also ꝛc.)

Aufg. 2. A bezahlte für den Centner 106 Mrk. und muß denselben um 18 Mrk. billiger wieder abgeben; wie viel löst er?

Aufl. Wie viel hat A für den Centner bezahlt? Löst er dafür wieder 106 Mrk.? Mehr, oder weniger? Wie viel weniger? Wie viel löst er also dafür? (106 Mrk. — 18 Mrk.)

Ausr. 106 Mrk. — 10 Mrk. = 96 Mk., 96 Mk. — 8 Mk. = 88 Mk.

Aufg. 3. Eine Waare wurde um 96 Mrk. eingekauft und um 125 Mrk. wieder verkauft; wie viel wurde daran gewonnen?

Aufl. Wie wurde die Waare eingekauft? Wie verkauft? Wurde für dieselbe also mehr oder weniger gelöst, als sie gekostet hat? Wie viel sind

125 Mrk. mehr als 96 Mrk.? (4 + 25 oder 29 Mrk. Oder: 125 — 90 = 35, und 35 — 6 = 29.) Das ist der Gewinn. Wie viel wurde also am Ctr. gewonnen?

Aufg. 4. Von 400 Kgr Zucker sind noch 148 Kgr vorhanden; wie viel ist verbraucht worden?

Aufl. Wie viel Kilogr. Zucker waren es ursprünglich? Wie viel ist davon noch vorhanden? Und was sollen wir suchen? Woran sieht man, daß von einer Sache verbraucht oder weggenommen wurde? (Daran, daß sie weniger geworden ist.) Und wie kann man finden, wie viel von einer Sache verbraucht wurde? (Wenn man untersucht, um wie viel sie weniger geworden ist.) Wie viel muß daher von den 400 Kgr Zucker verbraucht worden sein, da nur noch 148 Kgr davon vorhanden sind? (So viel, als 148 Kgr weniger sind als 400 Kgr.) Und wie findest du das? (a. Durch Zulegen: 148 + 2 = 150 + 50 = 200 + 200 = 400; 2 + 50 + 200 = 252. b. Durch Abziehen: 400 — 140 = 260 — 8 = 252.) Von den 400 Kgr sind also 252 Kgr verbraucht worden.

Aufg. 5. A, B und C besitzen mit einander 800 Mrk.; A hat 230 Mrk. und B 350 Mrk.; wie viel hat C?

Aufl. Wie viel Geld besitzen A, B und C mit einander? Wie viel haben A und B zusammen? (230 + 350 = 580 Mrk.) Wie viel Geld wird nun C haben? (So viel, als zu 580 Mrk. auf 800 Mrk. fehlt, oder 800 Mrk. — 580 Mrk. = 220 Mrk.)

B. Schriftlich.

Aufgabe. Es kauft Jemand ein Haus um 7869 Mrk. und verkauft dasselbe um 8500 Mrk. wieder; wie viel hat er übrig?

Aufl. Er hat so viel übrig, als 8500 Mrk. mehr sind denn 7896 Mrk. Um das zu finden, so muß ich 7896 Mrk. von 8500 Mrk. abziehen.

Ausr.

```
  8500 Mrk.
— 7896  „
—————————
   604 Mrk.
```

Aufg. z. Kopf- und Zifferr. Uebung 4—8.

Vierte Uebung.

Multipliciren oder Vervielfachen.

§. 98. Vorbemerkung.

Multipliciren heißt vervielfachen. Das ist die gewöhnliche Erklärung, die Erklärung dem Wortsinne nach. Die Zahl 4 durch 3 multipliciren heißt suchen, wie viel das 3fache von 4 beträgt. Um das 3fache von 4 zu erhalten, so müssen wir die 4 dreimal nehmen. Daher heißt multipliciren zweitens: eine gegebene Zahl so oftmal nehmen, als eine andere anzeigt. In unserem Beispiele zeigt die 3 an, daß die 4 dreimal, nämlich 1 mal + 1 mal + 1 mal, also eben so oft genommen werden soll, als man 1 nehmen muß, um 3 zu erhalten. Demgemäß kann man drittens auch sagen: multipliciren heißt, aus dem Multiplikanden eine neue Zahl so entstehen lassen, wie der Multiplikator aus der Eins entsteht. Die erste dieser drei Erklärungen entspricht nur dann der Sache, wenn der Multiplikator eine ganze Zahl ist; denn nur in diesem Falle ist das Produkt ein (reines) Vielfaches von dem Multiplikanden. Die beiden anderen Erklärungen passen für alle Fälle. Unter ihnen ist es aber wieder die letztere, welche die Operation am bestimmtesten bezeichnet.

Beim Addiren und Subtrahiren mit reinen Zahlen hatten wir es nur mit eigentlichen Zahlengrößen und eben deßhalb auch beim Addiren und Subtrahiren benannter Zahlen nur mit benannten Zahlen zu thun. Beim Multipliciren und, wie wir später sehen werden, auch beim Dividiren ist dieß nicht so. Unter den drei Zahlen, die wir bei einer vollendeten Multiplikation vor uns haben, sind nur zwei eigentliche Zahlengrößen; die dritte zeigt an, wie sich beide zu einander verhalten. Zum Beispiel. Die Aufgabe 3 × 4 = ? verlangt, daß eine Zahl gesucht werde, welche 3mal so groß ist als 4; 3 × 4 = 12. Die Zahl, welche 3mal so groß ist, als die Zahl 4, ist also 12. Schon der Ausdruck ist bezeichnend. Wir sprechen hier von der Zahl 4 und von der Zahl 12; bei 3 heißt es „3mal“. In der Aufgabe sagt uns die 3, wie viel mal so groß als 4 die zu suchende Zahl sein soll, und nach der Ausrechnung sagt sie uns, wie viel mal so groß als die 4 die gefundene Zahl ist. Sie zeigt also an, wie sich 12 zu 4 verhält; sie bezeichnet das Verhältniß dieser Zahlen zu einander. Demnach ist hier 3 eine Verhältnißzahl; 4 und 12 dagegen sind die eigentlichen Zahlengrößen. So ist es in allen Fällen. Der Multiplikand und das Produkt sind Zahlengrößen, der Multiplikator ist eine Verhältnißzahl. Daher kommt es auch, daß beim Rechnen mit benannten Zahlen nur der Multiplikand und das Produkt benannte Zahlen sind, der Multiplikator aber eine reine Zahl ist. Anders hat es schon gar keinen Sinn. Es kann z. B. heißen 5 × 47 Pfg. = 235 Pfg. Was ist aber 5 Meter mal 47? oder 5 Mtr. mal 47 Pfg.? Zwar scheint es, daß beim Rechnen mit der angewandten Zahl z. B. in der Regeldetri-Aufgabe: 1 Mtr. zu 47 Pfg., was kosten 5 Mtr.? die Zahl 47 Pfg. durch die Zahl 5 Mtr. zu multipliciren sei. Dem ist jedoch nicht so. Indem ich schließe: „Wenn 1 Mtr. 47 Pfg. kostet, so kosten 5 Mtr. 5 mal 47 Pfg.“ wird die Zahl „5 Mtr.“ ihrer Benennung (Meter) entkleidet und in eine reine Zahl verwandelt.

Maßgebend für den Stufengang ist hier die Zahl der Stellen des Multiplikators, und dieser ist entweder einstellig oder zweistellig, oder drei- und mehrstellig. Die hierdurch sich ergebenden Hauptübungsstufen zerfallen wieder in verschiedene Unterabtheilungen, welche jedoch in ihrer Aufeinanderfolge am besten aus der Darstellung selbst ersehen werden.

I. Der Multiplikator ist einstellig.

A. Mündlich.

§. 99. Der Multiplikand hat nur eine geltende Stelle.

a. Ohne Uebergang.

2 × 2 E. = 4 E., 2 × 2 = 4.
2 × 2 Z. = 4 Z. oder 40 E.; 2 × 20 = 40.
2 × 2 H. = 4 H. oder 400 E.; 2 × 200 = 400.
2 × 2 T. = 4 T. oder 4000 E.; 2 × 2000 = 4000.
2 × 2 Zt. = 4 Zt. oder 40.000 E.; 2 × 20.000 = 40.000.
2 × 2 Ht. = 4 Ht. oder 400.000 E.; 2 × 200.000 = 400.000.
2 × 2 Mill. = 4 Millionen.
Eben so mit 2 × 3, 4 × 2, 3 × 3, 2 × 5.

b. Mit Uebergang.

Zunächst wird das Einmaleins wiederholt, dann:
7 × 60 = ?
60 = 6 Zehner; 7 × 6 Z. = 42 Z. = 4 H. + 2 Z. = 420.
7 × 600 = ?
600 = 6 Hunderter; 7 × 6 H. = 42 H. = 4 T. + 2 H. oder 4200 Einer; 7 × 600 = 4200.

7 × 6000 = ?
6000 = 6 Tausender; 7 × 6 T. = 42 T. = 4 Zt. + 2 T. oder 42.000.

7 × 60.000 = ?
60.000 = 6 Zehntausender; 7 × 6 Zt. = 42 Zt. = 4 Ht. + 2 Zt. oder 420.000 Einer; 7 × 60.000 = 420.000.

7 × 600.000 = ?
600.000 = 6 Ht.; 7 × 6 Ht. = 42 Ht. = 4 Mill. + 2 Ht. oder 4'200.000 Einer; 7 × 600.000 = 4'200.000.
Ebenso mit 3 × 5, 4 × 6, 5 × 7, 6 × 9, 9 × 8.

§. 100. Der Multiplikant hat mehr als eine geltende Stelle.

a. Ohne Uebergang.

2 × 43 = ?
a. 2 × 43 = 2 × 40 + 2 × 3; 2 × 40 = 80, u. 2 × 3 = 6; 80 + 6 = 86; 2 × 43 = 86.
b. 43 = 4 Z. + 3 E.; 2 × 43 = 2 × 4 Z. + 2 × 3 E.; 2 × 3 E. = 6 E. u. 2 × 4 Z. = 8 Z.; zusammen 8 Z. + 6 E. oder 86 E.

3 × 231 = ?
a. 3 × 231 = 3 × 200 + 3 × 30 × 3 × 1; 3 × 200 = 600; 3 × 30 = 90, zusammen 690; 3 × 1 = 3; 690 + 3 = 693.
b. 231 = 2 H. + 3 Z. + 1 E.; 3 × 1 E. = 3 E., 3 × 3 Z. = 9 Z., 3 × 2 H. = 6 H., zusammen 6 H. 9 Z. 3 E. oder 693.
c. 3 × 231 = 3 × 23 Z. + 3 × 1 E. = 69 Z. + 3 E. oder 693.

b. Mit Uebergang.

4 × 68 = ?
a. 4 × 68 = 4 × 60 + 4 × 8; 4 × 60 = 240, 4 × 8 = 32; 240 + 32 = 272; also ist 4 × 68 = 272.
b. 68 = 6 Z. + 8 E.; 4 × 8 E. = 32 E. oder 3 Z. 2 E.; 4 × 6 Z. = 24 Z.; 24 Z. + 3 Z. 2 E. = 27 Z. 2 E. = 2 H. 7 Z. 2 E. oder 272 E.

6 × 473 = ?
a. 6 × 400 = 2400; 6 × 70 = 420; 2400 + 420 = 2820; 6 × 3 = 18; 2820 + 18 = 2838.
b. 473 = 4 H. + 7 Z. + 3 E.
6 × 3 E. = 18 E. oder 1 Z. + 8 E.
6 × 7 Z. = 42 Z.; 42 Z. + 1 Z. 8 E. = 43 Z. 8 E. oder 4 H. 3 Z. 8 E.
6 × 4 H. = 24 H.; 24 H. + 4 H. 3 Z. 8 E. = 28 H. 3 Z. 8 E. = 2 T. 8 H. 3 Z. und 8 E. oder 2838 E.

8 × 195 = ?
a. 8×195=8×100+8×90+8×5=800+720+40=1560.
b. 8×195=8×200−8×5=1600−40=1560.

3 × 5 × 7?
a. 5 × 7 = 35; 3 × 5 × 7 = 3 × 35 = 90 + 15 oder 105.
b. 3 × 5 × 7 = 7 × 5 × 3 = 7 × 15 = 70 + 35 oder 105.
c. 3 × 5 × 7 = 5 × 7 × 3 = 5 × 21 = 100 + 5 oder 105.
Die Faktoren können also verwechselt werden.

B. Schriftlich.

§. 101. Verfahren.

Beispiel 1. $3 \times 32 = ?$

a. 32
32
32
——
96

Kurz:

b. 32
×3
——
96

a. $3 \times 32 = 32 + 32 + 32$; 2 E. + 2 E. + 2 E. oder 3 × 2 E. = 6 E.; 3 Z. + 3 Z. + 3 Z. od. 3 × 3 Z. = 9 Z.; 9 Z. + 6 E. = 96 E.

b. Ich setze die Zahl 32 nur einmal. Daß sie 3 mal genommen werden soll, zeige ich durch die Ziffer 3 darunter an. Anstatt 2 E. + 2 E. + 2 E. sage ich sogleich: 3 × 2 E.; 3 × 2 E. = 6 E. Die 6 E. schreibe ich in die erste Stelle, unter die 3 E. Anstatt 3 Z. + 3 Z. + 3 Z. spreche ich sogleich: 3 × 3 Z.; 3 × 3 Z. = 9 Z. Die 9 Zehner schreibe ich in die zweite Stelle. Also ist 3 × 32 = 9 Z. + 6 E. oder 96.

Wir haben nun die Zahl 32 dreimal genommen und 96 erhalten. 96 ist daher das 3fache von 32. Wenn man das 2fache, oder das 3fache, oder das 4fache, also überhaupt ein Vielfaches von einer Zahl sucht und es auf die zweite, nämlich auf die kürzere Weise thut; so vervielfacht oder multiplicirt man sie. Wir haben sonach die Zahl 32 vervielfacht oder multiplicirt und zwar durch 3. Die Zahl 32, welche multiplicirt worden ist, wird Multiplikand genannt, und die Zahl 3, welche anzeigt, wie oft die 32 genommen worden ist, Multiplikator. Die Zahl 96, die sich hieraus ergeben hat, ist das Produkt.

Beispiel 2. $4 \times 36 = ?$

Ausrechnung.

a. 36
36
36
36
——
144

Kurz:

b. 36
4
——
144

a. $4 \times 36 = 36 + 36 + 36 + 36$; 6 E. + 6 E. + 6 E. + 6 E. oder 4 × 6 E. = 24 E. = 2 Z. + 4 E. Die 4 E. schreibe ich unter die E.; die 2 Z. behalte ich im Sinne und zähle sie zu den Zehnern. 3 Zehner + 3 Z. + 3 Z. + 3 Z. oder 4 × 3 Z. = 12 Z., und 2 Z. dazu = 14 Z. oder 1 H. + 4 Z. Die 4 Z. setze ich in die zweite Stelle, unter die Zehner; den Hunderter schreibe ich in die dritte Stelle. Also ꝛc.

b. Ich schreibe die Zahl 36 nur einmal und zeige, daß sie 3mal genommen werden soll, durch die Zahl 4 darunter an. 4 × 36 = 4 × 3 Z. + 4 × 6 E. Ich rechne zuerst 4 × 6 E., dann 4 × 3 Z.; 4 × 6 E. = 24 E. = 2 Z. + 4 E. Wie beim Addiren schreibe ich auch jetzt nur die 4 E. und behalte die 2 Z. im Sinne. 4 × 3 Z. = 12 Z.; 12 Z. + 2 Z. = 14 Z. = 1 H. + 4 Z.; die 4 Z. setze ich in die zweite Stelle, den Hunderter in die dritte.

1 H. 4 Z. und 4 E. = 144 E.; 4 × 36 = 144.

Beispiel 3. $6 \times 6583 = ?$

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 6583 \\ 6 \\ \hline 39498 \end{array}$$

6 × 6583 = 6 × 3 E. + 6 × 8 Z. + 6 × 5 H. + 6 × 6 T.
6 × 3 E. = 18 E. oder 8 E. (schreibend) und 1 Z. (im Sinne.)
6 × 8 Z. = 48 Z., + 1 Z. = 49 Z. oder 9 Z. (schreibend) und 4 H. (im S.)
6 × 5 H. = 30 H., + 4 H. = 34 H. oder 4 H. (schreibend) und 3 T. (im S.)
6 × 6 T. = 36 T., + 3 T. = 39 T. oder 9 T. (schreibend) und 3 Zehnt. (schr.); 3 Zt. 9 T. 4 H. 9 Z. und 8 E. = 39498 E.; 6 × 6583 = 39498.

Dann: 6 × 3 = 18; ich schreibe 8 und behalte 1 (im S.);
6 × 8 = 48, + 1 = 49; ich schreibe 9 und behalte 4;
6 × 5 = 30, + 4 = 34; ich schreibe 4 und behalte 3;
6 × 6 = 36, + 3 = 39; ich schreibe 39 aus.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr., 9. u. 10. Uebung.

II. Der Multiplikator ist zweistellig.

A. Mündlich.

§. 102. Der Multiplikator ist eine reine Zehnerzahl.

10 × 1 E. = 10 E. oder 1 Z.; 10 × 1 = 10.
10 × 1 Z. = 10 Z. oder 1 H.; 10 × 10 = 100.
10 × 1 H. = 10 H. oder 1 T.; 10 × 100 = 1000.
10 × 1 T. = 10 T. oder 1 Zt.; 10 × 1000 = 10000 ꝛc.
10 × 40 = ?
40 = 4 Z.; 10 × 4 Z. = 40 Z. od. 4 H.; 10 × 40 = 400.
10 × 300 = ?
300 = 3 H.; 10 × 3 H. = 30 H. oder 3 T.; 10 × 300 = 3000.
10 × 24 = ?
a. 10 × 24 = 10 × 20 + 10 × 4; 10 × 20 = 200; 10 × 4 = 40; 10 × 24 = 240.
b. 24 = 2 Z. + 4 E.; 10 × 4 E. = 4 Z., und 10 × 2 Z. = 2 H.; 2 H. + 4 Z. = 240 E.; 10 × 24 = 240.

10 × 357 = ?
a. 10 × 357 = 10 × 300 + 10 × 50 + 10 × 7; 10 × 300 = 3000, 10 × 50 = 500, und 10 × 7 = 70; zusammen 3570 E.; 10 × 357 = 3570.
b. 357 = 3 H. 5 Z. 7 E.; 10 × 7 E. = 7 Z.; 10 × 5 Z. = 5 H.; 10 × 3 H. = 3 T.; 3 T. + 5 H. + 7 Z. = 3570 E.; 10 × 357 = 3570.

Eine Zahl wird also 10mal genommen, wenn man ihr eine Null anhängt.

20 × 7 = ?
20 × 7 = 10 × 7 + 10 × 7 oder 2 × 10 × 7, und da die Faktoren verwechselt werden können, auch = 10 × 2 × 7.
a. 10 × 7 = 70 und 2 × 70 = 140.
b. 2 × 7 = 14 und 10 × 14 = 140. So ist es am besten.

Eine Zahl wird also 20mal genommen, wenn man sie 2mal nimmt und das Zweifache von ihr 10mal; 30 mal, wenn man sie 3mal nimmt und das Dreifache wieder 10mal ꝛc.

30 × 20 = ?
a. 30 × 20 = 10 × 3 × 20; 3 × 20 = 60 u. 10 × 60 = 600.
b. 3 × 2 = 6, 3 × 20 = 60, 30 × 20 = 600.

40 × 18 = ?
40 × 18 = 10 × 4 × 18; 4 × 18 = 72 u. 10 × 72 = 720.

§. 103. Der Multiplikator eine gemischte Zehnerzahl.

23 × 8 = ?
23 × 8 = 20 × 8 + 3 × 8; 20 × 8 = 160, u. 3 × 8 = 24; 160 + 24 = 184; 23 × 8 = 184.

32 × 40 = ?
a. 32 × 40 = 30 × 40 + 2 × 40; 30 × 40 = 1200, und 2 × 40 = 80, zusammen 1280; 32 × 40 = 1280.
b. 32 × 4 = 128; 32 × 40 = 10 × 128 = 1280.

18 × 27 = ?
a. 18 × 27 = 10 × 27 + 8 × 27; 10 × 27 = 270; 8 × 27 = 160 + 56 oder 216; 270 + 216 = 486.
b. 18 = 6 × 3; 18 × 27 = 6 × 3 × 27; 3 × 27 = 81, 6 × 81 = 486.

B. Schriftlich.

§. 104. Verfahren.

Beispiel 1. 10 × 234?

Ausrechnung.

234 10 2340	besser	234 10 2340

10 × 4 Einer = 4 Zehner; 10 × 3 Zehner = 3 Hunderter; 10 × 2 Hunderter = 2 Tausender. Die Ziffern bleiben also dieselben, nur wird ihr Werth 10mal so groß. Damit aber die Ziffer 4 vier Zehner gelte, so muß sie von der ersten Stelle in die zweite kommen. Damit die 3 drei Hunderter bedeute, muß sie von der zweiten in die dritte Stelle kommen. Und damit die 2 zwei Tausender bezeichne, so muß sie von der dritten Stelle in die vierte kommen. Dieß Alles geschieht einfach dadurch, daß man der Zahl zur Rechten eine Null anhängt.

Dergleichen Aufgaben gebe der Lehrer selbst noch mehr. Z. B.: Schreibt die Zahl 47 an! Multiplicirt sie auf die kürzeste Weise durch 10!

Beispiel 2. 23 × 456 =?

Ausrechnung

```
  456                                456
   23    23×456=3×456+20×476.         23
 ------                             ------
 1368 = 3 × 456 . . . . . . . = 1368
 9120 = 20 oder 10 × 2 × 456  =  912
 ------                             ------
10488 = 23 × 456 . . . . . .  = 10488
```

Man multiplicirt die Zahl 456 zuerst durch 3; 3 × 456 = 1368. Dieß Ergebniß kommt genau darunter, 8 E. unter 3 E. Nun wird die Zahl 456 durch 20 multiplicirt. Man nimmt sie 2mal und das 2fache 10mal. Das 2fache wird 10mal genommen, indem man ihm ein Null beifügt oder es einfach um eine Stelle weiter gegen die Linke schreibt. 2 × 456 = 912, und 10 × 912 × 9120; 9120 + 1368 = 10488. Also ist 23 × 456 = 10488.

Beispiel 3. 50mal 53 =?

Ausrechnung.

```
  53     50×53=10×5×53.
  50           5×53=265
 ----
 2650      10×5×53=2650
```

Man multiplicirt also durch 5 und macht dann das Fünffache indem man die Null herunter setzt, 10mal so groß.

Beispiel 4. 34 × 480 =?

Ausrechnung.

```
  480     kürzer     480
   34                 34
 -----              -----
 1920                192
1440                144
 -----              -----
16320              16320
```

Erklärung zur kürzeren Weise. 480 = 48 Zehner. Ich rechne bloß 34 × 48; 34 × 48 = 1632; 34 × 48 **Zehner** = 1632 Zehner. Daher muß noch, wie oben hinter 48, so unten hinter 1632 eine Null zu stehen kommen. (Und darum pflegt man zu sagen: Ich setze die Null herunter.)

Beispiel 5. 60 × 7800 =?

```
Ausr.    7800     oder     7800
           60              6..0
        ------            ------
        468000            468000
```

Erklärung zur zweiten Weise. 7800 = 78 H.; 6 × 78 = 468; 6 × 78 H. = 468 H. oder 46800 Einer. Daher setzt man die 2 Nullen, die hinter 78 stehen, herunter. Die Zahl 7800 ist nun durch 6 multiplicirt. Sie ist aber durch 60, d. i. durch 10 × 6 zu multipliciren. Das Produkt 46800 ist daher noch 10mal zu nehmen. Und dieß geschieht, indem ich auch die hinausgerückte Null herunter setze. Also

6 × 78 = 468
6 × 7800 = 46800
60 × 7800 = 468000

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr., 11. Uebung.

III. Der Multiplicator ist drei- oder mehrstellig.

A. Mündlich.

§. 105. Das Verfahren.

100 = 10 × 10.
100 × 1 E. = 10 × 10 × 1 E.; 10 × 1 E. = 1 Z., und 10 × 1 Z. = 1 H.; 100 × 1 E. = 1 H.
100 × 1 Z. = 10 × 10 × 1 Z.; 10 × 1 Z. = 1 H., und 10 × 1 H. = 1 T.; 100 × 1 Z. = 1 T.
100 × 1 H. = 10 × 10 × 1 H.; 10 × 1 H. = 1 T., und 10 × 1 T. = 1 Zehnt.; 100 × 1 H. = 1 Zehnt. u. s. w.

Eine Zahl wird also 100mal genommen, wenn man sie 10 × 10mal nimmt.

100 × 4 =?
a. 10 × 4 = 40, und 10 × 40 = 400; 100 × 4 = 400.
b. 100 × 1 = 100, 100 × 4 = 4 × 100 = 400.

100 × 30 =?
a. 10 × 30 = 300, u. 10 × 300 = 3000; 100 × 30 = 3000.
b. 100 × 1 = 100; 100 × 30 = 30 × 100 = 30 H. oder 3000.

100 × 45 =?
a. 10 × 45 = 450, u. 10 × 450 = 4500; 100 × 45 = 4500.
b. 100 × 1 = 100; 100 × 45 = 45 × 100 = 4500.

200 × 8 =?

Eine Zahl wird 20mal genommen, wenn man sie 10 × 2mal nimmt. Eine Zahl wird daher 200mal genommen, wenn man sie 100 × 2mal nimmt; 300mal, wenn man sie 100 × 3mal nimmt 2c. Wie rechnet man also 200 × 8? Ich rechne 2 × 8 und nehme das Zweifache 100mal oder 10 × 10mal. 2 × 8 = 16, 10 × 16 = 160, und 10 × 160 = 1600. Oder: 200 × 8 = 8 × 200 = 1600.

300 × 40 =?
300 × 40 = 100 × 3 × 40; 3 × 40 = 120; 10 × 120 = 1200, u. 10 × 1200 = 12000.

600 × 24 =?
600 × 24 = 100 × 6 × 24; 6 × 24 = 144; 10 × 144 = 1440, u. 10 × 1440 = 14400; 600 × 24 = 14400.

420 × 6 =?
420 × 6 = 400 × 6 + 20 × 6; 400 × 6 = 2400; 20 × 6 = 120; 2400 + 120 = 2520; 420 × 6 = 2520.

143 × 4 =?
143 × 4 = (100 × 4) + (40 × 4) + (3 × 4); 100 × 4 = 400; 40 × 4 = 160; 400 + 160 = 560; 3 × 4 = 12; 560 + 12 = 572; also 2c.

B. Schriftlich.

§. 106. Verfahren.

Beispiel 1. 100mal 456 = ?

Ausrechnung.

```
   456        kurz: 45600
   100
 -----
 45600
```

100mal 6 Einer = 6 Hunderter; 100mal 5 Zehner = 5 Tausender; 100mal 4 Hunderter = 4 Zehntausender; mithin bleiben die Ziffern dieselben. Aber aus den 6 Einern werden 6 Hunderter; die 6 kommt also von der ersten Stelle in die dritte. Aus den 5 Zehnern werden 5 Tausender; die 5 kommt darum von der zweiten Stelle in die vierte. Aus den 4 Hundertern werden 4 Zehntausender; die 4 kommt deßhalb von der dritten Stelle in die fünfte. Jede der Ziffern rückt demnach um zwei Stellen vor. Und dieß geschieht bei allen zugleich, indem man hinter sie zwei Nullen setzt.

Eine Zahl wird 10mal so groß, wenn man ihre Ziffern um eine Stelle von der Rechten gegen die Linke rückt oder ihr eine Null anhängt. Sie wird 10 × 10 oder 100mal so groß, wenn man ihre Ziffern um zwei Stellen von der Rechten gegen die Linke rückt oder ihr zweimal eine Null anhängt Sie wird 10 × 10 × 10 oder 1000mal so groß, wenn man ihre Ziffern um drei Stellen weiter gegen die Linke rückt oder ihr dreimal eine Null beifügt 2c.

Beispiel 2. 928mal 573 = ?

Ausrechnung.

```
                     573
                     928
                  ------
          8 × 573 =   4584   Produkt der Einer.
     10 × 2 × 573 =  1146    Produkt der Zehner.
    100 × 9 × 573 = 5157     Produkt der Hunderter.
                  ------
        928 × 573 = 531744
```

Erklärung.

928 × 573 = 8 × 573 + 20 × 573 + 900 × 573.

8 × 573 = 4584

2 × 573 = 1146; 20 × 573 ist 10mal so viel; daher ist diesem Theilprodukte eine Null anzuhängen, oder es muß um eine Stelle eingerückt werden.

9 × 573 = 5157; 900 × 573 ist 100mal so viel; daher sind diesem Theilprodukte 2 Nullen anzuhängen, oder es ist, von der ersten Stelle an gezählt, um 2 Stellen einzurücken.

Beispiel 3. 704 × 7452 = ?

```
            Ausr. 7452
                   704
                 -------
      4 × 7452 =   29808   Prod. der Einer.
100 × 7 × 7452 = 52164..   Prod. der Hunderter.
---------------------------
    704 × 7452 = 5246208
```

Hier ist besonders darauf aufmerksam zu machen, daß die erste Ziffer des jedesmaligen Theilproduktes genau unter diejenige Ziffer des Multiplikators gesetzt werde, mit welcher man multiplicirt.

Beispiel 4. 700 × 564 = ?

Ausrechnung.

```
 564
 700            7 × 564 = 3948
394800    100 × 7 × 564 = 394800
```

Beispiel 5. 250 × 9700 = ?

Ausrechnung.

```
  9700      oder:     9700
   250               25..0
 485000              485
 19400               194
2425000              2425000
```

Erklärung zur zweiten Weise. 9700 = 97 H.; diese sind 250 oder 10 × 25 mal zu nehmen. Man rechnet nun

25 × 97 macht 2425.

25 × 97 H. ist 100mal so viel, also 100 × 2425. Die Zahl 2425 ist daher 100mal so groß zu machen. Das geschieht, indem wir die zwei Nullen herunterziehen, die hinter 97 stehen.

Die Zahl 9700 ist aber nicht durch 25, sondern durch 250, d. i. durch 10 × 25 zu multipliciren. Also ist das 25fache von 9700 noch 10mal zu nehmen. Und das thun wir, indem wir auch noch die Null herunter setzen, die hinter 25 steht.

Ist eine kleinere Zahl durch eine größere zu multipliciren, so kehrt man es um und multiplicirt die größere Zahl durch die kleinere. 3 × 4 = 4 × 3. (Anschaulich nach Seite 39.) 24 × 36 = 36 × 24; denn 24 × 1 = 1 × 24, also ist 24 × 36 = 36 × 24.

Bei den Zahlen mit Nullen am Ende richtet man sich nach den Ziffern, welche Geltung haben. Die Zahl mit der größeren Anzahl geltender Ziffern wird als Multiplikand gesetzt. Z. B.

a. 4685 × 32 = ? b. 4530 × 72000 = ?

Steht so:

```
  4685          4530
    32        72.000
  8370         906
 14055        3171
148920        326160000
```

Beispiele mit Anwendung verschiedener Vortheile.

1) 43 × 11 — Nebenstehende Rechnung läßt ersehen, wie eine zweistellige Zahl mit 11 schnell multiplicirt wird. Man setzt die Quersumme in die Mitte.

```
 43
473
```

11mal 43 ist (weil 3 + 4 = 7) = 473; 11 × 63 ist (da 3 + 6 = 9) = 693. Ist die Quersumme größer als 9, so setzt man nur die Einer in die Mitte und zählt den Zehner hinüber. 11 × 87 ist (7 + 8 = 15, 5 in die Mitte und 1 zu 8) = 957.

2) 7589 × 11
7589
83479

Kürzer: 7589 × 11
83479

9 unter 9; 9 + 8 = 17, 7 notirt, 1 zu 8 gezählt; 1 + 8 + 5 = 14, 4 notirt, 1 zu 5 gezählt; 1 + 5 + 7 = 13, 3 notirt, 1 zu 7 gezählt, 1 + 7 = 8. Man setzt also die Einer herunter, zählt sie dann zu den Zehnern, diese zu den Hundertern u. s. w.

3) 97586 × 41
390344
4001026

Der Multiplikand ist das Einfache, das darunter Befindliche das 40fache; beides zusammen ist das 41fache.

4) 7658 × 18
61264
137844

Hier steht oben das 10fache, darunter das 8fache; die Summe von beiden Produkten ist das 18fache.

5) 9874 × 24 (= 4 × 6)
× 4
39496 × 6
236976

6) 7468 × 56 (= 7 × 8)
× 7
52276 × 8
418208

7) 4697 × 84
18788 = das 4fache von 4697;
37576 = das 4fache 2mal genommen und in die Zehnerstelle gesetzt.
394548

8) 5836 × 486
35016 = das 6fache von 5836;
280128 = das 6fache 8mal genommen und in die Zehnerstelle gesetzt.
2836296

§. 107. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

1) Der Centner zu 48 Mrk.; was kosten 4 Ctr.?

Aufl. Der eine Ctr. kostet 48 Mrk.; der andere kostet wieder 48 Mrk.; 2 Ctr. kosten also 2 × 48 Mrk.; der 3. Ctr. kostet wieder 48 Mrk.; 3 Ctr. kosten also 3 × 48 Mrk.; der 4. Ctr. kostet ebenfalls 48 Mrk; die 4 Ctr. kosten also 4 × 48 Mrk.

Ausr. 4 × 48 Mrk. = 4 × 40 + 4 × 8 Mrk.; 4 × 40 Mkt. = 160 Mrk.; 4 × 8 Mrk. = 32 Mrk.; 160 + 32 Mrk. = 192 Mrk. Die 4 Ctr. kosten also 192 Mrk.

Wie rechnet man 4 × 48 Mrk. schriftlich? Man setzt 48 Mk. und multiplicirt diese mit 4.

48 Mrk.
4
192 Mrk.

oder 48 Mrk. × 4
192 Mrk.

2) Wenn 1 Hektoliter Weizen 156 Pfd. schwer ist, wie viel wiegen dann 37 Hltr.

Aufl. Wenn 1 Hltr. 156 Pfd. wiegt, so wiegen 2 Hltr. 2 × 156 Pfd., 3 Hltr. 3 × 156 Pfd., 4 Hltr. 4 × 156 Pfd.; 37 Hltr. wiegen also 37 × 156 Pfd. Ich muß daher 156 Pfd. mit 37 multipliciren.

Ausrechnung. 156 Pfd. × 37
1092
468
5772 Pfd.

Die 37 Hltr. Weizen wiegen also 5772 Pfd.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr. 9. bis 14. Uebung.

Fünfte Uebung.

Dividiren.

§. 108. Ueber die beiden Divisionsformen.

Dividiren heißt dem Wortsinne nach theilen. Ob aber das Dividiren in allen Fällen auch der Sache nach ein Theilen sei, ist eine Frage, worüber nicht Alle gleicher Ansicht sind. Untersuchen wir es.

Jede Divisionsaufgabe, sie sei eine von uns erfundene oder eine vom Leben gestellte, ist entweder im Sinne des Enthaltenseins, oder im Sinne des Theilens zu lösen. Ist sie im Sinne des Theilens zu lösen, so ist der Dividend in eine durch den Divisor bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen. Ob die zu theilende Größe konkreter oder abstrakter Art ist, ob sie Ganze oder nur Theile eines Ganzen in sich faßt, ist in Bezug auf die Operation gleichviel. Das Dividiren im Sinne des Theilens ist also in allen Fällen, auch der Sache nach, ein Theilen.

Ist die Divisionsaufgabe im Sinne des Enthaltenseins zu lösen, so ist zu suchen, wie oft eine Zahl in einer andern Zahl enthalten ist. Der Dividend wird durch den Divisor gemessen. Es wird also gesucht, wie vielmal so groß der Dividend ist, als der Divisor. Man mag es nun aber mit ganzen oder mit gebrochenen, mit reinen oder mit benannten Zahlen zu thun haben; so ist der Dividend entweder ein reines oder ein gemischtes Vielfaches, ein einfacher oder ein mehrfacher Theil vom Divisor. Andere Fälle gibt es nicht. Worin nun eigentlich die Operation besteht, um dieß zu finden, wird sich am besten zeigen, wenn wir die Anschauung zu Hilfe nehmen.

	Divisor.	Dividend.	
a.	• • •	• • • | • • •	3 ist in 6 2mal; $6 = 2 \times 3$
b.	•|•|•	•	3 ist in 1 $^1/_3$mal; $1 = {}^1/_3 \times 3$
c.	•|•|•	•|•	3 ist in 2 $^2/_3$mal; $2 = {}^2/_3 \times 3$
d.	• • •	• • •|• • •|•	3 ist in 7 $2^1/_3$mal; $7 = 2^1/_3 \times 3$

Bei a mußten wir, um zu sehen, wie oft 3 in 6 enthalten ist, den Dividenden in Theile von der Größe des Divisors zerlegen. $6 = 2 \times 3$. Mithin ist 3 in 6 2mal enthalten; 6 ist also das 2fache v. 3.

Bei b mußten wir, um zu erkennen, welcher Theil von 3 in 1 enthalten ist, den Divisor in Theile von der Größe des Dividenden zerlegen. $3 = 3 \times 1$. Von den 3 Theilen des Divisors ist nur einer im Dividenden enthalten. 3 liegt in 1 genau $^1/_3$ mal. Der Dividend 1 ist also nur $^1/_3$mal so groß, als der Divisor 3.

Bei c mußten wir, da 2 weder ein reines Vielfaches, noch ein einfacher Theil von 3 ist, sowohl den Dividenden als den Divisor in gleiche Theile zerlegen, 3 in 3×1 und 2 in 2×1. Von den 3 Theilen des Divisors sind nur 2 im Dividenden enthalten; 3 liegt in 2 genau $^2/_3$mal. Der Dividend beträgt so viel, als $^2/_3$ des Divisors betragen; er ist also $^2/_3$mal so groß als der Divisor.

Bei d mußte zuerst der Dividend, so weit es reichte, in gleiche Theile von der Größe des Divisors, in 2×3, getheilt werden, und in Bezug auf den Rest wäre dann noch dasselbe zu thun gewesen, was bei b geschah. $7 = 2^1/_3 \times 3$. Mithin ist 3 in 7 $2^1/_3$mal enthalten; 7 ist also das $2^1/_3$fache von 3.

Hier waren Divisor und Dividend ganze Zahlen. Sind es Brüche, so verhält sichs eben so. An die Stelle der Ganzen treten dann Theile, die, wenn sie nicht schon von gleicher Größe und Benennung sind, in gleiche und gleichnamige Theile verwandelt werden und dann in demselben Verhältniß zu einander stehen, wie Ganze.

Was ersehen wir nun daraus? Antwort: daß auch jede Division im Sinne des Enthaltenseins ein Theilen ist. Also, und das ist das Endresultat von unserer Untersuchung, **ist alles Dividiren ein Theilen.**

Gleichwohl ist, wie schon aus dem Bisherigen ersichtlich, zwischen der einen und der andern Divisionsweise ein großer Unterschied, und zwar:

a. In Bezug auf die Operation selbst. Ist z. B. 12 durch 4 zu dividiren, und ich thue es im S. des Enthaltenseins, so habe ich zu suchen, aus wie viel mal 4 die 12 besteht. Ich muß also 12 in 4 + 4 + 4, d. i. 3 × 4 zerlegen. So finde ich, daß 4 in 12 3mal enthalten ist. Will ich aber im S. des Theilens dividiren, also suchen, wie viel der 4. Theil von 12 beträgt; so muß ich 12 in 4 gleiche Theile, d. i. in 3 + 3 + 3 + 3 oder 4 × 3 zerlegen, woraus sich ergibt, daß $^1/_4$ von 12 = 3. Uebrigens ist in beiden Fällen das Resultat (in Betreff der Ziffer) dasselbe. 4 in 12 = 3, und $^1/_4$ von 12 = 3. Es hat dieß aber seinen natürlichen Grund. $^1/_4$ von 4 = 1; also ist $^1/_4$ von 12 so vielmal 1, als 4 in 12 enthalten ist. Da nun 4 in 12 3mal enthalten ist, so muß $^1/_4$ von 12 auch 3 × 1 oder 3 betragen.

b. In Bezug auf die Bedeutung der Zahlen. Das Dividiren im S. des Enthaltenseins ist ein Messen. Es wird gesucht, wie oft eine Zahl an der andern angelegt oder von ihr weggenommen werden kann. Der Divisor ist das Maß, der Dividend das zu Messende. Daher sind beide ihrem Wesen nach gleich und nur ihrer Größe nach verschieden. Beim Rechnen mit benannten Zahlen sind Divisor und Dividend gleichartig benannt. Beiden muß eine und dieselbe Münz-, Maß- und Gewichtseinheit zu Grunde liegen. Darum können wir ohne Weiteres suchen, wie oft 4 alte bayer. Pfd. in 12 dergleichen Pfd., aber nicht, wie oft 4 alte bayer. Pfd. in 12 Zollpfund enthalten sind. Beim Rechnen mit reinen Zahlen sind Divisor und Dividend reine Zahlengrößen. Sie müssen es sein, weil überhaupt nur Größen durch einander gemessen werden können. Und der Quotient? Derselbe sagt, wie vielmal so groß der Dividend ist, als der Divisor. Er zeigt also das Verhältniß beider zu einander an. Daher ist er keine Zahlengröße, sondern eine das „Wie oft" oder „Wievielmal" andeutende Verhältnißzahl und eben darum auch beim Rechnen mit benannten Zahlen eine unbenannte Zahl. Rechnungen mit der angewandten Zahl scheinen zwar das Gegentheil zu beweisen. In der That ist es aber doch so. Ein Beispiel wird es zeigen. Braucht man 5 Mtr. Zeug zu einem Kleide, so geben 75 Mtr. so vielmal 1 Kleid, als 5 Mtr. in 75 Mtr. enthalten sind. 5 Mtr. sind

in 75 Mtr. **15mal** enthalten, also — so schließen wir weiter und verwandeln dadurch die reine Zahl in eine benannte — geben 75 Mtr. 15 × 1 Kleid oder 15 Kleider.

Steht gewöhnlich:	Sollte stehen:
5 Mtr. | 75 Mtr. | 15 Kleider.	5 Mtr. | 75 Mtr. | 15mal.
	15×1 Kl. = 15 Kl.

Beim Dividiren im S. des Theilens wird der Dividend in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zerlegt, und der Quotient zeigt an wie viel ein Theil beträgt. Da überhaupt nur Größen theilbar sind, so muß auch der Dividend eine solche sein. Dieser ist daher beim Rechnen mit reinen Zahlen eine reine Zahlengröße und beim Rechnen mit benannten Zahlen eine benannte Zahl. Dasselbe ist auch der Quotient; denn der Theil kann seinem Wesen nach nichts Anderes sein, als was das Ganze ist. $^1/_4$ von 12 = 3, $^1/_4$ von 12 Mrk. = 3 Mrk. Das Ganze und der Theil stehen aber in einem gewissen Verhältnisse zu einander. Die Funktion, dieß zu bestimmen, hat hier der Divisor. Er sagt, in wie viel gleiche Theile das Ganze zu zerlegen ist, und ist die Theilung ausgeführt, so zeigt er an, welcher oder der wie vielte Theil der Quotient vom Dividenden ist. Wird also im S. des Theilens dividirt, so steht der Divisor als Verhältnißzahl. Beim Rechnen mit benannten Zahlen ist er eben deßwegen unbenannt, und beim Rechnen mit angewandten Zahlen wird diejenige Zahl, die als Divisor zu nehmen ist, zuvor, nämlich durch die Auflösung, erst in eine reine Zahl verwandelt. Wenn man z. B. zu 15 Kleidern 75 Mtr. braucht, so ist zu 1 Kleide der 15. Theil davon erforderlich. Steht daher

nicht so:	sondern so:
15 Kleider | 75 Mtr. | 5 Mtr.	15 | 75 Mtr. | 5 Mtr.

Der Unterschied zwischen den beiden Divisionsformen in Bezug auf die Bedeutung der Zahlen ist also, um es kurz zu sagen, der: bei der Division im S. des Enthaltenseins sind Divisor und Dividend Zahlengrößen, der Quotient hingegen ist eine Verhältnißzahl; bei der Division im S. des Theilens sind Dividend und Quotient die Zahlengrößen und der Divisor ist die Verhältnißzahl.

In diesem Kursus werden übrigens die 2 Divisionsformen so eng als möglich mit einander verbunden.

Der Stufengang ist dem bei der Multiplikation eingehaltenen analog. Was beim Multipliciren der Multiplikator ist, das ist beim Dividiren der Divisor. Dort war für den Stufengang die Anzahl der Stellen des Multiplikators maßgebend; hier entscheidet die Anzahl der Stellen des Divisors. Diese Andeutung mag genügen. Das Nähere ergibt sich aus der Durchführung selbst.

I. Der Divisor ist einstellig.

A. Mündlich und schriftlich.

§. 109.

Der Schüler muß auf dieser Unterrichtsstufe unter allen Umständen dahin gebracht werden, jede Zahl bis Tausend durch jede Grundzahl auch frei im Kopfe sicher und fertig zu dividiren. Die Sicherheit beruht auf der klaren Einsicht, wie eine Zahl in jedem gegebenen Falle zu zerlegen sei, damit der zu suchende Theil ohne Schwierigkeit gefunden werden könne; die Fertigkeit ist die Frucht der Uebung und wird um so leichter erzielt, je mehr man sich der Kürze befleißigt. Da die Zerlegung einer Zahl in ihre theilbaren Bestandtheile nach dem Divisor sich richtet, so muß dieselbe für jeden Divisor, hier also für jede Grundzahl, besonders eingeübt werden. Demgemäß führen wir unsere Schüler zuerst in das Dividiren durch 2 ein, dann in das durch 3 u. s. f.

Im (zweiten) Aufgabenhefte zum Kopfrechnen haben wir die Divisionsübungen in dieser Ordnung sogleich den Uebungen im Addiren, Subtrahiren und Multipliciren angereihet. Es konnte dieses geschehen, weil, wenn das Dividiren der Zahlen von Eins bis Hundert in der von uns bezeichneten und auch im ersten Aufgabenhefte zum Kopfrechnen durchgeführten Weise behandelt wurde, das Dividiren durch die Grundzahlen und das Zerlegen des Dividenden im etwas erweiterten Zahlenraume nur eine Wiederholung und Fortsetzung des unmittelbar Vorausgegangenen ist. Und es ist geschehen, damit die Division, die schwierigste der Zahlenoperationen, nicht bis zur vollständigen Abfertigung der drei übrigen Rechnungsarten, also nicht Monate lang völlig unberücksichtigt bleibe, vielmehr bei ihrem Eintritte als ausschließliche Uebung schon so vorbereitet sei, daß dann sogleich auch mit dem schriftlichen Dividiren begonnen werden könne.

Die in dem Aufgabenhefte getroffene Einrichtung hindert übrigens auch nicht, die dort vorgeschobenen Divisionsübungen bis nach dem Multipliciren aufzusparen und sie dann erst der Reihe nach durchzunehmen.

I. Der Dividend geht bis zum Hundertfachen des Divisors.

§. 110. Das Dividiren durch Zwei.

a. Der Quotient ist eine Grundzahl.

(Mündlich.)

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

In welchen Zahlen von 1 bis 20 geht 2 auf?

In 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

Wie viel ist die Hälfte von 2, von 8, von 6, von 12? ꝛc.

Wie oft ist 2 enthalten in 4, in 10, in 2, in 12, in 8? ꝛc.

Wie viel beträgt die Hälfte der 12 Liter? (6 Liter.)

Wie oft sind 2 Liter in 12 Litern enthalten? (6 mal.)

bb. Der Dividend wird zerlegt.

Wie heißen die Zahlen von 1 bis 20, in welchen 2 nicht aufgeht?

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

Theilen. Wie viel ist die Hälfte von 1?

———½———|——————— (Die Hälfte vom = ½.)

Wie Theilen sich 2 Kinder in 1 Apfel? Wie viel bekommt jedes? Wie theilen sie 3 Aepfel? (Sie theilen zuerst 2 Aepfel und dann einen.) Wie viel bekommt jedes? — Wie theilen sie 5 Aepfel? ꝛc.

Wie suchst du die Hälfte von 7? (7 = 6 + 1; die Hälfte von 6 ist 3, und die Hälfte von 1 ist ½; die Hälfte von 7 ist 3½.)

Dieß bis zur völligen Sicherheit und Fertigkeit!

Enthaltensein. Wie oft ist 2 in 1 enthalten?

• • • • | • • 2 ist in 4 2mal enthalten.
• • • • 2 ist in 2 1mal "
• • • 2 ist in 1 ½mal "

2 ist in 1 nicht ganz, nicht einmal enthalten; 2 liegt in 1 nur mit dem halben Theil; 2 ist in 1 ½mal enthalten. Legt man ein Stäbchen von 2 Dezimeter auf eine Linie von 1 Dezimeter, so fällt von dem Stäbchen nur der halbe Theil in die Linie. 2 Dezimeter sind also in 1 Dezimeter nur ½mal enthalten. 2 liegt in 1 ½mal.

Wie oft liegt 2 in 5, in 9, in 7, in 3? ꝛc. (5 = 4 + 1; 2 liegt in 4 2mal und in 1 ½mal, in 5 also 2½mal.)

Wie viel ist die Hälfte von 9 Meter? (4½ Meter.) Wie oft sind 2 Meter in 9 Meter enthalten? (4½mal.)

(Schriftlich.)

In Reihen: 2 ist in 1 ½ mal enthalten.
2 ist in 2 1 mal "
2 ist in 3 1½mal "
2 ist in 4 2 mal "
u. s. w.

b. Der Quotient ist eine Zehnerzahl.

(Mündlich.)

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

Wiederholt die Zahlen von 1 bis 20, in welchen 2 aufgeht! (2, 4, 6 ꝛc.) — Nehmt nun jede derselben 10mal! (10 × 2 = 20, 10 × 4 = 40, 10 × 6 = 60 . . . . 10 × 20 = 200.) Welche Zahlenreihe hat sich dadurch ergeben?

20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200.

Diese Zahlen nennen wir die Hauptzahlen von 2. Welches sind die Hauptzahlen von 2 im ersten Hundert? Im zweiten Hundert? — Nun theilen wir sie durch 2.

Theilen. Wie viel ist die Hälfte von 2? (1.) Von 2 × 2? (2 × 1.) Von 10 × 2 oder 20? (10 × 1 oder 10.)

Wie viel ist die Hälfte von 4? (2.) Von 2 × 4? (2 × 2.) Von 10 × 4 oder 40? (10 × 2 oder 20.)

Wie viel ist die Hälfte von 6? (3.) Von 2 × 6? (2 × 3.) Von 10 × 6 oder 60? (10 × 3 oder 30.)

So fort bis: die Hälfte von 200 ist 100.

Zuletzt gebe man Fragen, bis die Antwort rasch erfolgt. Wie viel ist die Hälfte von 20? (Die Hälfte von 20 ist 10.) Von 120? (Die Hälfte von 120 ist 60.) rc.

Enthaltensein. Wie oft liegt 2 in 2? (1mal.) In 10 × 2 oder 20? (10 × 1 oder 10mal.)

Wie oft liegt 2 in 4? (2mal.) In 10 × 4 oder 40? (10 × 2 oder 20mal.)

Wie oft liegt 2 in 6? (3mal.) In 10 × 6 oder 60? (10 × 3 oder 30mal.)

So fort bis: 2 ist in 200 100mal enthalten.

Auch dieß bis zur Fertigkeit.

Wie viel beträgt die Hälfte von 140 Liter? (70 Liter.) Wie oft sind 2 Liter in 140 Liter enthalten? (70mal.)

bb. Der Dividend wird zerlegt.

Gegenstand der Operation sind die Zahlen zwischen den Hauptzahlen. Da jede dieser Zahlen aus einer Hauptzahl und einer der Zahlen von 1 bis 19 zusammengesetzt ist, so ist es nicht eigentlich das Theilen, sondern das Zerlegen der Zahlen in ihre theilbaren Bestandtheile, was unser Schüler jetzt zu lernen hat. Wir lassen daher dem Theilen das Zerlegen vorausgehen und beachten auch hierin wieder einen gewissen Stufengang.

Zwischen welchen zwei Hauptzahlen von 2 steht die Zahl 30? (Zwischen 20 und 40.) Die Zahl 70? (Zwischen 60 und 80.) Die Zahl 150? (Zwischen 140 und 160) u. s. w.

Welches ist die nächste Hauptzahl von 2 unter 32? (20.) Unter 75? (60.) Unter 125? (120.) Unter 194? (180) rc.

Zerlege die Zahl, welche ich nenne, in die nächste niedere Hauptzahl von 2 und in den Rest! 27! (27 = 20 + 7.) 32! (32 = 20 + 12) 45! (45 = 40 + 5!) 58! (58 = 40 + 18) u. s. f.

Theilen.

Wie viel ist die Hälfte von 96?

Welches ist die nächste Hauptzahl von 2 unter 96? (80.) Wie heißt der übrige Theil? (16.) Wie viel beträgt die Hälfte von beiden Theilen? (Die Hälfte von 80 ist 40, und die Hälfte von 16 ist 8.) Wovon hast du nun die Hälfte gesucht? (Von 80 + 16 oder 96.) Und wie viel beträgt die Hälfte von 96? (40 + 8 oder 48.) Wie sucht man also die Hälfte von 96? (Man zerlegt 96 in 80 + 16, und sucht dann die Hälfte davon.)

Wie viel beträgt die Hälfte von 175?

(175 = 160 + 15 = 160 + 14 + 1; die Hälfte von 160 = 80; die Hälfte von 14 ist 7; 80 + 7 = 87; und die Hälfte von 1 = $^1/_2$. Die Hälfte von 175 = $87^1/_2$).

Alle diese Uebungen sind bis zur Sicherheit und Fertigkeit fort-

zusetzen, zuerst innerhalb des ersten Hunderts, dann innerhalb des zweiten.

Enthaltensein.

Wie oft ist 2 in 72 enthalten? (72 = 60 + 12; 2 liegt in 60 30mal und in 12 6mal, in 72 also 30 + 6 oder 36mal.)

Wie oft liegt 2 in 125? (125 = 120 + 4 + 1; 2 liegt in 120 60mal und in 4 2mal; 60 + 2 = 62; 2 liegt in 1 $^1/_2$mal; 2 liegt in 125 also $62^1/_2$mal.)

Wie viel beträgt die Hälfte von 154 Pfd.? (154 Pfd. = 140 Pfd. + 14 Pfd.; die Hälfte von 140 Pfd. = 70 Pfd., und die Hälfte von 14 Pfd. = 7 Pfd.; 70 Pfd. + 7 Pfd. = 77 Pfd.; die Hälfte von 154 Pfd. = 77 Pfd.)

Wie oft sind 2 Pfd. in 154 Pfd. enthalten? (154 Pfd. = 140 Pfd. + 14 Pfd.; 2 Pfd. sind in 140 Pfd. 70mal und in 14 Pfd. 7mal, in 154 Pfd. also 70 + 7 oder 77mal enthalten.)

Bei beiden Divisionsformen wird also die zu theilende Zahl auf gleiche Weise zerlegt und ergeben sich auch gleiche Resultate. Aber die Resultate haben eine verschiedene Benennung, und diese hängt von der Frage, von der Aufgabe ab. Die beiden Divisionsformen werden daher am besten in Verbindung mit einander behandelt, doch ist streng darauf zu halten, daß der Frage die Auflösung im Ausdrucke entspreche.

(Schriftlich.)

1)	$^1/_2$ von 72 = ?		2 in 72 = ?
	$^1/_2$ von 60 = 30	oder	2 in 60 = 30
	$^1/_2$ von 12 = 6		2 in 12 = 6
	$^1/_2$ von 72 = 36		2 in 72 = 36
2)	$^1/_2$ von 135 = ?		2 in 135 = ?
	$^1/_2$ von 120 = 60		2 in 120 = 60
	$^1/_2$ von 14 = 7	oder	2 in 14 = 7
	$^1/_2$ von 1 = $^1/_2$		2 in 1 = $^1/_2$
	$^1/_2$ von 135 = $67^1/_2$		2 in 135 = $67^1/_2$

Diese schriftliche Darstellung fördert das Kopfrechnen außerordentlich und ist auch die zweckmäßigste Vorbereitung für das Dividiren im größeren Zahlenkreise. Es muß aber darauf gesehen werden, daß jede Ziffer in die rechte Stelle komme und die Darstellung ein Bild der Ordnung sei. Der Lehrer lasse recht viele Zahlen von 20 bis 200 in dieser Weise durch 2 theilen.

§. 111. Das Dividiren durch Drei.

a. Der Quotient ist eine Grundzahl.

(Mündlich.)

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

In welchen Zahlen von 1 bis 30 geht 3 auf?

In 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.

Man fragt, wie viel der 3te Theil davon betrage, und wie oft 3 darin enthalten sei.

bb. Der Dividend wird zerlegt.

Die Zahlen, welche jetzt zur Behandlung kommen, sind:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28.
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

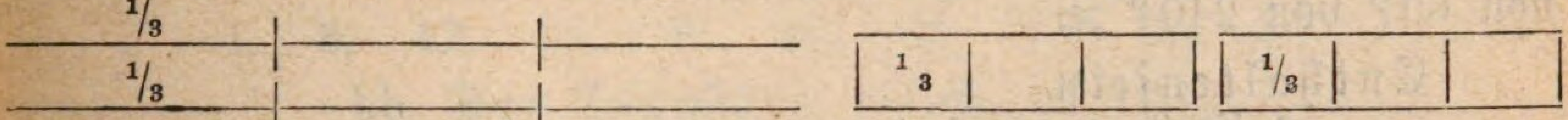
Theilen. Wie viel ist der dritte Theil von 1?


(Der 3te Theil von 1 = 1/3.)

Wie theilen sich 3 Kinder in 1 Lebkuchen? Wie viel bekommt jedes? — Wie theilen sie 4 Aepfel? (Sie theilen zuerst 3 Aepfel und dann einen.) Wie viel bekommt jedes? — Wie theilen sie 7 Aepfel? u. s. w.

Wie suchst du den 3ten Theil von 4? (4 = 3 + 1; der 3te Theil von 3 ist 1, und der dritte Theil von 1 ist 1/3; der 3te Theil von 4 ist also $1^1/_3$.) — Wie viel ist der 3te Theil von 7, 10, 13 ꝛc.

Wie viel ist der 3te Theil von 2?



Der dritte Theil von 1 + 1 = 1/3 + 1/3 oder 2/3; der dritte Theil von 2 = 2/3.

Wie theilen 3 Kinder 2 Lebkuchen miteinander? Wie theilen sie 5 Lebkuchen? Wie 8?

Wie suchen wir also den 3ten Theil von 5? (5 = 3 + 2; der dritte Theil von 3 ist 1, und der dritte Theil 2 ist 2/3; also ist der 3te Theil von 5 = $1^2/_3$. — Wie suchst du den 3ten Theil von 8? von 11? von 14? ꝛc.

Zuletzt Zahlen außer der Ordnung bis zur Fertigkeit.

Enthaltensein. Wie oft ist 3 in 1, in 2 enthalten?

• • • • • • | • • •	3 ist in 6 2 mal enthalten.
• • • • • •	3 ist in 3 1 mal "
• • • •	3 ist in 1 1/3mal "
• • • • •	3 ist in 2 2/3mal "

Legt man ein Stäbchen von 3 Dezimeter auf eine Linie von 1 Dezimeter, so fällt von demselben nur 1/3 in die Linie; legt man das Stäbchen auf eine Linie von 2 Dezimeter, so fallen von demselben 2/3 in die Linie. 3 Dezimeter sind in 1 Dezm. 1/3mal, in 2 Dzm. 2/3mal enthalten. 3 liegt in 1 1/3mal, in 2 2/3mal.

Wie oft liegt nun 3 in 4, in 13, in 16, in 5? ꝛc. (4 = 3 + 1; 3 liegt in 3 1mal und in 1 1/3mal, in 4 also $1^1/_3$mal.)

Wie viel beträgt der 3te Theil von 13 Liter? ($4^1/_3$ Liter.)

Wie oft sind 3 Liter in 13 Liter enthalten? ($4^1/_3$mal.)

(Schriftlich.)

In Reihen. Der 3te Theil von 1 = 1/3
Der 3te Theil von 2 = 2/3
Der 3te Theil von 3 = 1
Der 3te Theil von 4 = $1^1/_3$
u. s. f.

b. Der Quotient ist eine Zehnerzahl.
(Mündlich.)

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

Die Schüler multipliciren die Zahl 3, 6, 9 . . . . 30 mit 10 und bilden hierdurch folgende Zahlenreihe:

30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300.

Das sind die Hauptzahlen von 3. Welches sind die Hauptzahlen von 3 im ersten, (im zweiten, im dritten) Hundert?

Theilen.

$^1/_3$ von 3 ist 1, $^1/_3$ von 30 ist 10 $\times$ 1 oder 10.
$^1/_3$ von 6 ist 2, $^1/_3$ von 60 ist 10 $\times$ 2 oder 20.
$^1/_3$ von 9 ist 3, $^1/_3$ von 90 ist 10 $\times$ 3 oder 30 u. s. w.

Wie viel beträgt der 3te Theil von 90? von 150? von 210? von 60? von 240? rc.

Enthaltensein.

3 ist in 3 1mal, in 30 10mal so oft, also 10mal.
3 ist in 6 2mal, in 60 10 $\times$ 2 oder 20mal.
3 ist in 9 3mal, in 90 10 $\times$ 3 oder 30mal.
u. s. w.

Wie oft ist 3 enthalten in 60, 30, 90; in 120, 180, 150; in 210, 270, 240; in 300?

bb. Der Dividend wird zerlegt.

Zwischen welchen zwei Hauptzahlen von 3 steht die Zahl 40? (Zwischen 30 und 60.) Die Zahl 80? (Zwischen 60 und 90.) Die Zahl 160? (Zwischen 150 und 180) u. s. f.

Wie heißt die nächste Hauptzahl von 3 unter 42? (30.) Unter 55? (30.) Unter 100? (90.) Unter 84? (60.) u. s. f.

Zerlege die Zahl, welche ich nenne, in die nächste niedere Hauptzahl von 3 und in den Rest. 48! (48 = 30 + 18.) 125! (125 = 120 + 5.) 254! (254 = 240 + 14) u. s. w.

Theilen.

Wie viel ist der 3te Theil von 144? (144 = 120 + 24; der 3te Theil von 120 ist 40, und der dritte Theil von 24 = 8; 40 + 8 = 48; der 3te Theil von 144 = 48.)

Wie viel beträgt $^1/_3$ von 200? (200 = 180 + 20 = 180 + 18 + 2; $^1/_3$ von 180 = 60, $^1/_3$ von 18 = 6; 60 + 6 = 66; der 3. Theil von 2 = $^2/_3$; der 3. Theil von 200 = $66^2/_3$.)

Enthaltensein.

Wie oft ist 3 in 87 enthalten? (87 = 60 + 27; 3 ist in 60 20mal und in 27 9mal, in 87 also 29mal enthalten.)

Wie oft ist 3 in 250 enthalten? (250 = 240 + 10 = 240 + 9 + 1; 3 ist in 240 80mal und in 9 3mal enthalten; 80 + 3 = 83; 3 ist in 1 $^1/_3$mal; also ist 3 in 250 $83^1/_3$mal.)

(Schriftlich.)

$^1/_3$ von 175 = ?	3 in 287 = ?
$^1/_3$ von 150 = 50	3 in 270 = 90
$^1/_3$ von 24 = 8	3 in 15 = 5
$^1/_3$ von 1 = $^1/_3$	3 in 2 = $^2/_3$
$^1/_3$ von 175 = $58^1/_3$	3 in 287 = $95^2/_3$

§. 112. Das Dividiren durch die übrigen Grundzahlen

Wie die Zahlen von 1 bis 200 durch 2 und die Zahlen von 1 bis 300 durch 3, so werden die Zahlen von 1 bis 400 durch 4, die Zahlen von 1 bis 500 durch 5 dividirt u. s. w.

Gang und Verfahren sind aus dem Bisherigen ersichtlich. Bei dem Theilen durch 4 wird hiernach folgender Stufengang eingehalten.

a. Der Quotient ist eine Grundzahl.

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40.

bb. Der Dividend wird zerlegt.

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37.
2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38.
3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39.

b. Der Quotient ist eine Zehnerzahl.

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, 400.

bb. Der Dividend wird zerlegt.

Die Zahlen zwischen 40 und 80, zwischen 80 und 120 u. s. f.

Schriftlich werden die Schüler mit Aufgaben der Addition, Subtraktion und Multiplikation, welche man in vermischter Aufeinanderfolge wiederholen läßt, sowie mit Aufgaben der Division, welche in vorbezeichneter Weise aufgelöst werden, beschäftigt. Je fleißiger Letzteres geschieht, um so schneller und gründlicher wird das Gebiet durchgearbeitet werden. Und durchgearbeitet muß es werden, wenn der Schüler zur Sicherheit gelangen soll.

II. Der Dividend übersteigt das Hundertfache des Divisors.

§. 113.

a. Der Dividend übersteigt nicht die Zahl Tausend.

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

Getheilt werden
durch 2 die Zahlen 200, 400, 600, 800, 1000.
durch 3 „ „ 300, 600, 900.
durch 4 „ „ 400, 800.
durch 5 „ „ 500, 1000.

Die Hälfte von 200 = 100; die Hälfte von 400 = 200 2c. 2 ist in 2 1mal, in 200 100mal; in 4 2mal, in 400 200mal 2c. enthalten.

u. s. w.

bb. Der Dividend wird zerlegt.

Wie viel ist 1/2 von 547?	Wie viel ist 1/3 von 547?
547 = 400 + 147	547 = 300 + 247
147 = 140 + 7	247 = 240 + 7
7 = 6 + 1	7 = 6 + 1
1/2 von 400 = 200	1/3 von 300 = 100
1/2 von 140 = 70	1/3 von 240 = 80
1/2 von 6 = 3	1/3 von 6 = 2
1/2 von 1 = 1/2	1/3 von 1 = 1/3
1/2 von 547 = 273 1/2	1/3 von 547 = 182 1/3

In dieser Weise werden einige Zahlen von jedem Hundert durch jede Grundzahl der Reihe nach getheilt.

Zur speciellen Vorbereitung auf das schriftliche Dividiren lasse man einige Aufgaben auch in folgender Weise rechnen. Der Dividend wird an die Wandtafel geschrieben.

Wie oft ist 2 in 684 enthalten?

684 = 6 H. + 8 Z. + 4 E. Wir suchen also, wie oft 2 in 6 H. + 8 Z. + 4 E. enthalten ist.

2 liegt in 6 Einern 3mal, in 6 Hundertern 100 × 3 oder 300mal; 2 liegt in 8 Einern 4mal, in 8 Zehnern 10 × 4 oder 40mal; 2 liegt in 4 E. 2mal.

Also liegt 2 in 6 H., 8 Z. und 4 E. 300mal + 40mal + 2 mal; im Ganzen 342mal. 2 ist in 684 342mal enthalten.

Wie viel beträgt der 3. Theil von 285?

285 = 2 H. + 8 Z. + 5 E. Davon suchen wir den dritten Theil. Der 3. Theil von 2 H. ist nicht 1 H.; wir verwandeln daher die 2 H. in Zehner. 2 H. = 20 Z.; 20 Z. + 8 Z. = 28 Z.

Wir suchen also jetzt den 3. Theil von 28 Zehnern. Da 3 in 28 nicht aufgeht, so denken wir an 27. Der 3. Theil von 27 Z. = 9 Z.; also ist der 3. Theil auch von 28 Z. = 9 Z., und 1 Z. bleibt übrig.

Nun haben wir noch 1 Z. + 5 E. zu theilen. 1 Z. + 5 E. = 15 E.; der 3. Theil von 15 E. = 5 E.

Der 3. Theil von 2 H., 8 Z. und 5 E. = 9 Z. + 5 E. = 95. 1/3 von 285 = 95.

b. Der Dividend ist eine einfache Zahl höherer Ordnung.

aa. Wie oft liegt 2 in 20, 200, 2000, 20000, 200000, 2000000?

2 ist in 2 E. 1mal, in 2 Z. 10mal so oft, also 10mal, in 2 H. 100mal so oft, also 100mal enthalten ꝛc.

Wie oft ist enthalten:

4 in 8, 80, 800, 8000, 80000, 800000, 8000000?
3 in 9, 90, 900, 9000, 90000, 900000, 9000000?

bb. Wie viel ist der halbe Theil von 40, 400, 4000? ꝛc.

Der halbe Theil von 4 = 2; der halbe Theil von 40 oder 4 Z. = 2 Z. oder 20; der halbe Theil von 4 H. = 2 H. ꝛc.

Wie viel beträgt:

1/3 von 60, 600, 6000, 60000, 600000, 6000000?
1/4 von 80, 800, 8000, 80000, 800000, 8000000?

B. Schriftlich.

§. 114. Im Sinne des Enthaltenseins.

Beispiel 1. 3 in 69 =?

Ansatz und Ausrechnung.

```
3 | 6 9 | 2 3
  | 6 : |
  -------
      9
      9
     ---
```

69 = 6 Z. + 9 E.; 3 ist in 6 E. 2mal, in 6 Z. also 20mal. Dieß schreiben wir hinter den Strich, aber nur die Ziffer 2; für die 0 setzen wir einen Punkt. 3 ist 20mal enthalten in 20 × 3; 2 × 3 = 6, 20 × 3 = 60 oder 6 Z.; die 6 Z. schreiben wir unter die 6 Z. und machen einen Strich.

Nun suchen wir, wie oft 3 in den 9 E. liegt. Wir setzen daher die 9 E. herunter. 3 ist in 9 E. 3mal. Die 3 schreiben wir hinter 2, an die Stelle des Punktes. 3 ist 3mal enthalten in 3×3 od. 9; 9 unter 9.

3 ist in 6 Z. 20mal, in 9 E. 3mal, in 69 also 23mal enthalten.

Beispiel 2. 5 in 3479 =?

Ansatz und Ausrechnung.

```
5 | 3 4 7 9 | 6 9 5 4/5
  | 3 0 : : |
  ---------
    4 7 :
    4 5 :
    -----
      2 9
      2 5
      ---
        4
```

3479=3 T. + 4 H. + 7 Z + 9 E. Wie oft ist 5 darin enthalten?

5 ist in 5 T. 1000mal, in 3 T. also nicht 1000mal enthalten. 3 T. = 30 H.; 30 H. + 4 H. = 34 H.; 5 liegt in 34 E. 6mal, in 34 H. also 600mal. Wir schreiben nur die Ziffer 6; für die 2 Nullen setzen wir zwei Punkte, einen in die Zehnerstelle und einen in die Einerstelle. 5 ist 600mal enthalten in 600 × 5; 6 × 5 = 30, 600 × 5 = 30 H.; 30 H. von 34 H. bleiben 4 H. Nun ist noch zu suchen, wie oft 5 in 4 H. 7 Z. und 9 E. enthalten ist.

4 H. = 40 Z.; 40 Z. + 7 Z., welche wir dazu heruntersetzen, = 47 Z.; 5 ist in 47 E. 9mal, in 47 Z. also 90mal enthalten. Wir schreiben nur die Ziffer 9 und zwar in die Zehnerstelle hinter 6. 5 ist 90mal enthalten in 90 × 5; 9 × 5 = 45, 90 × 5 = 45 Z; 45 Z. von 47 Z. bleiben 2 Z. Nun ist noch zu suchen, wie oft 5 in 2 Z. + 9 E. enthalten ist.

2 Z. = 20 E.; 20 E. + 9 E., welche wir dazu herunter ziehen, = 29 E.; 5 ist in 29 E. 5mal enthalten. Diese 5 setzen wir in die Einerstelle hinter 9; 5 ist 5mal enthalten in 5×5 oder 25; 23 von 29 bleibt 4.

5 ist in 1 $^1/_5$mal, in 4 also $^4/_5$mal enthalten.

5 ist in 3 T. 4 H. 7 Z. und 9 E. oder in 3479 695$^4/_5$mal enthalten.

So werde längere Zeit bei jeder Ausrechnung gesprochen. Auf den Vortheil, alle Einheiten bloß als Einerzahlen zu behandeln, kommt der Schüler nach und nach von selbst. Man hat nicht nöthig, es zu fördern. Vielmehr sei der Lehrer besorgt, daß dieß nicht zu bald und nicht in dem Maße geschehe, daß das Bewußtsein von dem wirklichen Werthe der Ziffern, von der eigentlichen Zahlengröße, ganz verschwinde. Dasselbe darf nie untergehen, auch beim Schnellrechnen nicht.

§. 115. Im Sinne des Theilens.

Beispiel 1. $^1/_3$ von 69 = ?

Ansatz und Ausrechnung.

Z. E. | Z. E.
3 | 6 9 | 2 3
6 :
9
9

Um $^1/_3$ von 69 zu erhalten, so muß ich 69 in 3 gleiche Theile theilen. Darum setze ich vor die Zahl 69 die Zahl 3.

69 = 6 Z. 9 E. Die Frage ist also: Wie viel beerägt $^1/_3$ von 6 Z. und von 9 E.?

Theilt man 6 Z. in 3 gleiche Theile, so kommen auf 1 Theil 2 Z.; diese setzen wir rechts. In die Stelle der Einer aber setzen wir einen Punkt. Getheilt sind nun 3 × 2 Z. oder 6 Z. Was getheilt ist, setzen wir unter und ziehen es ab. Wir setzen also 6 Z. unter 6 Z.; 6 Z. von 6 Z. geht auf. Also ist kein Zehner mehr übrig. Nun sind noch 9 E. zu theilen. Bevor wir sie theilen, ziehen wir sie herunter.

Theilt man 9 E. in 3 gleiche Theile, so kommen auf 1 Theil 3 Einer. Die setzen wir wieder rechts. Wir haben nun abermals 3 × 3 E. oder 9 E. getheilt. 9 E. von 9 E. geht auf.

$^1/_3$ von (6 Z. + 9 E.) sind also 2 Z. + 3 E. oder 23 E.; der dritte Theil von 69 = 23.

Rechne ich 40 + 29 = 69, so habe ich addirt. Rechne ich: 69 — 29 = 40, so habe ich subtrahirt. Rechne ich: 3 × 23 = 69, so habe ich multiplicirt. Rechne ich aber: 3 ist in 69 23mal, oder: $^1/_3$ von 69 = 23, so habe ich dividirt. In diesem Falle ist die Zahl 69 das Ganze, der Dividend; die Zahl 23 ist $^1/_3$ von 69, sie ist der gesuchte Theil, der Quotient; und die Zahl 3, welche anzeigt, wie die Zahl 69 zu theilen war, ist der Theiler, der Divisor.

Beispiel 2. $^1/_5$ von 2347 = ?

Ansatz und Ausrechnung.

5 | 2 3 4 7 | 4 6 9 $^2/_5$
2 0 : :
3 4 :
3 0 :
4 7
4 5
2

2347 = 2 T. + 3 H. + 4 Z. + 7 E. Die Frage ist also: Wie viel ist $^1/_5$ von 2 T. 3 H. 4 Z. u. 7 E.?

$^1/_5$ von 2 T. ist nicht 1 T. Wir verwandeln daher die 2 T. in H.; 2 T. = 20 H.; 20 H. + 3 H. = 23 H.; $^1/_5$ von 23 H. = 4 H.; wir schreiben aber nur die Ziffer 4; in die Stellen der Zehner und Einer setzen wir Punkte. 4 H. sind $^1/_5$ von 5 × 4 H. oder 20 H.; 20 H. von 23 H. bleiben 3 H. Von den 2 T. 3 H. 4 Z. und 7 E. sind nun 20 H. oder 2 T. getheilt. Zu theilen sind also noch 3 H. 4. und 7 E.

$^1/_5$ von den 3 H. ist kein H. mehr. Wir machen sie daher zu Zehnern und nehmen die 4 Z. dazu herunter. 3 H. + 4 Z. = 34 Z.; $^1/_5$ von 34 Z. = 6 Z.; diese 6 Z. setzen wir hinter die 4 H. in die 2te Stelle. 6 Z. sind $^1/_5$ von 5 × 6 Z. oder 30 Z.; 30 Z. von 34 Z. bleiben 4 Z.

Nun haben wir noch $^1/_5$ von 4 Z. + 7 E. zu suchen. $^1/_5$ von 4 Z. ist kein Z. mehr. Daher machen wir sie zu E. und führen die 7 E. dazu herunter. 4 Z. + 7 E. = 47 E.; $^1/_5$ von 47 E. = 9 E.; diese 9 E. setzen wir hinter die 6 Z. in die erste Stelle. 9 E. sind $^1/_5$ von 5 × 9 oder 45 E.; 45 E. von 47 E. bleiben 2 E.

Nun theilen wir auch die 2 E.; der 5. Theil von 1 = $^1/_5$; der 5. Theil von 2 = $^2/_5$.

Also ist der 5. Theil von 2 T. 3 H. 4 Z. und 7 E. = 4 H. 6 Z. 9 E. und $^2/_5$; der 5. Th. von 2347 = 469$^2/_5$.

§. 116 Bemerkungen zum Vorigen.

a. Wir haben nun gezeigt, wie im Sinne des Enthaltenseins und im Sinne des Theilens schriftlich zu dividiren ist. Der Lehrer entscheide sich für die eine oder für die andere Form. Denn die Division in beiden durchzuführen, ist zwar nothwendig in Präparandenanstalten und in Seminarien, weil dem Lehrer beide bekannt und geläufig sein müssen, nicht aber in der Volksschule. Hier drängt die Kürze der Zeit zur Vereinfachung. Wir sind dafür, daß das schriftliche Dividiren im Sinne des Enthaltenseins durchgeführt und geübt werde. Die Ausdrucksweise, deren man sich gewöhnlich bedient, z. B. „3 in 27 geht 9 mal" ist streng genommen, auch nur dieser Divisionsform angemessen. Und ist ein gewisser Theil von einer gegebenen Zahl zu suchen, so reicht ein einfacher Schluß hin, zu erkennen, daß man diesen Theil auch findet, indem man sucht, wie oft der Divisor im Dividenden enthalten ist. Ein Beispiel wird es zeigen.

$^1/_6$ von 2142 = ?

$^1/_6$ von 6 = 1, von 2 × 6 = 2 × 1, von 3 × 6 = 3 × 1; also ist $^1/_6$ von 2142 so vielmal 1, als 6 in 2142 enthalten ist.

```
6 | 2 1 4 2 | 3 5 7
  | 1 8 : : |
  -----
      3 4
      3 0 :
    -------
        4 2
        4 2
        ---
```

6 ist in 2142 357mal enthalten; daher ist $^1/_6$ von 2142 = 357 × 1 oder 357.

b. Besondere Aufmerksamkeit ist erforderlich, wenn der Divisor nicht in jedem Theildividenden enthalten ist. Z. B.

```
6 | 183042 | 30507   kurz: 6 | 183042 | 30507 × 6
  | 18.... | ....            | 18.... | 183042
     3...                        30..
     0....                       30..
     30..                          42
     30..                          42
       4.
       0.
       42
       42
```

Für diesen Fall ist es besonders gut, gleich anfangs zu bestimmen, wie viele Stellen der Quotient erhalten wird. Dieß ist sehr leicht. Zuerst sieht man zu, wie viele Stellen des Dividenden genommen werden müssen, um die erste Stelle des Quotienten zu erhalten. So viele Ziffern dann vom Dividenden noch vorhanden sind, so viele Stellen erhält der Quotient noch zu der einen, die er schon hat, und dieß wird durch eben so viel Punkte angedeutet.

Nach unserer Rechnung ist 6 in 183042 30507mal enthalten. Ist dieß wirklich der Fall, so muß 30507 × 6 oder 6 × 30507 genau wieder 183042 geben. Dieß als Probe, die man regelmäßig anwenden läßt. Gibt die Division einen Rest, so ist derselbe dem Produkte zuzuzählen.

Aufg. z. Kopf- u. Ifferr. Ueb. 15 u. 16.

II. Der Divisor ist zweistellig.

A. Mündlich.

§. 117. Der Divisor eine reine Zehnerzahl.

1 Z. ist in 1 Z., wie 1 in 1, 1mal enthalten.
1 Z. ist in 2 Z., wie 1 in 2, 2mal "
2 Z. sind in 2 Z., wie 2 in 2, 1mal "
2 Z. sind in 4 Z., wie 2 in 4, 2mal "

Wie oft ist 2 in 4 enthalten? Wie oft sind 2 Z. in 4 Z. enthalten? Etwa 2 zehnermal? Wie oft können 2 E. von 4 E. weggenommen werden? Wie oft 2 Z. von 4 Z.? Also sind 2 Z. in 4 Z. genau so oft enthalten, als 2 in 4 enthalten ist, nämlich 2mal.

Wie oft sind enthalten

2 Z. in 4 Z.? 3 Z. in 6 Z.? 4 Z. in 8 Z.?
2 Z. in 6 Z.? 3 Z. in 9 Z.? 4 Z. in 12 Z.?

20 in 120 = ? (Wie oft ist 20 in 120 enthalten?)

Ausr. 20 = 2 Z, 120 = 12 Z.; 2 Z. sind in 12 Z., wie 2 in 12, 6mal enthalten; 20 in 120 = 6mal.

Wie oft ist enthalten

20 in 160?	40 in 240?	60 in 540?	80 in 320?
20 in 280?	40 in 440?	60 in 840?	80 in 960?
30 in 150?	50 in 250?	70 in 420?	90 in 720?
30 in 390?	50 in 600?	70 in 910?	90 in 990?

§. 118. Der Divisor eine zusammengesetzte Zahl.

Das Verhältniß des Divisors zum Dividenden wird erkannt oder gefunden

a. Durch unmittelbare Auffassung.

11 in 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 =?

Ausr. 22 = 2 × 11; also ist 11 in 22 2mal enthalten. 33 = 3 × 11; also ist 11 in 33 3mal enthalten u. s. f.

Wie oft liegt

12 in 24, 36, 48, 60 ꝛc.	16 in 32, 48, 64, 80 ꝛc.
13 in 26, 39, 52, 65 ꝛc.	18 in 36, 54, 72, 90 ꝛc.
14 in 28, 42, 56, 70 ꝛc.	24 in 48, 72, 96, 120 ꝛc.
15 in 30, 45, 60, 75 ꝛc.	25 in 50, 75, 100, 125 ꝛc.

b. Durch Vergleichung der gleichnamigen Einheiten.

64 in 128 =? (An die Wandtafel notirt.)

64 = 6 Z. + 4 E.; 128 = 12 Z. + 8 E. Die 6 Z. sind in den 12 Z., sowie die 4 E. in den 8 E. 2mal enthalten; 64 liegt in 128 2mal; denn 2 × 64 = 128.

Wie oft ist enthalten

23 in 69?	54 in 108?	43 i. 129?	74 i. 148?
32 in 96?	71 in 639?	52 i. 208?	82 i. 328?
34 in 68?	21 in 147?	61 i. 427?	93 i. 279?

c. Durch Vergrößerung des Dividenden.

48 in 475 =?

475 + 5 = 480; 48 ist in 480 10mal, in 475 also nicht 10mal, sondern nur 9mal; 48 ist genau 9mal in 9 × 48 oder 432; 432 von 475 bleibt 43; also ist 48 in 475 9mal, und 43 bleibt Rest.

36 in 180?

36 ist in 360 10mal, in 180 oder $\frac{1}{2}$ × 360 nur $\frac{1}{2}$mal so oft, also nur 5mal enthalten.

d. Durch Verkleinerung oder Vergrößerung des Divisors.

21 in 150 =?

Ich suche, wie oft 20 in 150 enthalten ist. 20 = 2 Z., und 150 = 15 Z.; 2 Z. in 15 Z. oder 2 in 15 = 7mal; 21 ist 7mal enthalten in 7 × 21 oder 147; 147 von 150 bleibt 3; 21 ist in 1 $\frac{1}{21}$mal, in 3 $\frac{3}{21}$mal, in 150 also $7\frac{3}{21}$mal enthalten.

19 in 140 =?

Ich suche, wie oft 20 in 140 liegt. 2 Z. sind in 14 Z., wie 2 E. in 14 E., 7mal; 19 ist 7mal enthalten in 7 × 19 oder 133; 133 von 140 bleibt 7; 19 ist in 7 noch $\frac{7}{19}$mal. Also ist 19 in 140 $7\frac{7}{19}$mal enthalten.

Zerlegung des Divisors in Faktoren.

1) Wie theilt man einen Apfel, eine Linie in 4 gleiche Theile? (Man theilt das Ganze in 2 gleiche Theile und jeden derselben wieder in 2 gleiche Theile.)

Nun ist das Ganze in 2 $\times$ 2 oder in 4 gleiche Theile getheilt. Der wie vielte Theil vom Ganzen ist nun 1 Theil? Wie erhält man also den 4. Theil von einem Ganzen? (Man sucht zuerst die Hälfte und von dieser wieder die Hälfte.) Sucht nun eben so den 4. Theil von 12, 30, 46, 70, 100!

2) Wie theilt man einen Apfel, eine Linie in 6 gleiche Theile?

a. b.

Man theilt das Ganze in 2 gleiche Theile und jeden Theil wieder in 3 gleiche Theile, oder man theilt das Ganze in 3 gleiche Theile und jeden Theil wieder in 2 gleiche Theile.

Nun ist das Ganze bei a in 2 $\times$ 3, bei b in 3 $\times$ 2 oder in 6 gleiche Theile getheilt. Der wie vielte Theil vom Ganzen ist hier 1 Theil? Wie erhält man also den 6. Theil von einem Ganzen? (Man sucht zuerst die Hälfte und dann von der Hälfte den 3. Theil, oder man sucht zuerst den 3 Theil und von diesem den halben Theil.)

Man zerlegt also 6 in 3 $\times$ 2 und theilt entweder zuerst durch 2 und dann durch 3, oder zuerst durch 3 und hernach durch 2.

3) Wie läßt sich der 6. Theil von 150 bestimmen?

a. Ich theile 150 sogleich durch 6 und rechne: 150 = 120 + 30; $^1/_6$ von 120 = 20, und $^1/_6$ von 30 = 5; 20 + 5 = 25.

b. Ich suche zuerst $^1/_2$ von 150 und von der Hälfte ein Drittel. 150 = 140 + 10; die Hälfte von 140 + 10 = 70 + 5 oder 75, und $^1/_3$ von 75 = 25.

c. Ich suche zuerst $^1/_3$ von 150 und von diesem Drittel die Hälfte. $^1/_3$ von 150 = 50, und die Hälfte von 50 = 25.

Welche Ausrechnung ist die bequemste, und warum?

Daß auf dieser Stufe nur solche Zahlen als Dividenden zu nehmen seien, welche wenigstens durch einen der beiden Faktoren theilbar sind, und daß durch diesen Faktor auch immer zuerst zu theilen sei, versteht sich wohl von selbst.

$^1/_{12}$ von 150	$^1/_{18}$ v. 426	$^1/_{24}$ v. 300	$^1/_{30}$ v. 850
$^1/_{15}$ von 180	$^1/_{20}$ v. 540	$^1/_{25}$ v. 365	$^1/_{32}$ v. 680
$^1/_{16}$ von 300	$^1/_{21}$ v. 175	$^1/_{28}$ v. 630	$^1/_{45}$ v. 720

B. Schriftlich.

§ 119. Verfahren.

Beispiel 1. 40 in 3160 = ?

```
40 | 3160 |  79 × 40
   | 280  |  -------
   -----     3160
     360
     360
     ---
```

3160 = 3 T. + 1 H. + 6 Z. + 0 E.
40 in 3 geht nicht 1mal, in 3 Tausendern also nicht 1000mal.

3 T. + 1 H. = 31 H.
40 in 31 geht nicht 1mal, in 31 Hundertern also nicht 100mal.

31 H. + 6 Z. = 316 Z.
40 in 316 geht. Aber wie oft? Ich suche, wie oft 4 Z. in 31 Z. enthalten sind. 4 Z. sind in 31 Z. so oft, als 3 in 31, nämlich 7mal; 7 × 40 = 280; 280 von 316 bleibt 36.

40 liegt in 316 E. 7mal, und 36 E. bleiben übrig; also ist 40 in 316 Z. 70mal, und 36 Z. bleiben im Rest.

36 Z. + 0 E. = 360 E. Wie oft liegt nun 40 in 360? So oft als 4 Z. in 36 Z. oder so oft als 4 in 36, nämlich 9mal; 9 × 40 = 360; 360 von 360 geht auf.

Also ist 40 in 3160 79mal enthalten. Ist aber 40 in 3160 wirklich 79mal enthalten, so muß 79 × 40 oder 40 × 79 wieder 3160 geben. Probe.

Anm. Die Aufgabe läßt sich auch so ausrechnen: 40 = 4 Z., und 3160 = 316 Z.; 4 Z. sind in 316 Z. so oft enthalten als 4 in 316. Man streicht also von jeder Zahl die Null und dividirt dann 316 durch 4. Wir bringen diese vereinfachte Weise auch, aber erst später. Jetzt soll der Schüler in das Verfahren eingeführt werden, mit 2stelligen Zahlen zu dividiren. Und dieß geschieht am besten durch Rechnungen, bei denen der Divisor eine reine Zehnerzahl ist. Der Zweck wird jedoch nur erreicht, wenn so verfahren wird, wie oben gezeigt worden ist.

Beispiel 2. 21 in 672 =?

Ausrechnung.

```
21 | 672 | 32
   | 63  |
   -----
      42
      42
      --
```

672 = 6 H. + 7 Z. + 2 E.
21 in 6 geht nicht 1mal, in 6 Hundertern also nicht 100mal.

6 H. + 7 Z. = 67 Z.
21 in 67 geht. Aber wie oft? Ich suche, wie oft die 2 Z. in den 6 Z. enthalten sind. 2 Z. sind in 6 Z. 3mal. Ist aber auch 21 in 67 3mal enthalten? Ja, wenn 3 × 21 von 67 weggenommen werden kann. 3 × 21 = 63; 63 von 67 bleibt 4. Es geht.

21 liegt in 67 E. 3mal, und 4 E. bleiben übrig; also ist 21 in 67 Z. 30mal, und 4 Z. bleiben im Rest.

4 Z. + 2 E. ist 42 E. Wie oft ist 21 darin enthalten? 42 = 2 × 21; also ist 21 in 42 E. 2mal enthalten; 2 × 21 = 42. Geht auf.

Mithin ist 21 in 672 32mal enthalten. Probe!

Beispiel 3. 36 in 12852 = ?

Ausrechnung.

```
36 | 12852 | 357
   | 108   |
   -----
     205
     180
     ----
      252
      252
      ----
```

12852 = 1 ZT. + 2 T. + 8 H. + 5 Z. + 2 E.

Da der Theiler eine zweistellige Zahl ist, so kann er in einer einstelligen nicht einmal enthalten sein. Daher nehmen wir sogleich die zwei ersten Stellen zusammen.

1 ZT. + 2 T. = 12 T.

36 in 12 geht nicht 1mal, in 12 Tausendern also nicht 1000mal.

12 T. + 8 H. = 128 H.

36 in 128 geht. Aber wie oft? Wie oft sind die 3 Z. in den 12 Z.? (4mal.) Sind die 6 E. in den 8 E. auch 4mal? Nein! Also geht's nicht 4mal. Wir nehmen es daher 3mal. 36 ist 3mal enthalten in 3 × 36; 3 × 36 = 108; 108 von 128 bleibt 20.

36 liegt in 128 E. 3mal, und 20 E. bleiben übrig; also ist 36 in 128 H. 300mal, und 20 H. bleiben übrig.

20 H. + 5 Z. = 205 Z. Wir suchen zunächst, wie oft 36 in 205 E. enthalten ist.

Wie oft sind die 3 Z. in den 20 Z.? (6mal.) Kann 6 × 36 von 205 weggenommen werden? (6 × 36 = 216.) Nein! Also geht's nicht 6mal. Wahrscheinlich geht's 5mal. 36 ist 5mal enthalten in 5 × 36; 5 × 36 = 180; 180 von 205 bleibt 25.

36 liegt in 205 E. 5mal, und 25 E. bleiben übrig; also ist 36 in 205 Z. 50mal, und 25 Z. bleiben im Rest.

25 Z. + 2 E. = 252 E.; 3 Z. sind in 25 Z. 8mal; 36 ist 8mal enthalten in 8 × 36; 8 × 36 = 288. Also geht's nicht 8mal. Wahrscheinlich geht es 7mal. 7 × 36 = 252; 252 von 252 geht auf.

Die meiste Schwierigkeit hat es, mit Zahlen wie 19, 29, 39 &c., dann 18, 28, 38 u. s. f. zu dividiren. Man kann sich's übrigens dadurch erleichtern, daß man beim Suchen der Theilquotienten für den gesetzten Theiler die nächst höhere reine Zehnerzahl sich denkt.

Beispiel 4. 19 in 110177 = ?

Ausrechnung.

```
19 | 110177 | 5798
   |  95... |
   ------
     151
     133
     ----
      187
      171
      ----
       167
       152
       ----
        15
```

Anstatt 19 denke ich mir 20. So oft 20 in einer Zahl enthalten ist, so oft liegt jedenfalls auch 19 darin.

Um also zu finden, wie oft 19 in 110 enthalten ist, so suche ich, wie oft 20 darin liegt. 20 in 110 oder 2 Z. in 11 Z. oder 2 in 11 geht 5mal. Also ist auch 19 in 110 5mal enthalten. 19 liegt genau 5mal in 5 × 19 oder 95 u. s. w.

Hierbei kann höchstens vorkommen, daß der wirkliche Divisor 1mal öfter im Theildividenden enthalten ist, als der angenommene. Z. B.

```
18 | 1 3 4 9 7 4 | 6̸ 7
   | 1̸ 0̸ 8      |
   -------
       2̸ 6̸
     1 2 6
     -----
         8
```

Anstatt 18 nehme ich 20; 20 in 134 oder 2 Z. in 13 Z. oder 2 in 13 liegt 6mal. 18 liegt 6mal in 6 × 18 oder 108; Rest 26. So viel darf nicht bleiben. 134 = 108 + 26; 18 ist in 108 6mal und in 26 auch noch einmal; also ist 18 in 108 + 26 oder in 134 6mal + 1mal oder 7mal enthalten; 7 × 18 = 126; Rest 8. Und so weiter.

Aufg. z. Kopf- und Zifferr. Uebung 17.

III. Der Divisor ist drei- und mehrstellig.

§. 120. Mündlich.

a. Wie oft ist enthalten

1 E. in 1 E.? 1 Z. in 1 Z.? 1 H. in 1 H.? 1 T. in 1 T.? ꝛc.
1 E. in 4 E.? 1 Z. in 5 Z.? 1 H. in 4 H.? 1 T. in 4 T.? ꝛc.

Wie oft sind enthalten

2 E. in 4 E.? 2 Z. in 4 Z.? 2 H. in 4 H.? 2 T. in 4 T.? ꝛc.
3 E. in 9 E.? 3 Z. in 9 Z.? 3 H. in 9 H.? 3 T. in 9 T.? ꝛc.

b. 400 in 1200 =?

400 = 4 H., und 1200 = 12 H.; 4 H. sind in 12 H. 3mal; den 4 H. sind dreimal enthalten in 3 × 4 H. oder 1200.

3000 in 18000 =?

3 T. sind in 18 T. 6mal; denn 3 T. sind 6mal enthalten in 6 × 3 T. oder 18000.

Wie oft ist enthalten

200 in 1600?	600 in 2400?	2000 in 16000?	6000 in 48000?
300 in 2100?	700 in 4200?	3000 in 21000?	7000 in 63000?
400 in 3600?	000 in 6400?	4000 in 32000?	8000 in 40000?
500 in 2500?	800 in 2700?	5000 in 45000?	9000 in 36000?

c. Wie oft liegt 110 in 220, 330, 440, 550, 660 ꝛc.?

220 = 2 × 110; also ist 110 in 220 2mal; 330 = 3 × 110, also ist 110 in 330 3mal ꝛc.

Wie oft liegt 1200 in 2400, 3600, 4800, 6000 ꝛc.?

2400 = 2 × 1200, also ist 1200 in 2400 2mal; 3600 = 3 × 1200, also ist 1200 in 3600 3mal ꝛc.

Wie oft ist enthalten

130 in 260, 390, 520, 650 ꝛc.	1400 in 2800, 4200, 5600 ꝛc.
150 in 300, 450, 600, 750 ꝛc.	1600 in 3200, 4800, 6400 ꝛc.
180 in 360, 540, 720, 900 ꝛc.	2400 in 4800, 7200, 9600 ꝛc.

d. Nachstehende Aufgaben werden an die Wandtafel notirt und beurtheilt:

201 in 804	111 in 777	2003 in 6009	1231 in 3693
103 in 309	213 in 426	3020 in 6040	4234 in 8468
230 in 690	321 in 963	4036 in 8072	2112 in 8448
340 in 680	224 in 448	1250 in 3750	2423 in 7269

§. 121. Schriftlich.

Beispiel 1. 654 in 5949120 =?

Ausrechnung.

```
654 | 5949120 | 9096
      5886
      ----
        6312
        5886
        ----
         4260
         3924
         ----
          336
```

Der Divisor hat 3 Stellen; daher nehme ich auch 3 Stellen vom Dividenden.

5 Mill. + 9 HT. + 4 ZT. = 594 ZT.

654 in 594 geht nicht 1mal, in 594 ZT. also nicht 10000mal.

594 ZT. + 9 T. = 5949 T.

654 in 5949 geht. Aber wie oft? 6 H. in 59 H. oder 6 in 59 geht 9mal; 9 × 654 = 5886, Rest 63.

654 E. sind in 5949 E. 9mal, in 5949 T. also 9000mal, und 63 T. bleiben im Reste.

63 T. + 1 H. = 631 H.

654 in 631 geht nicht 1mal, in 631 H. also nicht 100mal. Ich setze daher an die Stelle der H. eine Null. (Warum muß dieß geschehen?)

631 H. + 2 Z = 6312 Z.

654 in 6312 geht. Aber wie oft? 654 in 654 geht 1mal, in 654 Z. oder 6540 E. 10mal, in 6312 also nicht 10mal, sondern nur 9mal. 9 × 654 = 5886; Rest 426.

645 in 6312 E. ist 9mal, in 6312 Z. also 90mal, und 426 Z. bleiben im Rest.

426 Z. + 0 E. = 4260 E.

654 in 4260 geht. Die 6 H. sind in den 42 H. genau 7mal; aber 54 ist in 60 nicht 7mal; daher geht es nur 6mal. 6 × 654 = 3924; Rest 336.

Beispiel 2. 1950 in 1324086 = ?

Ausrechnung.

```
1 9 5 0 | 1 3 2 4 0 8 6 |   6 7 9 × 1 9 5 0
        | 1 1 7 0 0     |       3 3 9 5 0
            1 5 4 0 8         6 1 1 1 .
            1 3 6 5 0         6 7 9 . 3 6
              1 7 5 8 6     1 3 2 4 0 8 6
              1 7 5 5 0
                    3 6
```

Der Divisor hat 4 Stellen; daher nehmen wir auch 4 vom Dividenden.

1 Mill. + 3 Ht. + 2 Zt. + 4 T. = 1324 T.
1950 in 1324 geht nicht 1mal.

1324 T. + 0 H. = 13240 H.
1950 in 13240 geht. Aber wie oft? Wie finde ich es? Ich denke mir statt 1950 die Zahl 2000; 2 T. sind in 13 T. 6mal; 6 × 1950 = 11700, Rest 1540.

1950 ist in 13240 E. 6mal, in 13240 H. also 600mal enthalten, und 1540 H. bleiben im Rest.

1540 H. + 8 Z. = 15408 Z.
Wie oft liegt 1950 in 15408? 2 T. sind in 15 T. 7mal; 7 × 1950 = 13650, Rest 1758.

1950 ist in 15408 E. 7mal, in 15408 Z. also 70mal, und 1758 Z. bleiben im Reste.

1758 Z. + 6 E. = 17586 E.
Wie oft liegt 1950 in 17586? 2 T. sind in 17 T. 8mal; 8 × 1950 = 15600, Rest 1986. In diesem Reste ist 1950 noch einmal enthalten. Es geht also 9mal. 9 × 1950 = 17550, Rest 36.

So wird in allen Fällen verfahren, wenn der Divisor einer reinen Hunderter- oder Tausenderzahl ziemlich nahe steht.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr., Uebung 18 u. 19.

§. 122. Abkürzungen.

a. Wenn der Divisor eine Grundzahl ist.

```
                 6 2 3 1
Beispiel: 7 | 3 4 5 4 6 | 4 9 3 5 1/7
```

oder

$$\frac{3\,4\,5\,4\,6}{7} = 4\,9\,3\,5\ ^1/_7$$

7 in 34 geht 4mal; (4 × 7 = 28) Rest 6.
7 in 65 geht 9mal; (9 × 7 = 63) Rest 2.
7 in 24 geht 3mal; (3 × 7 = 21) Rest 3.
7 in 36 geht 5mal; (5 × 7 = 35) Rest 1.
7 in 1 geht $^1/_7$mal.

Das Eingeklammerte wird nicht notirt.

b. Wenn Divisor und Dividend am Ende Nullen haben.

Erstes Beispiel: 1 0̸ | 8 4 0̸ | 8 4

10 = 1 Z.; 840 = 84 Z.; 1 Z. ist in 84 Z. eben so oft enthalten, als 1 E. in 84 E., nämlich 84mal. Oder: Der 10. Theil von 8 H. = 8 Z., und der 10. Theil von 4 Z. = 4 E. Aus 8 H. + 4 Z. werden 8 Z. + 4 E., wenn man die 8 in die 2te Stelle und die 4 in die erste Stelle versetzt; beides geschieht zugleich, indem man die Null in der Einerstelle streicht.

Zweites Beispiel: 4 0̸ | 3 7 6 0̸ | 9 4

40 = 4 Z., und 3760 = 376 Z.; 4 Z. sind in 376 Z. eben so oft enthalten als 4 in 376, nämlich 94mal. Oder: 40 = 4 × 10; ich theile zuerst durch 10, indem ich von beiden Zahlen die Null streiche, und dann theile ich den 10. Theil, d. i. 376 noch durch 4.

Drittes Beispiel: 7 5 0̸ | 9 8 0 0̸ | 1 3 5/75
7 5
2 3 0
2 2 5
5

750 = 75 Z.; 9800 = 980 Z.; 75 Z. sind in 980 Z. eben so oft enthalten, als 75 E. in 980 E.; 75 in 980 = 13 5/75mal. Oder: 750 = 75 × 10. Ich suche zuerst den 10. Theil, indem ich von beiden Zahlen eine Null streiche, und von 980 den 75. Theil.

Viertes Beispiel: 1 0̸ 0̸ | 7 2 0̸ 0̸ | 7 2

100 = 1 H., und 7200 = 72 H.; 1 H. ist in 72 H. eben so oft enthalten, als 1 in 72, nämlich 72mal. Oder: Der 100. Theil von 1 H. = 1, und der 100. Theil von 72 H. = 72 × 1 oder 72. Man erhält also den 100. Theil von einer Zahl, indem man die zwei Stellen zur rechten Hand durch- (oder ab-) streicht.

Fünftes Beispiel: 4 5 0̸ 0̸ | 3 6 0 0̸ 0̸ | 8
3 6 0

4500 = 45 H., und 36000 = 360 H.; 45 H. in 360 H. = 45 in 360 = 8. Oder: 4500 = 45 × 100. Ich suche zuerst den 100. Theil, indem ich von beiden Zahlen 2 Nullen streiche, und von 360 den 45. Theil.

Sechstes Beispiel: 5 4 0 0̸ 0̸ | 4 1 5 6 0̸ 0̸ | 7 376/540
3 7 8 0
3 7 6

Sind die Divisionsaufgaben im Heftchen (Stufe I—IV) ohne Anwendung des soeben bezeichneten abgekürzten Verfahrens gerechnet; so werden sie dann nochmal durchgerechnet mit Anwendung desselben. Durch diese Wiederholung gelangen die Schüler erst recht zu der Sicherheit und Fertigkeit, zu der sie kommen müssen.

Das nachbezeichnete abgekürzte Verfahren, wobei die Produkte aus dem Divisor und den einzelnen Stellen des Quotienten nicht untergesetzt, sondern sogleich abgezogen werden, ist höchstens für begabte und bereits geübte Schüler. In Präparandenschulen sollte dasselbe jedoch wegen seines bildenden Einflusses auf Denkkraft und Gedächtniß unter allen Umständen Anwendung finden.

```
6 7 9 | 5 9 6 1 6 | 8 7        Oder: 5 9 6 1 6 : 6 7 9 = 8 7
          5 2 9 6                        5 2 9 6
            5 4 3                          5 4 3
```

679 in 5961 geht 8mal. Nun rechne ich 8 × 679 und ziehe der Reihe nach sogleich ab, nämlich so: 8 × 9 = 72, 2 von 11 ab, bleibt 9; 8 × 7 = 56, + 7 (aus dem ersten Produkte) = 63, 3 von 5 ab, bleibt 2; 8 × 6 = 48, + 6 (aus dem zweiten Produkte) = 54, 4 von 9 bleibt 5, und 5 von 5 geht auf. Rest 529.

Zu 529 kommt 6 herunter. 679 in 5296 geht 7mal; 7 × 9 = 63, 3 von 6 bleibt 3; 7 × 7 = 49, + 6 (aus dem ersten Produkte) = 55, 5 von 9 bleibt 4; 7 × 6 = 42, + 5 (aus dem zweiten Produkte) = 47, 7 von 12 bleibt 5, und 4 von 4 geht auf.

§. 123. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

Aufg. 1. 4 Knaben haben 196 Nüsse unter sich zu theilen; wie viel kommt auf einen derselben?

Aufl. In wie viele gleiche Theile sind die 196 Nüsse zu theilen? Den wie vielten Theil erhält also 1 Knabe? Man spricht daher: Wenn 4 Knaben 196 Nüsse zu theilen haben, so erhält ein Knabe den vierten Theil von 196 Nüssen.

Ausr. 196=160+36; $\frac{1}{4}$ von 160+36=40+9=49. Also ꝛc.

Schriftlich: $\frac{196}{4} = 49$ Nüsse.

Aufg. 2. 8 Ctr. einer Waare kosten 544 Mrk.; w. v. kostet 1 Ctr.?

Aufl. Was sollen wir suchen? (Was 1 Ctr. kostet.) Was wissen wir? (Was 8 Ctr. kosten.) Wie viel kosten 8 Ctr.? (544 Mrk.) Der wie vielte Theil ist 1 Ctr. von 8 Ctr.? Den wie vielten Theil von 544 Mrk. wird also 1 Ctr. kosten? Man spricht daher: Wenn 8 Ctr. 544 Mrk. kosten, so kostet 1 Ctr. den 8. Theil von 544 Mrk.

Ausr. 544 = 480 + 64; $\frac{1}{8}$ von 480 + 64 Mrk. = 60 + 8 oder 68 Mrk.

Schriftlich: $\frac{544}{8} = 68$ Mrk.

Aufg. 3. Wie viele Bücher lassen sich aus 720 Bg. Papier machen, wenn zu jedem Buche 24 Bg. genommen werden?

Aufl. Nimmt man von den 720 Bg. 24 Bg. weg, so gibt das 1 Buch; nimmt man nochmal 24 Bg. weg, so gibt das wieder 1 Buch u. s. f. So oft man also 24 Bg. von 720 Bg. wegnehmen kann, so vielmal 1 Buch geben diese. Wie oft können nun aber 24 Bg. von 720 Bg. weggenommen werden? Antwort: So oft, als 24 Bg. in 720 Bg. enthalten sind.

Ausr. 24 ist in 72 3mal, in 720 also 10 × 3 oder 30mal enthalten. Die 720 Bg. Papier geben also 30 Bücher.

Schriftlich: 2 4 | 7 2 0 | 30 × 1 Buch = 30 Bücher.

Aufl. 4. 5 Hektoliter Wein zu 485 Mrk.; was kosten 8 Hl?

Aufl. Was sollen wir suchen? (Was 8 Hl kosten.) Was muß ich wissen, um berechnen zu können, was 8 Hl kosten? (Was 1 Hl kostet.) Sagt uns das die Aufgabe? (Nein, sondern sie sagt, was 5 Hl kosten.) Was können wir aber daraus finden? (Was 1 Hl kostet.) Wie werden wir also rechnen? (Wir suchen zuerst, was 1 Hl kostet, und dann, was 8 Hl kosten.)

Ausr. 5 Hl kosten 485 Mrk.; 1 Hl kostet den 5. Theil von 485 Mrk.; 485 = 450 + 35; $^1/_5$ von 450 + 35 = 90 + 7 = = 97; 1 Hl kostet also 97 Mrk.; wenn 1 Hl 97 Mrk. kostet, so kosten 8 Hl 8 × 97 Mrk.; 8 × 97 Mrk. = 720 + 56 = 776 Mrk.; also kosten 8 Hl 776 Mrk.

Schriftlich: 5 Hl kosten 485 Mrk.

1 Hl kostet $\frac{485}{5}$ = 97 Mrk.

8 Hl kosten 97 Mrk. × 8 = 776 Mrk.*)

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr., Uebung 20.

§. 124. Die vier Rechnungsarten in gegenseitiger Beziehung.

(Für Präparanden.)

Das Addiren ist das Vermehren einer Zahl um eine andere, das Subtrahiren das Vermindern einer Zahl um eine andere. Beide Operationen stehen daher im Gegensatze zu einander. Eine hebt die andere auf. Und eben darum kann auch die eine Operation als Probe für die andere dienen.

8 um 5 vermehrt, gibt 13; die 13 um 5 vermindert, gibt wieder 8. So auch umgekehrt. 25 um 12 vermindert, gibt 13, und 13 um 12 vermehrt, gibt wieder 25.

Wie die Addition und Subtraction, so verhalten sich die Multiplikation und die Division. Sie stehen im Gegensatze zu einander. Das Multipliciren ist ein wiederholtes Zusichlegen einer und derselben Zahl, also ein Vereinigen gleicher Zahlen. Das Dividiren ist ein wiederholtes Hinwegnehmen einer und derselben Zahl, also ein Zerlegen in gleiche Zahlen. Darum wird auch von diesen Operationen eine durch die andere aufgehoben. Die eine dient wieder zur Probe für die andere.

a.		Fakt.	Prod.	Fakt.	Fakt.	Prod.	Fakt.
48	Faktor	25	1200	48	48	1200	25
25	"		100			96	
240			200			240	
96			200			240	
1200	Prod.						

*) Der Ausdruck „97 Mrk. × 8" heißt nicht „97 Mrk. mal 8", denn das hätte keinen Sinn; sondern man liest: „97 Mrk., 8mal genommen", oder: „97 Mrk., multiplicirt mit 8."

48, 25mal genommen, gibt 1200; 1200 ist also das 25fache von 48. Zerlege ich das 25fache wieder in 25 gleiche Theile, d. i. dividire ich 1200 durch 25 im Sinne des Theilens, so muß sich wieder 48 ergeben.

48, 25mal genommen, gibt 1200; mithin muß 48 auch wieder 25mal von 1200 weggenommen werden können, d. i. 48 muß in 1200 25mal enthalten sein.

Wird also das Produkt zweier Zahlen durch die eine von ihnen, d. i. durch den einen Faktor dividirt, so ergibt sich der andere.

b.	72	3456	48	72	48
		288		48	72
		576		576	96
		576		288	336
				3456	3456

Dividire ich im Sinne des Enthaltenseins, so zeigt 48 an, wie oft 72 in 3456 enthalten ist; also muß 48 $\times$ 72 wieder 3456 machen.

Dividire ich im Sinne des Theilens, so ist 48 als $^1/_{72}$ von 3456 zu betrachten; also muß 72 $\times$ 48 wieder 3456 geben.

Multiplicirt man also Divisor und Quotient mit einander, so entspringt der Dividend.

§. 125. Fragen und Aufgaben.

1) Was heißt addiren? 2) Wie nennt man die Zahlen, die addirt werden, und die Zahl, die sich dadurch ergibt? 3) Worin besteht die Probe für die Addition? 4) Was heißt subtrahiren? 5) Welche Namen führen die drei Zahlen, welche bei einer Subtraction vorkommen? 6) Warum kann man den Rest auch Differenz nennen? 7) Worin besteht die Probe bei der Subtraktion? 8) Beantworte die Frage: „Was heißt multipliciren?“ auf dreifache Weise! 9) Welche vier Namen führen die drei Zahlen, welche bei einer Multiplikation vorkommen? 10) Worin besteht die Probe für die Multiplikation? 11) Was heißt dividiren? 12) Wie nennt man die Zahlen, die bei einer Division vorkommen? 13) Worin besteht die Probe bei der Division? 14) Um eine gewisse Zahl zu erhalten, muß man 856 zu 938 legen; wie heißt sie? 15) 436 und welche zweite Zahl geben zusammen 1000? 16) Wie viel ist (5792+2345) $\times$ (32700—29258) getheilt durch 3875? 17) Dividire 23456789 durch 8 im Sinne des Enthaltenseins und im Sinne des Theilens! 18) Welche Zahl muß man von 37000 abziehen, damit 19864 übrig bleibt? 19) Weise nach, warum man den 16. Theil von einer Zahl auch dadurch findet, daß man sucht, wie oft 16 darin enthalten ist! 20) Die Zahl, welche um 284 größer ist, als 428, ist um 545 kleiner, als welche Zahl? 21) Die Zahl, welche um 819 kleiner als 1387 ist, ist um 298 größer, als welche Zahl? 22) Von welcher Zahl ist $^1/_{876}$ = 5793? 23) Das Produkt zweier Zahlen ist 5830500; der eine Faktor heißt 6500, wie der andere? 24) 853 ist um 385 größer und um 358 kleiner, als welche zwei Zahlen? 25) 7332 ist in welcher Zahl 50632mal enthalten? 26) Was für ein Theil ist 20800 von 113630400? 27) Die

Summe der Zahlen 436, 845 und 584 ist um 698 kleiner und um 392 größer, als welche zwei Zahlen? 28) Von welcher Zahl läßt sich 9782 ohne Rest 709mal wegnehmen? 29) Ich dividire 2614455 durch eine Zahl und erhalte 8127; welche Zahl ist es? 30) Wie heißt die Zahl, die, durch 3227 getheilt, 2009 gibt? 31) 4375+6837 und welche dritte Zahl geben zusammen 15000? 32) Zu welcher Zahl gehört das Faktorenpaar 96 und 85? 33) Wie heißt das 78fache von 354? 34) Der 27ste Theil von 8775 ist was für ein Theil von 3900? 35) Das 48fache von 124 ist wovon $^1/_8$? 36) Es ist gleich viel, ob man 432 durch 24 theilt, oder eine gewisse Zahl um 156 vermindert; wie heißt dieselbe? 37) Wie groß ist der Unterschied zwischen der Differenz und der Summe von 7425 und 3872? 38) Das 8fache einer Zahl ist um 24 größer als 720; wie heißt dieselbe? 39) Von welcher Zahl beträgt $^1/_{22}$ so viel, als die Zahl, in welcher 184 16mal enhalten ist? 40) Das 32fache von 48 ist von welcher Zahl das 24fache? 41) Die beiden Zahlen 96 und 87 und welche dritte müssen von 730 abgezogen werden, wenn 423 als Rest bleiben soll? 42) Wie groß ist die Differenz zwischen der Summe und dem Produkte von 324 und 423? 43) Zu welcher Zahl hat man 136 gelegt, wenn das Ergebniß gleich kommt der Summe von 148 und 67? 44) Wenn man 98 mit 17 multiplicirt, so ergibt sich 175 weniger, als wenn man welche Zahl von 2000 abzieht? 45) Der 45. Theil von 3780 ist a. um 21 kleiner, als der 12. Theil von welcher Zahl? b. um 21 größer, als der 63. Theil von welcher Zahl? 46) Die Summe zweier Zahlen ist 84 und ihr Unterschied 18; wie heißen sie? 47) Das 8fache und 15fache einer Zahl beträgt 351, wie heißt dieselbe? 48) Wenn man eine Zahl um 64 vergrößert, so erhält man eben so viel, als wenn man sie mit 9 multiplicirt; wie heißt dieselbe? 49) Zerlege 252 in zwei Theile, von denen der eine 11mal so groß ist, als der andere! 50) Von drei unbekannten Zahlen betragen die beiden ersten zusammen 59, die beiden letzten 82 und die erste und die letzte 73; wie heißen sie?

Dritter Cursus.

Die Rechnungsarten mit mehrfach und ungleich benannten Zahlen.

§. 126. Die Benennung der Zahlen.

Betrachte ich die Zahl bloß als eine bestimmte Menge von Eins, so ist sie eine reine oder unbenannte Zahl, wie z. B. 4, 15, 24. Wird sie als eine bestimmte Menge gewisser Gegenstände aufgefaßt, wobei mit der Zahl Namen von Dingen verbunden werden, so heißt sie eine benannte Zahl. Solche benannte Zahlen sind 4 Mark, 15 Meter, 24 Ctr.

Die benannten Zahlen sind entweder einfach oder mehrfach benannt. Eine einfach benannte Zahl ist die Zahl 4 Mark; mehrfach benannte Zahlen sind 4 Kgr. 45 Dgr. und 4 Kgr. 45 Dgr. 3 gr.

Haben zwei oder mehrere benannte Zahlen gleiche Benennung, 4 Mark und 15 Mark, oder wie 48 Pfg., 36 Pfg. und 24 Pfg.; so sind es gleich benannte oder gleichnamige Zahlen. Im entgegengesetzten Falle sind es ungleich benannte oder ungleichnamige Zahlen, wie z. B. 4 Mark und 15 Pfund, oder auch wie 48 Pfg. und 4 Mark.

Zwei ungleich benannte Zahlen bezeichnen entweder Dinge gleicher Art, oder Dinge verschiedener Art. Dinge gleicher Art bezeichnen die Zahlen 48 Pfg. und 4 Mark, Dinge verschiedener Art die Zahlen 4 Mark und 5 Ctr. Ungleich benannte Zahlen, welche Dinge von einer und derselben Art bezeichnen, wie 48 Pfg. und 4 Mark, oder wie 75 Pfd. und 5 Ctr., können in gleichbenannte verwandelt werden. 48 Pfg. und 4 Mark = 48 Pfg. und 400 Pfg.; 75 Pfd. und 5 Ctr. = 75 Pfd. und 500 Pfd. Eben so kann man auch zwei- oder mehrfach benannte Zahlen in einfach benannte verwandeln. 4 Mark 48 Pfg = 448 Pfg, 5 Ctr. 75 Pfd. = 575 Pfd.

Das Verwandeln der höheren Münz-, Maß- und Gewichtssorten in die niederen, der Mark in Pfennige, der Centner in Pfunde ꝛc., heißt Auflösen oder Resolviren. Das Gegentheil hievon, das Verwandeln der niederen Sorten in die höheren, der Pfennige in Mark, der Gramme in Dekagramme, der Dekagramme in Kilogramme ꝛc. heißt Zurückführen oder Reduciren.

Das Eine wie das Andere kommt bei dem Rechnen mit benannten Zahlen häufig vor. Es ist daher auch Beides besonders zu behandeln und gehörig zu üben.

Bevor wir jedoch dazu übergehen, wollen wir über die im deutschen Reiche und also auch im Königreiche Bayern gesetzlich eingeführte neue Münz-, Maß- und Gewichtsordnung das Nothwendige mittheilen, dem Lehrer es überlassend, in seiner Schule hievon anzuwenden, was er für angemessen erachtet.

§. 127. Die neue Münzordnung.

Durch die Münzgesetze von 1871 und 1873 wurden im deutschen Reiche für den Thaler und den Gulden die Mark im Werthe zu $^1/_3$ Thaler oder 35 Kreuzer, eingetheilt in 100 Pfennige, als Münzeinheit und folgende Gold-, Silber-, Nickel- und Kupfermünzen als Vielfache und als Theile derselben eingeführt:

1) als Goldmünzen:	Fünfmarkstücke	à 2 fl. 55 kr.
	Zehnmarkstücke	à 5 fl. 50 kr. (Krone).
	Zwanzigmarkstck.	à 11 fl. 40 kr. (Doppelkrone).
2) als Silbermünzen:	Fünfmarkstücke	à 2 fl. 55 kr.
	Zweimarkstücke	à 1 fl. 10 kr.
	Einmarkstücke	à 35 Kreuzer.
	Einhalbmarkstck.	à 17 kr. 2 pf.
	20-Pfennigstücke	à 7 Kreuzer.
3) als Nickelmünzen:	10-Pfennigstücke	à 3 kr. 2 pf.
	5-Pfennigstücke	à 1 kr. 3 pf.
4) als Kupfermünzen:	2-Pfennigstücke	à 2,8 Pfennige.
	1-Pfennigstücke	à 1,4 Pfennige.

§. 128. Die neue Maß- und Gewichtsordnung im Allgemeinen.

Die neue Maß- und Gewichtsordnung schließt sich an das Maß- und Gewichtssystem an, welches im letzten Decennium des vorigen Jahrhunderts in Frankreich und seitdem mehr oder weniger vollständig in vielen anderen, in der jüngsten Zeit auch in allen deutschen Staaten eingeführt worden ist.

Dem ganzen System liegt ein Längenmaß, Meter genannt, zu Grunde.

Um zu begreifen, wie dieses Maß bestimmt worden ist, so nehmen wir einen Globus zur Hand, suchen den Meridian von Paris und bezeichnen den Viertelkreis oder Quadranten vom Aequator bis zum Pol. Durch die Parallel- oder Breitenkreise ist dieser Viertelskreis in 90 gleiche Theile (Grade) getheilt. Von diesen 90 Theilen haben französische Gelehrte eine Anzahl, nämlich das Stück des Meridianbogens von

Barcelona bis Dünkirchen, möglichst genau gemessen und hiernach den ganzen Quadranten vom Aequator bis zum Pol auf 5130740 Toisen à 6 pariser Fuß berechnet.

Der zehnmillionte Theil dieser Länge wurde nun als Längenmaß bestimmt und Meter, d. i. Maß genannt.

Das Meter, von der Größe der Erde hergeleitet, sollte das Ur- und Grundmaß für die Maße und Gewichte aller Völker der Erde werden.

Seine große Bedeutung hat das Meter aber nicht sowohl von seiner Herleitung, als vielmehr davon, daß sich seine Eintheilung genau an das Zahlensystem anschließt, und daß es für das ganze Maß- und Gewichtssystem die einheitliche, gemeinschaftliche Basis bildet.

Die größeren Längenmaße sind nur 10fache, 100fache, 1000fache, die kleineren nur 10tel, 100tel, 1000tel des Meters.

Aus dem Längenmaße Meter geht das Quadrat-Meter mit seinem 100- und 10.000-fachen, sowie mit seinen 100teln und 10.000teln als Flächenmaß und eben so das Kubikmeter mit seiner decimalen Eintheilung als Körpermaß hervor. Ein bestimmter decimaler Theil von dem Kubikmeter bildet wieder die Einheit für die Hohlmaße und für das Gewicht.

Auch die einen integrirenden Theil des Systems bildende Bezeichnung ist wohl durchdacht.

Die Vielfachen und die Theile von der Einheit werden durch Vorsilben ausgedrückt — die Vielfachen durch Vorsilben aus der griechischen Sprache, die Theile durch Vorsilben aus der lateinischen Sprache.

Die aus dem Griechischen entnommenen Vorsilben sind

Deka = 10 (das 10fache),
Hekto = 100 (das 100fache),
Kilo = 1000 (das 1000fache).

Aus dem Lateinischen entnommene Vorsilben sind:

deci = 10 (Zehntel),
centi = 100 (Hundertel),
milli = 1000 (Tausendtel).

Neben einander gestellt:

Kilo	Hekto	Deka		deci	centi	milli
1000	100	10	1	10tel	100tel	1000tel.

§. 129. Die Längenmaße.

Das ursprünglich festgestellte französische System der Längenmaße ist:

1 Myriameter		= 10000	Meter.
1 **Kilometer**	(Km)	= 1000	"
1 Hektometer	(Hm)	= 100	"
1 **Dekameter**	(Dm)	= 10	"
1 **Meter**	(m)	= 1	"
1 Dezimeter	(dm)	= $^1/_{10}$	"
1 **Centimeter**	(cm)	= $^1/_{100}$	"
1 **Millimeter**	(mm)	= $^1/_{1000}$	"

Die mit fetter Schrift gedruckten Maße sind in das ursprünglich nur in dem norddeutschen Bunde, nun aber im ganzen deutschen Reiche giltige Gesetz aufgenommen. In diesem Gesetze erhalten die Maße auch deutsche Namen. Dekameter = Kette, Meter = Stab, Centimeter = Neuzoll, Millimeter = Strich.

Im gewöhnlichen Leben wird man sich nur des Meters und seiner Unterabtheilungen und von diesen hauptsächlich des Centimeters bedienen. Die Kilometer dienen zur Bezeichnung der Weglänge. Der Lehrer soll Kenntniß vom ganzen System haben. Die Volksschule hält sich an das in der Praxis Nothwendige. Es bleibt also zur unterrichtlichen Behandlung vorläufig nur:

$$1^{m} (= 10^{dm}) = 100^{cm} = 1000^{mm}$$
$$1^{dm} = 10^{cm} = 100^{mm}$$
$$1^{cm} = 10^{mm}$$

Zusatz: 1 Meter = 3,426 bayr. Fuß, und ein bayr. Fuß = 0,292 Meter. Die alte deutsche oder geographische Meile, welche gleich ist dem 15ten Theile eines Aequatorialgrades, beträgt 7419,5 Meter; die neue deutsche Meile = 7500 Meter = $7\frac{1}{2}$ Kilometer. Ein Kilometer ist ungefähr eine kleine Viertelstunde.

§. 130. Die Flächenmaße.

Die Einheit für das Flächenmaß ist das Quadratmeter oder der Quadratstab. Es ist dieß, wie der Name sagt, ein Quadrat, von welchem jede Seite ein Meter beträgt.

Die Vielfachen und Unterabtheilungen sind:

1 Kilar oder □Kilometer	(□Km)	= 1 000 000	Quadratmeter.
1 **Hektar** oder □Hektometer	(□Hm)	= 10 000	"
1 **Ar** oder □Dekameter	(□Dm)	= 100	"
1 □**Meter** oder □Stab	(□m)	= 1	"
1 □Dezimeter	(□dm)	= 1/100	"
1 □Centimet. od. □Neuzoll	(□cm)	= 1/10000	"
1 □Millimeter od. □Strich	(□mm)	= 1/1000000	"

Das Ar ist ein Quadrat, welches 10 Meter lang und 10 Meter breit ist; das Hektar ist ein Quadrat von 100 Meter Länge und Breite; das Kilar ist ein Quadrat und hat 1000 Meter in der Länge und in der Breite.

Das Hektar und das Ar sind Feldmaße. Das Hektar tritt an die Stelle des Tagwerks, das Ar an die Stelle des Decimals. Das Verhältniß zwischen Hektar und Ar ist dasselbe, wie das zwischen Tagwerk und Dezimal. So wie 1 Tagwerk = 100 Dezimalen, so ist 1 Hektar = 100 Ar. Der Größe nach besteht jedoch zwischen dem bisherigen und dem neuen Feldmaße ein bedeutender Unterschied. 1 Hektar = 2,9349 bayr. Tagwerk, und 1 Tagwerk = 0,3407 Hektar.

Nahezu sind 34 □Meter = 1 bayer. Dezimal.
34 Aren = 1 bayer. Tagwerk.
34 Hektaren = 100 bayr. Tagwerke.

1 □Meter = 11,74 bayer. □Fuß, und 1 □Fuß = 0,085□ Meter.

Die in Bayern bestehenden Feldmaße können nur noch bis 1. Januar 1878 in Geltung bleiben.

Die eigentliche Flächen= (und Körper=) Berechnung tritt bei uns zwar erst auf einer späteren Unterrichtsstufe ein; da aber mit dem Quadratmeter die Körpermaße und das Gewicht im engsten Zusammenhang stehen, so müssen wir dasselbe schon jetzt zur Anschauung bringen.

Wir zeichnen an die Wandtafel oder an die Wand selbst ein Quadratmeter, theilen jede Seite in 10 gleiche Theile (in Dezimeter) und verbinden je zwei Punkte der einander gegenüberliegenden Seiten durch eine gerade Linie. Hierdurch wird das ganze Quadrat schachbrettartig in 10 × 10 oder 100 Felder, d. i. in 100 Quadratdezimeter getheilt, deren jedes so groß ist, wie die übenstehende Figur.

Das □Dezimeter wird wieder, wie die Figur zeigt, in 10 × 10 oder 100 Quadrate getheilt, welche □Centimeter heißen. Und eben so wird das □Centimeter wieder in 10 × 10 oder 100 □Millimeter getheilt.

§. 131. Die Körper- und Hohlmaße.

Die Grundlage für diese Maße ist das Kubikmeter oder der Kubikstab. Das ist ein Würfel, von dessen 12 Kanten jede ein Meter und von dessen 6 Flächen jede ein Quadratmeter ist.

Die Vielfachen und Unterabtheilungen der Körpermaße sind:

1 Kubikkilometer	(c^{Km})	=	1 000 000 000	Kubikmeter.
1 Kubikhektometer	(c^{Hm})	=	1 000 000	„
1 Kubikdekameter	(c^{Dm})	=	1 000	„
1 Kubikmeter	(c^{m})	=	1	„
1 Kubikdezimeter	(c^{dm})	=	$^1/_{1000}$	„
1 Kubikcentimeter	(c^{cm})	=	$^1/_{1000000}$	„
1 Kubikmillimeter	(c^{mm})	=	$^1/_{1000000000}$	„

Das Kubikkilometer ist ein Kubus oder Würfel, welcher ein Kilometer lang, breit und hoch ist; das Kubikhektometer ist ein Kubus oder Würfel, welcher ein Hektometer lang, breit und hoch ist, u. s. w.

Um einen Begriff von den Hohlmaßen zu erhalten, so machen wir uns ein Kubikdezimeter. Wir zeichnen auf Pappdeckel ein Quadratdezimeter, genau so groß, wie das ganze nebenstehende Quadrat, und setzen an jede der 4 Seiten ein neues an. Die entstehende kreuzförmige Fläche schneiden wir aus, schneiden die Seiten des mittleren Quadrats bis zur halben Dicke durch, drehen das Ganze herum, richten die seitlichen Quadrate senkrecht auf und leimen sie zusammen. So erhalten wir ein Kubikdezimeter, das an einer Seite offen ist. Und das ist die Einheit der Körper= und Hohlmaße, sowohl für trockene, als für flüssige Dinge, für Getreide und für Wein ꝛc. Es ist dieß das Liter.

Ein Liter ist also der tausendste Theil eines Kubikmeters.

10 solche Würfel oder Liter, in einer Reihe neben einander gestellt, bilden ein Dekaliter; 10 Dekaliter neben einander bilden eine quadratförmige Schichte, das Hektoliter, und 10 solche Schichten oder Hektoliter, auf einander gelegt, bilden das Würfelmeter oder das Kiloliter.

Theilt man den Würfel, welcher der 1000ste Theil des Kubikmeters

ist und Liter heißt, wieder in 10 Schichten, jede Schichte in 10 Reihen und jede Reihe in 10 Würfel; so erhält man Deziliter, Centiliter und Milliliter.

Die Hohlmaße nach dem französischen Systeme sind:

1 Kiloliter	(KL oder Kl)	=	1000	Liter.
1 **Hektoliter**	(HL oder Hl)	=	100	"
1 Dekaliter	(DL oder Dl)	=	10	"
1 **Liter**	(L oder lt)	=	1	"
1 Deziliter	(dL oder dlt)	=	$^1/_{10}$	"
1 Centiliter	(cL oder clt)	=	$^1/_{100}$	"
1 Milliliter	(mL oder mlt)	=	$^1/_{1000}$	"

Das Gesetz führt bloß das Liter und das Hektoliter ein. Das Liter wird auch Kanne, das Hektoliter auch Faß genannt.

Zusatz. Werden diese beiden Maße und das Kubikmeter (oder Kiloliter) mit unsern bisherigen Körper- und Hohlmaßen verglichen, so ergibt sich, daß

1 Kubikmeter	=	40,224 Kubikfuß.
1 Kubikfuß	=	0,025 Kubimeter.
1 bayr. Waldklafter	=	3,150 Kubikmeter oder Steren.
1 Stere	=	0,317 (etwa $^1/_3$) Klafter.
1 Liter	=	0,935 Maß.
1 Maß	=	1,069 Liter.
1 Hektoliter	=	0,450 Scheffel.
1 Scheffel	=	2,224 Hektoliter.

Das unbequeme Verhältniß, in welchem der bayr. Scheffel und das Hektoliter zu einander stehen, wird dazu führen, daß das Getreide, wie hie und da schon geschieht, überall nur nach dem Gewichte verkauft wird. Die beiden Hohlmaße Liter und Hektoliter werden also schließlich bloß bei Flüssigkeiten ihre Anwendung finden. Die Schule hat dieß jedoch erst abzuwarten und die bezeichneten Maße vorläufig auf das Getreide eben so wie auf Flüssigkeiten anzuwenden.

Das Liter ist nur ein wenig kleiner als die bayrische Maß und ist daher geeignet, an die Stelle derselben zu treten.

Das Deziliter (nahezu $^1/_{10}$ Maß) ist unter die gesetzlichen Maße nicht aufgenommen, weil ein solcher Bruchtheil für Wein, Bier, Essig 2c. zu klein ist. Dafür ist die Halbirung des Liters bestimmt.

Wir haben daher als Hohlmaße:

das Hektoliter oder das Faß = 100 Liter,
das Liter oder die Kanne, und
das halbe Liter.

Das halbe Liter soll nach dem Gesetze auch Schoppen und 50 Liter sollen Scheffel heißen.

§. 132. Das Gewicht.

Das Liter dient auch zur Bestimmung des Gewichts. Ein Liter destillirten Wassers (bei + 4 Grad des 100theiligen Thermometers) bildet bei uns die Gewichtseinheit, Kilogramm oder Kilo genannt.

In dem französischen Systeme, welches folgt, ist die Gewichtseinheit das Gramm, d. i. ein Milliliter destillirten Wassers.

1 Millier (**Tonne**)		=	1000000	Gramm.
1 Quintal		=	100000	„
1 Miriagramm		=	10000	„
1 **Kilogramm**	(Kgr)	=	1000	„
1 Hektogramm	(Hgr)	=	100	„
1 **Dekagramm**	(Dgr)	=	10	„ (Neuloth.)
1 **Gramm**	(gr)	=	1	„
1 **Dezigramm**	(dgr)	=	$^1/_{10}$	„
1 **Centigramm**	(cgr)	=	$^1/_{100}$	„
1 **Milligramm**	(mgr)	=	$^1/_{1000}$	„

Ein Millier oder eine Tonne ist das Gewicht von 1 Kubikmeter, ein Kilogramm von 1 Kubikdezimeter, ein Gramm von 1 Kubikcentimeter und ein Milligramm von 1 Kubikmillimeter destillirten Wasses.

Durch das Gesetz sind eingeführt:

Erstens: die Tonne, das Kilogramm, das Dekagramm oder Neuloth, das Gramm, Dezigramm, Centigramm und Milligramm.

Hiernach gestaltet sich das neue Gewichtssystem, wie folgt:

1 Kgr = 100 Dgr.
1 Dgr = 10 gr.
1 gr = 10 dgr.
1 dgr = 10 cgr.
1 cgr = 10 mgr.

1000 Kilogr. = 1 Tonne.

Zweitens bestimmt das Gesetz: Ein halbes Kilogramm heißt Pfund; 50 Kilogramm oder 100 Pfund heißen Centner.

Wir haben also außer dem obigen System auch noch das:

1 Ctr. (od. 50 Kilo) = 100 Pfd.
1 Pfd. (od. $^1/_2$ Kilo) = 50 Dkgr.
1 Dkgr. = 10 Grm.
u. s. w.

2000 Pfd. = 1 Tonne.

Die Sache macht sich übrigens einfacher, als sie aussieht. Das kleinste Gewicht, welches im gewöhnlichen Handel und Wandel angewendet werden wird, ist das Gramm. Denn da 560 Gramm = 1 altes bayr. Pfund, so ist 1 Grm. = $^1/_{560}$ Pfd. = $^{32}/_{560}$ oder $^2/_{35}$ Loth = $^8/_{35}$ Quint, also nicht einmal so viel als $^1/_4$ Qt. Weiter abwärts, als zum Gramm, brauchen wir daher in unsern Schulen nicht zu gehen. Das Dezi-, Centi- und Milligramm sind in das Gesetz nur aufgenommen, weil das neue Gewicht zugleich auch das Medicinal-, Gold-, Silber-, Juwelen- und Perlen-Gewicht sein soll, von dem wir absehen können. Es bleibt uns also:

1 Kgr = 100 Dgr = 1000 gr.
1 Dgr = 10 gr.
1 Kgr = 2 Pfund.
50 Kgr = 100 Pfund = 1 Centner.

§. 133. Uebersichtliche Zusammenstellung der zu behandelnden Münzen, Maße und Gewichte.

a. Mit rein decimaler Abtheilung.

1. Münzen.

1 Mark = 100 Pfennige.

2. Längenmaße.

$1^{m} = 10^{dm} = 100^{cm} = 1000^{mm}$

$1^{dm} = 10^{cm} = 100^{mm}$

$1^{cm} = 10^{mm}$

3. Flächenmaße.

1 Hektar = 100 Ar = 10000 $\square^{m}$

1 Ar = 100 $\square^{m}$

4. Hohlmaße.

1 HL = 100 L.

5. Gewichte.

1 Kgr = 100 Dgr. = 1000 gr.

1 Dgr. = 10 gr.

1 Centner = 100 Pfund.

b. Nicht mit decimaler Abtheilung.

1. Münzen.

1 Gulden = 60 Kreuzer = 240 Pfennige.

1 Kreuzer = 4 Pfennige.

2. Das Zählmaß.

1 Schock = 4 Mandel = 60 Stück.

1 Mandel = 15 Stück.

3. Das Papiermaß.

1 Ballen = 10 Ries = 200 Buch = 4800 Bogen.

1 Ries = 20 Buch = 480 Bogen.

1 Buch = 24 Bogen.

1 Buch Druckpapier = 25 Bogen.

4. Das Zeitmaß.

1 Jahr = 12 Mon. = 52 Wch. = 365 Tg. = 8760 St.

1 Mon. = 4 Wch. = 30 Tg. = 720 St.

1 Wch. = 7 Tg. = 168 St.

1 Tg. = 24 St.

5. Das Gewicht.

1 Centner = 50 Kilogr. = 100 Pfund = 5000 Neuloth

1 Kilogr. = 2 Pfund = 100 Neuloth

1 Pfund = 50 Neuloth

Erster Abschnitt.

Die Rechnungsarten mit den Münzen, Maßen und Gewichten mit rein decimaler Abtheilung.

I. Das Resolviren und Reduciren.

§. 134. Vorbemerkung.

Die hier vorkommenden Aufgaben stehen zu den Aufgaben mit der angewandten Zahl in naher Verwandtschaft. Die Operationen, welche auszuführen sind, um die verlangten Resultate zu erhalten, sind nicht angezeigt, sondern müssen durch Nachdenken erst gefunden werden. Der Ausrechnung muß daher eine Auflösung vorausgehen. Je klarer und einfacher diese ist, je vollständiger sie den Grund zu den Operationen bloßlegt, desto besser. Wer damit beginnt, daß er z. B. sagt: Mark werden in Pfennige verwandelt, wenn man sie durch 100 multiplicirt, der unterrichtet nicht einsichtlich, sondern mechanisch.

Nothwendig ist, daß man die betreffenden Münzen, Maße und Gewichte, soweit es möglich ist, den Kindern vor Augen stellt, die erforderlichen Operationen in Wirklichkeit damit ausführt und das rechnerische Verfahren hieraus erkennen läßt. Ueberhaupt ist die Sache so zu behandeln, als sei sie den Schülern noch ganz und gar fremd. Schon um der Schwachen willen. Daß bisher häufig derartige Aufgaben vorgekommen sind, wird dazu beitragen, das Pensum schneller zu bewältigen, darf aber nicht Anlaß sein, mit demselben es weniger genau zu nehmen.

§. 135. Vorübung.

Der Vortheil, welchen das decimale Münz-, Maß- und Gewichtssystem für das Rechnen bietet, besteht darin, daß dieses mit dem Rechnen in reinen Zahlen zusammenfällt. Das neue Münz-, Maß- und Gewichtssystem ist das Zehnersystem. Je besser der Schüler in das letztere sich eingelebt hat, um so leichter begreift er das erstere. An die Stelle der Ausdrücke: Einer, Zehner, Hunderter und Tausender treten nur andere Benennungen. Wir lassen daher (nach §. 80) folgende Uebungen vorausgehen.

1) 400 =? (An die Wandtafel notirt.)

Die 4 steht in der 3. Stelle und gilt daher 4 Hunderter.
1 Hunderter = 10 Zehner; 4 H. = 4 × 10 Z. = 40 Zehner.
1 Zehner = 10 Einer; 40 Z. = 40 × 10 E. = 400 Einer.
Ich kann also lesen: 400 = 4 Hunderter,
= 40 Zehner,
= 400 Einer.

2) 5000 =?

Die Ziffer 5 steht in der 4ten Stelle und gilt 5 Tausender.
1 Tausender = 10 Hunderter; 5 T. = 5 × 10 H. = 50 H.
1 Hunderter = 10 Zehner; 50 H. = 50 × 10 Z. = 500 Zehner.
1 Zehner = 10 Einer; 500 Z. = 500 × 10 E. = 5000 Einer.

Ich kann also lesen: 5000 = 5 Tausender,
= 50 Hunderter,
= 500 Zehner,
= 5000 Einer.

3) 7836 = ?

a. 6 Tausender, 8 Hunderter, 6 Zehner und 3 Einer.

b. Ich verwandle die 7 Tausender in Hunderter und nehme die 8 H. dazu. 1 T. = 10 H.; 7 T. = 7 × 10 H. oder 70 H.; 70 H. + 8 H. = 78 H. Jetzt habe ich 78 H. + 6 Z. + 3 E.

c. Die 78 H. verwandle ich in Zehner und nehme die 6 Zehner dazu. 1 H. = 10 Z.; 78 H. = 78 × 10 Z. = 780 Z.; 780 Z. + 6 Z. = 786 Z. Jetzt habe ich 786 Zehner und 3 Einer.

d. Die 786 Z. verwandle ich in Einer und nehme die 3 Einer dazu; 1 Z. = 10 E.; 786 Z. = 786 × 10 E. = 7860 E., und 3 Einer dazu sind 7863 Einer. — Man kann also lesen:

7863 = 7 T. + 8 H. + 6 Z. + 8 E.
= 78 Hunderter + 6 Z. + 3 E.
= 786 Zehner + 3 Einer.
= 7863 Einer. Auch
= 78 Hunderter + 63 Einer und
= 7 T. + 86 Z. + 3 E.

Dergleichen Aufgaben mehr.

§. 136. Die Münzen.

Mündlich.

a. Resolviren, Verwandeln der höheren Sorte in die niedere.

1) 1 Mark = 100 Pfennigen.

2 Mark = 1 Mark + 1 Mark = 100 Pfg. + 100 Pfg.; 2 × 1 Mark = 2 × 100 Pfg.; 2 × 100 Pfg. = 200 Pfg.; 2 Mark = 200 Pfg.

3 Mark oder 1 Mark + 1 Mark + 1 Mark = 100 Pfg. + 100 Pfg. + 100 Pfg.; 3 × 1 Mark = 3 × 100 Pfg., und 3 × 100 Pfg. = 300 Pfg.; 3 Mark = 300 Pfg.

4 Mark = 4 × 1 Mark; also sind 4 Mark = 4 × 100 Pfg.; 4 × 100 Pfg. = 400 Pfg.; 4 Mark = 400 Pfg.

So zuerst; dann kürzer: 1 Mark = 100 Pfg.; 4 Mark = 4 × 100 oder 400 Pfg.

Wie viel Pfennige sind 6, 8, 10, 7, 12 rc. Mark?

2) 5 Mark 36 Pfennige, wie viel Pfennige?

Aufl. 5 Mark = 5 × 100 Pfg. oder 500 Pfg.; 500 Pfg. + 36 Pfg. = 536 Pfg.; 5 Mark 36 Pfg. = 536 Pfg.

Eben so: 3 Mark 72 Pfg. 10 Mark 50 Pfg.
8 Mark 3 Pfg. 15 Mark 4 Pfg.
6 Mark 84 Pfg. 24 Mark 25 Pfg.

b. **Reduciren, Zurückführen der niederen Sorte auf die höhere.**

1) 100 Pfennige = 1 Mark.

200 Pfg. = 100 Pfg. + 100 Pfg. = 1 Mark + 1 Mark; 2 × 100 Pfg. = 2 × 1 Mark; 2 × 1 Mark = 2 Mark; 200 Pfg. = 2 Mark.

300 Pfd. = 100 Pfg. + 100 Pfg. + 100 Pfg. = 1 Mark + 1 Mark + 1 Mark; 3 × 100 Pfg. = 3 × 1 Mark; 3 × 1 Mark = 3 Mark; 300 Pfg. = 3 Mark.

400 Pfg. = 4 × 100 Pfg., also auch = 4 × 1 Mark oder 4 Mark u. s. f.

2) 135 Pfennige, wie viele Mark?

Aufl. 100 Pfg. = 1 Mark; 135 Pfg. = 100 Pfg. + 35 Pfg. = 1 Mark 35 Pfg.

3) 475 Pfennige, wie viele Mark?

Aufl. 100 Pfg. = 1 Mark. So oft ich 100 Pfg. habe, so oft habe ich 1 Mark. 475 Pfg. = 4 × 100 Pfg. + 75 Pfg. = 4 Mark 75 Pfg.

4) 1250 Pfennige, wie viele Mark?

Aufl. 1250 Pfg. = 12 × 100 Pfg. + 50 Pfg. = 12 Mark 50 Pfg.

Folgende Zahlen werden an die Wandtafel geschrieben und, wie folgt, gelesen. So viele Hunderter, so viele Mark.

485 Pfg. = 400 Pfg. + 85 Pfg. = 4 Mark 85 Pfg.
370 Pfg. = 300 Pfg. + 70 Pfg. = 3 Mark 70 Pfg.
508 Pfg. = 500 Pfg. + 8 Pfg. = 5 Mark 8 Pfg.
1000 Pfg. = 10 Hunderte von Pfennigen = 10 Mark.
2400 Pfg. = 24 Hunderte von Pfennigen = 24 Mark.
5730 Pfg. = 57 Mark und 30 Pfg.
6348 Pfg. = 63 Mark und 48 Pfg.
7209 Pfg. = 72 Mark und 9 Pfg.
8004 Pfg. = 80 Mark und 4 Pfg.
15738 Pfg. = 157 Mark und 38 Pfg.
u. s. f.

Schriftlich.

a.

1) 6 Mark 48 Pfg. =?

Ausr. 6 Mark = 600 Pfg. oder: 6 Mark 48 Pfg.
+ 48 Pfg. × 100
648 Pfg. 648 Pfg.

Die erste der vorstehenden Ausrechnungen ist an sich klar. Bei der zweiten heißt es: 1 Mark = 100 Pfg.; 6 Mark = 6 × 100 Pfg. oder 100 × 6 Pfg. Ich rechne also 100 × 6 Pfg. und zähle die 48 Pfg. sogleich dazu.

2) 45 Mark 70 Pfg. = ?

Ausr. 45 Mark = 4500 Pfg. oder: 45 Mark 70 Pfg.
+ 70 „ × 100
4570 Pfg. 4570 Pfg.

3) 24 Mark 8 Pfg. = ?

Ausr. 24 Mark = 2400 Pfg. oder: 24 Mark 8 Pfg.
+ 8 „ × 100
2408 Pfg. 2408 Pfg.

Man verwandelt also die Mark in Pfennige, indem man sie mit 100 multiplicirt, und multiplicirt mit 100, indem man der Zahl zwei Nullen anhängt. (6 Mark = 600 Pfg.)

Besteht die gegebene Zahl aus Mark und Pfennigen und ist die Zahl der Pfennige eine zweistellige Zahl, so werden die zwei Nullen durch die Zahl der Pfennige vertreten. (6 Mark 48 Pfg. = 648 Pfg., 45 Mark 70 Pfg. = 4570 Pfg.)

Ist aber die Zahl der Pfennige nur eine einstellige Zahl, so kommt diese in die Einerstelle; für die fehlenden Zehner wird eine Null gesetzt. (24 Mark 8 Pfg. = 24 Mark 08 Pfg. = 2408 Pfg.)

b.

1) 865 Pfennige, wie viele Mark?

Ausr. 100 | 865 | 8 Mark. Oder 8|65 Pfg. = 8 M. 65 Pfg.
800
65 Pfg.

Nehme ich von 865 Pfg. 100 Pfg. weg, so geben diese 1 Mark; nehme ich vom Reste wieder 100 Pfg. weg, so geben diese wieder 1 Mark. So oft ich 100 Pfg. von 865 Pfg. wegnehmen kann, so vielmal 1 Mark geben diese. 100 Pfg. können aber von 865 Pfg. so oft weggenommen werden, als sie in 865 Pfg. enthalten sind. 100 Pfg. sind in 865 Pfg. 8mal enthalten, und 65 Pfg. bleiben übrig. Also sind 865 Pfg. = 8 Mark 65 Pfg.

Oder: So viele Hunderte von Pfennigen, so viele Mark. Sowie 865 E. = 8 H. + 65 E., so sind 865 Pfg. = 8 Mark 65 Pfg. Man löst also die Zehner und Einer (die 2 Stellen rechts) ab. Die abgelösten Ziffern bezeichnen die Pfennige, die übrigen Ziffern die Mark.

2) 75908 Pfennige, wie viele Mark?

Ausr. 759|08 Pfg. = 759 Mark und 8 Pfennige.

§. 137. Die Längenmaße.

a. Resolviren.

Anschaulich und frei im Kopfe.

1) 1 Meter = 10 Dezimeter

$2^{m} = 2 \times 10^{dm} = 20^{dm}$	$1^{m}\ 2^{dm} = 10^{dm} + 2^{dm} = 12^{dm}$
$3^{m} = 3 \times 10^{dm} = 30^{dm}$	$2^{m}\ 4^{dm} = 20^{dm} + 4^{dm} = 24^{dm}$
u. s. w.	u. s. w.

2) 1 Dezimeter = 10 Centimeter.

$2^{dm} = 2 \times 10^{cm} = 20^{cm}$	$1^{dm}\ 4^{cm} = 10^{cm} + 4^{cm} = 14^{cm}$
$3^{dm} = 3 \times 10^{cm} = 30^{cm}$	$3^{dm}\ 5^{cm} = 30^{cm} + 5^{cm} = 35^{cm}$
u. s. w.	u. s. w.

3) 1 Meter = 10 Dzm. = 10 × 10 Ctm. = 100 Centimeter.

$2^{m} = 2 \times 100^{cm} = 200^{cm}$	$1^{m}\ 2^{dm}\ 3^{cm} = 100 + 20 + 3^{cm} = 123^{cm}$
$3^{m} = 3 \times 100^{cm} = 300^{cm}$	$2^{m}\ 4^{dm}\ 6^{cm} = 200 + 40 + 6^{cm} = 246^{cm}$
u. s. w.	u. s. w.

$4^{m}\ 36^{cm} = 400^{cm} + 25^{cm} = 425^{cm}$
$8^{m}\ 72^{cm} = 800^{cm} + 72^{cm} = 872^{cm}$

4) 1 Centimeter = 10 Millimeter.

$2^{cm} = 2 \times 10 = 20^{mm}$	$1^{cm}\ 4^{mm} = 10 + 4 = 14^{mm}$
$3^{cm} = 3 \times 10 = 30^{mm}$	$2^{cm}\ 8^{mm} = 20 + 8 = 28^{mm}$
u. s. w.	u. s. w.

5) 1 Dezm. = 10 Centm. = 10 × 10 Millim. = 100 Millimeter.

$2^{dm} = 2 \times 100^{mm} = 200^{mm}$	$1^{dm}\ 6^{cm}\ 8^{mm} = 100 + 60 + 8 = 168^{mm}$
$3^{dm} = 3 \times 100^{mm} = 300^{mm}$	$2^{dm}\ 7^{cm}\ 5^{mm} = 200 + 70 + 5 = 275^{mm}$
u. s. w.	u. s. w.

6) 1 Mtr. = 10 Dzm. = 10 × 10 Ctm. = 10 × 10 × 10 = 1000 Mllm.

$2^{m} = 2 \times 1000^{mm} = 2000^{mm}$	$2^{m}\ 3^{dm}\ 4^{cm}\ 5^{mm} = 2000^{mm}$
$3^{m} = 3 \times 1000^{mm} = 3000^{mm}$	$+ 300^{mm}$
$4^{m} = 4 \times 1000^{mm} = 4000^{mm}$	$+ 40^{mm}$
$5^{m} = 5 \times 1000^{mm} = 5000^{mm}$	$+ 5^{mm}$
u. s. w.	2345^{mm}

Oder: (An die Wandtafel notirt.)

$$2^{m}\ 3^{dm}\ 4^{cm}\ 5^{mm} = 23^{dm}\ 4^{cm}\ 5^{mm} = 234^{cm}\ 5^{mm} = 2345^{mm}$$

Der Schüler spricht: 1 Mtr. = 10 Dzm.; 2 Mtr. = 2 × 10 oder 20 Dzm., und 3 Dzm. dazu = 23 Dzm. Nun habe ich 23 Dzm., 4 Ctm. und 5 Mllm.

1 Dzm. = 10 Ctm.; 23 Dzm. = 23 × 10 oder 230 Ctm., und 4 Ctm. dazu = 234 Ctm. Nun habe ich 234 Ctm. und 5 Mllm.

1 Ctm. = 10 Mllm.; 234 Ctm. = 234 × 10 oder 2340 Mllm., und 5 Mllm. dazu = 2345 Mllm. Also sind $2^{m}\ 3^{dm}\ 4^{cm}\ 5^{mm}$ = 2345 Mllm.

Man verwandelt also die **Meter** zuerst, indem man sie mit 10 multiplicirt, in **Dezimeter** und addirt die Anzahl der Dezimeter dazu; dann verwandelt man die Dezimeter, indem man sie mit 10 multiplicirt, in **Centimeter** und zählt die Centimeter dazu u. s. w. Um aber eine Zahl mit 10 zu multipliciren, braucht man derselben nur eine Null anzuhängen. $2^{m} = 20^{dm}$; $20^{dm} = 200^{cm}$; $200^{cm} = 2000^{mm}$. An die Stelle der Null tritt dann die schon gegebene Zahl der Dezimeter, der Centimeter, der Millimeter. Man braucht diese also nur unmittelbar an die Zahl der nächst höheren Benennung einzureihen.

$2^{m}\ 3^{dm} = 23^{dm}$; $23^{dm}\ 4^{cm} = 234^{cm}$; $234^{cm}\ 5^{mm} = 2345^{mm}$.

Wenn eine mittlere Benennung fehlt, so vertritt eine Null ihre Stelle. Z. B.

3 Meter 7 Centimeter = $3^{m}\ 0^{dm}\ 7^{cm}$ = 307 Centimeter.
5 Dzm. 8 Millimeter = $5^{dm}\ 0^{cm}\ 8^{mm}$ = 508 Millimeter.
8 Mtr. 5 Ctm. 4 Mllm. = $8^{m}\ 0^{dm}\ 5^{cm}\ 4^{mm}$ = 8054 Mllm.
4 Mtr. 6 Dzm. 5 Mllm. = $4^{m}\ 6^{cm}\ 0^{cm}\ 5^{mm}$ = 4605 Mllm.
6 Meter 9 Millimeter = $6^{m}\ 0^{dm}\ 0^{cm}\ 9^{mm}$ = 6009 Mllm.

Nothwendig ist, daß der Schüler die Aufeinanderfolge der Benennungen: Meter, Dezimeter, Centimeter und Millimeter fest im Kopfe hat, damit er sogleich weiß, wo eine Benennung fehlt, und dafür eine Null setzt.

b. Reduciren.

Anschaulich und frei im Kopfe.

1) 10 Dezimeter = 1 Meter.

$20^{dm} = 2 \times 10^{dm} = 2^{m}$	$12^{dm} = 10 + 2^{dm} = 1^{m}\ 2^{dm}$
$30^{dm} = 3 \times 10^{dm} = 3^{m}$	$25^{dm} = 20 + 5^{dm} = 2^{m}\ 5^{dm}$
u. s. w.	u. s. w.

2) 10 Centimeter = 1 Dezimeter.

$20^{cm} = 2 \times 10^{cm} = 2^{dm}$	$15^{cm} = 10 + 5^{cm} = 1^{dm}\ 5^{cm}$
$30^{cm} = 3 \times 10^{cm} = 3^{dm}$	$28^{cm} = 20 + 8^{cm} = 2^{dm}\ 8^{cm}$
u. s. w.	u. s. w.

3) 100 Centimeter = 1 Meter.

$200^{cm} = 2 \times 100^{cm} = 2^{m}$	$135^{cm} = 100 + 35^{cm} = 1^{m}\ 35^{cm}$
$300^{cm} = 3 \times 100^{cm} = 3^{m}$	$246^{cm} = 200 + 46^{cm} = 2^{m}\ 46^{cm}$
u. s. w.	u. s. w.

4) 10 Millimeter = 1 Centimeter.

$20^{mm} = 2 \times 10^{mm} = 2^{cm}$	$16^{mm} = 10 + 6^{mm} = 1^{cm}\ 6^{mm}$
$30^{mm} = 3 \times 10^{mm} = 3^{cm}$	$28^{mm} = 20 + 8^{mm} = 2^{cm}\ 8^{mm}$
u. s. w.	u. s. w.

5) 1000 Millimeter = 100 Centimeter = 10 Dezimeter = 1 Meter.

$2000^{mm} = 200^{cm} = 20^{dm} = 2^{m}$
$3000^{mm} = 300^{cm} = 30^{dm} = 3^{m}$
u. s. w.

Schriftlich.

Aufg. Wie viel Meter, Dezm., Ctm. und Millim. sind 8765 Millimeter?

Aufl. 10 Mllm. = 1 Ctm., 10 Ctm. = 1 Dzm., und 10 Dzm. = 1 Meter. So oft also 10 Mllm. in 8765 Mllm. enthalten sind, so viele Centimeter gibt es; so oft in diesen wieder 10 Ctm. enthalten sind, so viele Dezimeter gibt es, und so oft in diesen wieder 10 Dzm. enthalten sind, so viele Meter sind es. Man dividirt also wiederholt durch 10.

```
              10          10
10 | 8 7 6 5 | 8 7 6 | 8 7 | 8m
     8 0       8 0     8 0
     -----     -----   ---
       7 6       7 6   7dm
       7 0       7 0
       ---       ---
         6 5     6cm
         ---
         5mm
```

Mithin sind 8765 Mllm. $= 876^{cm}\ 5^{mm}$
$= 87^{dm}\ 6^{cm}\ 5^{mm}$
$= 8^{m}\ 7^{dm}\ 6^{cm}\ 5^{mm}$.

Man löst also eine Stelle zur Rechten ab; die abgelöste Ziffer gibt die Anzahl der übrig bleibenden kleinsten Benennung an; die übrigen Ziffern bezeichnen die Anzahl der nächsten höheren Benennung. Hierauf löst man wieder eine Ziffer ab u. s. w.

Wie unter §. 134 unbenannte Zahlen, so werden hier benannte Zahlen auf verschiedene Weise gelesen. Z. B.

479 Centimeter = 47 Dezimeter 9 Centimeter.
= 4 Meter 7 Dzm. 9 Ctm.
= 4 Meter 79 Centimeter.
36708 Millimeter = 3670 Ctm. 8 Millimeter.
= 367 Dzm. 0 Ctm. 8 Mllm.
= 36 Mtr. 7 Dzm. 0 Ctm. 8 Mllm.
= 36 Meter 70 Ctm. 8 Mllm.
= 36 Meter 708 Millimeter.

§. 138. Die Flächenmaße.

Da wir die eigentliche Flächenberechnung, wie schon bemerkt, erst später eintreten lassen, so werden hier bloß die neuen Feldmaße und zwar zu dem Zwecke behandelt, um sie bei den Grundrechnungsarten in Anwendung bringen zu können.

Der Lehrer theilt (nach §. 130) ein an die Wandtafel gezeichnetes Quadratmeter in Quadratdezimeter und eines von diesen in Quadratcentimeter ab. Daraus ist ersichtlich, daß

1 □Meter = 10 × 10 □Dzm. = 100 Dzm.
1 □Dezm. = 10 × 10 □Ctm. = 100 Ctm.

Ein Quadrat, welches 100mal so lang und breit ist als das Quadratmeter, ist ein Hektar. Denken wir uns das Hektar ebenso, wie das □Meter, in 10 × 10 oder 100 kleinere Quadrate abgetheilt, so erhalten wir Aren, und denken wir uns ein Ar wieder eben so, wie das □Dezimeter, in 10 × 10 oder 100 kleinere Quadrate eingetheilt, so erhalten wir Quadratmeter oder Centiaren. Also ist

1 Hektar = 10 × 10 Ar = 100 Ar.
1 Ar = 10 × 10 □Mtr. = 100 □Meter.

a. Resolviren.

Mündlich.

1) 1 Hektar = 100 Ar.

2 Hektar = 2 × 100 = 200 Ar	1 Hektar 36 Ar = 100 + 36 = 136 Ar.
3 Hektar = 3 × 100 = 300 Ar	2 Hektar 8 Ar = 200 + 8 = 208 Ar.
u. s. w.	u. s. w.

2) 1 Ar = 100 □Meter.

2 Ar = 200 □Meter	1 Ar 36□m = 100 + 36 = 136□m
3 Ar = 300 □Meter	2 Ar 5□m = 200 + 5 = 205□m
u. s. w.	u. s. w.

Schriftlich.

1) 2 Hektar 45 Ar = 200 Ar
+ 45 Ar
245 Ar

Oder: 2 Hektar 45 Ar
100
245 Ar.

2) 4 Hektar 8 Ar = 400 Ar
+ 8 Ar
408 Ar

Oder: 4 Hektar 8 Ar
100
408 Ar.

3) 8 Ar 72 □Mtr. = 800□m
+ 72□m
872□m

Oder: 8 Ar 72 □Mtr.
100
872 □Meter.

4) 65 Ar 5 □Mtr. = 6500□m
+ 5□m
6505□m

Oder: 65 Ar 5 □Mtr.
100
6505 □Meter.

5) Wie viel □Meter sind 4 Hektar 68 Ar 53 □Meter?

Aufl. 4 Hektar 68 Ar 53 □Mtr.
100
468 Ar
100
46853 □Meter.

Oder: 4 Hektar 68 Ar 53 □Meter = 468 Ar 53 □Mtr.
= 46853 □Meter.

6) Verwandle 3 Hektar 5 Ar 6 □Meter in Quadratmeter!

Aufl. 3 Hektar 5 Ar 6 □Meter
100
305 Ar
100
30506 □Meter.

Oder: 3 Hektar 05 Ar 06 □Mtr. = 305 Ar 06 □Mtr.
= 30506 □Meter.

b. Reduciren.

Mündlich.

1) 100□Meter = 1 Ar.

200 □Meter = 2 Ar	164 □Mtr. = 1 Ar 64 □Mtr.
300 □Meter = 3 Ar	275 □Mtr. = 2 Ar 75 □Mtr.
u. s. w.	u. s. w.

2) 100 Ar = 1 Hektar.

200 Ar = 2 Hektar	135 Ar = 1 Hektar 35 Ar
300 Ar = 3 Hektar	307 Ar = 3 Hektar 7 Ar
u. s. w.	u. s. w.

Schriftlich.

Aufg. Wie viele Hektar, Ar und □Meter sind 75864 □Mtr.?

Aufl. So oft ich 100 □Meter habe, so oft habe ich 1 Ar, und so oft ich 100 Aren habe, so oft habe ich 1 Hektar. Ich dividire also zweimal durch 100.

```
                 100
                 ╰─╯
100 | 7 5 8 6 4 | 7 5 8 | 7 Hektar
    | 7 0 0     | 7 0 0 |
    ------------ --------
        5 8 6       5 8 Ar
        5 0 0
        ------
          8 6 4
          8 0 0
          ------
            6 4 □Meter.
```

Mithin sind 75864 □Meter = 758 Ar 64 □Mtr.
= 7 Hektar 58 Ar 64 □Mtr.

Man löst also wiederholt zwei Stellen zur Rechten ab.

3|57|90 □Meter = 3 Hektar 57 Ar 90 □Meter.
7|40|42 □Meter = 3 Hektar 40 Ar 42 □Meter.
9|05|08 □Meter = 9 Hektar 5 Ar 8 □Meter.
15|60|09 □Meter = 15 Hektar 60 Ar 9 □Meter.

Nun findet eine Wiederholung des Bisherigen statt. Man schreibt eine Zahl, z. B. 4768, an die Wandtafel und gibt derselben die Benennung Pfennige. Die Schüler lesen: 4768 Pfg. = 47 Mark 68 Pfg. Dann gibt man der Zahl die Benennung Millimeter, und die Schüler lesen: $4768^{mm} = 4^{m}\ 7^{dm}\ 6^{cm}\ 8^{mm}$ oder $4^{m}\ 76^{cm}\ 8^{mm}$ oder 6^{m} 768 Millim. Weitere Benennungen, welche der Zahl beigefügt werden, sind: Dezimeter, Centimeter, Quadratmeter, Ar.

---

§. 139. Die Hohlmaße.

Der Lehrer zeigt den Schülern ein hohles Kubik-Dezimeter, dessen Verfertigung in § 131 beschrieben ist. Dieses Gefäß heißt Liter. Gewöhnlich hat es eine runde, walzenförmige Form. Mit demselben werden sowohl Flüssigkeiten (Wein, Bier, Branntwein, Essig, Milch 2c.), als trockene Dinge (Mehl, Körner 2c.) im Kleinen gemessen. Um größere Mengen von Flüssigkeiten oder von trockenen Dingen zu messen, bedient man sich eines größeren Gefässes und zwar eines solchen, welches gerade 100mal so groß ist, als ein Liter, und Hektoliter heißt. Hieraus folgt, daß

1 Hektoliter = 100 Liter, und 100 lt = 1 Hl

Aufgaben.

a. 6 H =? lt
   1 Hl = 100 lt; 6 Hl = 6 × 100 lt = 600 lt.

b. 8 Hl 45 lt =? lt.
   8 Hl = 8 × 100 lt = 800 lt; 800 lt + 45 lt = 845 lt.

c. 5 Hl 40 lt =? lt.
   5 Hl = 5 × 100 = 500 lt; 500 lt + 40 lt = 540 lt.

d. 7 Hl 5 lt =? lt.
   7 Hl = 7 × 100 = 700 lt; 700 lt + 5 lt = 705 lt.

Man verwandelt also die Hektoliter in Liter, indem man sie mit 100 multiplicirt, der Zahl also zwei Nullen anhängt. (6 Hl = 600 lt.)

Besteht die gegebene Zahl aus Hektolitern und Litern und ist die Zahl der Liter eine zweistellige Zahl, so setzt man für die beiden Nullen die Zahl der Liter. 8 Hl 45 lt = 845 lt; 5 Hl 40 lt = 540 lt.)

Ist aber die Zahl der Liter nur eine einstellige Zahl (wie bei d), so kommt diese in die Einerstelle; für die fehlenden Zehner wird eine Null gesetzt. (7 Hl 5 lt = 7 Hl 05 lt = 705 lt.)

Das Verfahren ist also ganz das nämliche, wie bei der Mark und den Pfennigen.

9 Hl . . = 900 lt.
3 Hl 75 lt = 375 lt.
18 Hl 30 lt = 1830 lt.
25 Hl 4 lt = 2504 lt.

Aufg. 725 lt, wie viele Hektoliter und Liter?

Aufl. 100 lt = 1 Hl; so vielmal 100 lt, so vielmal 1 Hl; so oft daher 100 lt in 725 lt enthalten sind, so viele Hektoliter habe ich. 100 lt sind in 725 lt 7mal enthalten, und 25 lt bleiben im Rest.

Also sind 725 lt = 7 Hl 25 lt.

Schriftlich. 1 0 0 | 7 2 5 | 7 Hl
| 7 0 0 |
2 5 lt.

725 lt = 7 Hl 25 lt.

Um Liter in Hektoliter zu verwandeln, braucht man also nur zwei Stellen zur Rechten (die Einer und die Zehner) der Zahl abzulösen. Die abgelösten Ziffern bezeichnen die Liter, die übrigen Ziffern die Hektoliter.

12|40 lt = 12 Hl 40 lt.
35|00 lt = 35 Hl
189|05 lt = 189 Hl 05 lt = 189 Hl 5 lt.

Jetzt wieder eine Repetition wie am Schlusse des vorigen Paragraphen.

---

§. 140. Die Gewichte.

Das Gewicht, welches ein Liter reinen Wassers hat, ist die Gewichtseinheit und heißt Kilogramm oder Kilo. Das Kilogramm

wird in 100 Dekagramm und das Dekagramm in 10 Gramm eingetheilt. Die Gewichte werden vorgezeigt und den Schülern — damit diese von der Schwere und dem gegenseitigen Verhältnisse derselben einen beiläufigen Begriff erhalten — in die Hände gegeben.

a. Kilogramm und Dekagramm.

1 Kgr = 100 Dgr.

Wie 1 HL = 100 L, so ist 1 Kgr = 100 Dgr. Wie daher Hektoliter in Liter und Liter in Hektoliter verwandelt werden, ganz so werden Kilogramm in Dekagramm und Dekagramm in Kilogramm verwandelt. Wir können uns daher darauf beschränken, die möglichen Fälle kurz darzustellen, und die ausführliche Behandlung derselben dem Lehrer überlassen.

6 Kgr = 6×100Dgr	= 600 Dgr	8|00 Dgr	= 8 Kgr.
17 Kgr 54 Dgr	= 1754 Dgr	4|56 Dgr	= 4 Kgr 56 Dgr.
9 Kgr 80 Dgr	= 980 Dgr	7|30 Dgr	= 7 Kgr 30 Dgr.
13 Kgr 8 Dgr	= 1308 Dgr	9|07 Dgr	= 9 Kgr 7 Dgr.

b. Dekagramm und Gramm.

1 Dgr = 10 gr.

7 Dgr 5 gr = 7 × 10 + 5 gr = 70 + 5 = 75 gr.
28 Dgr 3 gr = 28 × 10 + 3 gr = 280 + 3 = 283 gr.
40 Dgr 7 gr = 40 × 10 + 7 gr = 400 + 7 = 407 gr.

Dekagramm werden in Gramm verwandelt, indem man sie mit 10 multiplicirt, und dieß geschieht, indem man der Zahl eine Null anhängt. An die Stelle der Null tritt dann die gegebene Zahl der Gramm. 26 Dgr = 260 gr; 87 Dgr 4 gr = 874 gr.

10 gr = 1 Dgr.

30 gr =? Dgr. Ich suche, wie oft 10 gr in 30 gr enthalten sind; 10 gr sind in 30 gr 3mal; 30 gr = 3 Dgr.

125 gr =? Dgr. 10 gr sind in 125 gr 12mal, Rest 5; 125 gr = 12 Dgr 5 gr. Also sind

30 gr = 3 Dgr.
125 gr = 12 Dgr 5 gr.

Gramm werden in Dekagramm verwandelt, indem man sie durch 10 dividirt, und dieß geschieht, indem man die erste Stelle gegen die Rechte ablöst. 47|3 gr = 47 Dgr 3 gr.

c. Kilogramm, Dekagramm und Gramm.

1 Kgr = 100 Dgr = 1000 gr
1 Dgr = 10 gr

Aufg. 1. 5 Kgr 67 Dgr 8 gr, wie viel Gramm?

Aufl. 5 Kgr = 5 × 100 oder 500 Dgr; 500 Dgr + 67 Dgr = 567 Dgr; 567 Dgr = 567 × 10 oder 5670 gr; 5670 gr. + 8 gr = 5678 gr. Also sind

5 Kgr 67 Dgr 8 gr = 567 Dgr 8 gr
= 5678 gr

Oder:

5 Kgr	= 5 × 1000 gr	=	5000 gr
67 Dgr	= 67 × 10 gr	=	670 gr
	8 gr	=	8 gr
5 Kgr 67 Dgr 8 gr		=	5678 gr

Die Gramm kommen in die erste Stelle rechts, die Dekagramm in die zweite und dritte Stelle, die Kilogramm in die höheren Stellen.

3 Kgr 57 Dgr 9 gr	=	3579 gr
9 Kgr 70 Dgr 3 gr	=	9703 gr
4 Kgr 8 Dgr 2 gr	=	4082 gr
12 Kgr 5 gr	=	12005 gr

Aufg. 2. Verwandle 8642 gr in Dekagr. u. Kilogr.

Aufl. 10 gr = 1 Dgr, und 100 Dgr = 1 Kgr; ich dividire also die Gramm, um sie in Dekagramm zu verwandeln, durch 10, und die Dekagramm, um sie in Kilogramm zu verwandeln, durch 100.

```
                      100
10 | 8 6 4 2 | 8 6 4 | 8 Kgr
   | 8 0     | 8 0 0 |
     6 4       6 4 Dgr
     6 0
       4 2
       4 0
         2 gr
```

Mithin sind 8642 gr = 864 Dgr 2 gr
= 8 Kgr 64 Dgr 2 gr

Man löst also, um die Gramm in Dekagramm zu verwandeln, eine Stelle, und um die Dekagramm in Kilogramm zu verwandeln, noch zwei Stellen ab.

3759 gr	=	3|75|9	= 3 Kgr 75 Dgr 9 gr
5604 gr	=	5|60|4	= 5 Kgr 60 Dgr 4 gr
17085 gr	=	17|08|5	= 17 Kgr 8 Dgr 5 gr
2008 gr	=	2|00|8	= 2 Kgr 8 gr

d. 1 Centner = 100 Pfund.

2 Ctr. = 2 × 100 od. 200 Pfd.	1 Ctr. 45 Pfd. = 100 + 45 = 145 Pfd.
3 Ctr. = 3 × 100 od. 300 Pfd.	2 Ctr. 8 Pfd. = 200 + 8 = 208 Pfd.
u. s. w.	u. s. w.

100 Pfund = 1 Centner.

200 Pfd. = 2 × 100 Pfd. = 2 Ctr.	175 Pfd. = 100 + 75 Pfd. = 1 Ctr. 75 Pfd.
300 Pfd. = 3 × 100 Pfd. = 3 Ctr.	234 Pfd. = 200 + 34 Pfd. = 2 Ctr. 34 Pfd.
u. s. w.	u. s. w.

25 Centner = 2500 Pfd.	34|00 Pfd. = 34 Ctr.
172 Centner = 17200 Pfd.	249|00 Pfd. = 249 Ctr.
84 Ctr 36 Pfd. = 8436 Pfd.	72|35 Pfd. = 72 Ctr. 35 Pfd.
90 Ctr. 4 Pfd. = 9004 Pfd.	60|08 Pfd. = 60 Ctr. 8 Pfd.

Wiederholte Uebung, eine Zahl mit untergeordneter Benennung auf verschiedene Weise auszusprechen. Die Zahl steht an der Wandtafel, die Benennung gibt der Lehrer mündlich. Z. B.

4682 Pfennige	=	46 Mark 82 Pfennige.
" Dezimeter	=	468 Meter 2 Dezimeter.
" Centimeter	=	46 Meter 8 Dezimeter 2 Centimeter, oder
	=	46 Meter 82 Centimeter.
" Millimeter	=	4 Meter 6 Dezimeter 8 Centim. 2 Millim. oder
	=	4 Meter 68 Ctm. 2 Mllm. oder
	=	4 Meter 682 Millimeter.
" Ar	=	46 Hektar 82 Ar.
" □Meter	=	46 Ar 82 □Meter.
" Liter	=	46 Hektoliter 82 Liter.
" Dekagr.	=	46 Kilogramm 82 Dekagramm.
" Gramm	=	4 Kilogr. 68 Dekagr. 2 Gramm oder
	=	4 Kilogramm 682 Gramm.
" Pfund	=	46 Centner 82 Pfund.

Diese Uebung wird bis zur Geläufigkeit fortgesetzt.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr. Uebung 21—26.

II. Addiren.

§. 141. Verfahren.

A. Mündlich.

Beim mündlichen Rechnen die Kinder mit großen Zahlen zu quälen, ist zwecklos. Der bei weitem größere Theil der Rechenaufgaben, welche das bürgerliche Leben gibt, bewegt sich in dem Zahlenraume von 1—100. Auch liegt das formal Bildende der arithmetischen Aufgaben nicht in der Größe der dabei angewandten Zahlen, sondern in der Art und Weise, wie dieselben mit einander verbunden und eingekleidet sind. Das Rechnen mit sehr großen Zahlen hat darum in der Volksschule nach beiden Seiten hin einen sehr beschränkten Werth.

Aufgabe 1. 68 Pfennige + 54 Pfennige = ?

Ausr. 60 + 50 = 110; 8 + 4 = 12; 110 + 12 = 122; 122 Pfg. = 1 Mark 22 Pfg.

8 Dzm. + 7 Dzm. = 15 Dzm. = 1 Meter 5 Dezimeter.

75 Liter + 64 Liter = 139 Liter = 1 Hl 39 lt.

84 Dgr + 58 Dgr = 142 Dgr = 1 Kgr 42 Dgr.

Aufgabe 2. 18 Mark 36 Pfg. + 6 Mark = ?

Ausr. Zu 18 Mark 36 Pfg. sind 6 Mark zu zählen. Ich lege Mark zu Mark, die 6 Mark also zu den 18 Mark; 18 Mark 36 Pfg. + 6 Mark = 24 Mark 36 Pfennig.

9 Mtr. 5 Dzm. + 7 Mtr. = $16^{m}\ 5^{dm}$

8 Hl 45 lt + 15 Hl = 23 Hl 45 lt

25 Neuloth 8 gr + 18 Neuloth = 43 Neuloth 8 gr

Aufgabe 3. 4 Mark 75 Pfg. + 48 Pfg. = ?

Ausr. 75 Pfg. + 48 Pfg. = 123 Pfg. = 1 Mark 23 Pfg. 4 Mark + 1 Mark 23 Pfg. = 5 Mark 23 Pfg.

4 Meter 8 Dzm. + 9 Dzm. = 5 Meter 7 Dzm.
9 Hl 72 lt + 48 lt = 10 Hl 20 lt.
14 Kgr 96 Dgr + 76 Dgr = 15 Kgr 72 Dgr.

Aufgabe 4. 8 Mark 72 Pfg + 9 Mark 84 Pfg. =?

Ausr. 8 Mark + 9 Mark = 17 Mark; 72 Pfg. + 84 Pfg. = 156 Pfg. = 1 Mark 56 Pfg; 17 Mark + 1 Mark 56 Pfg. = 18 Mark 56 Pfg.

25 Meter 70 Ctm. + 18 Mtr. 58 Ctm. = 44^{m} 28^{cm}
2 Ctr. 50 Pfd. + 3 Ctr. 96 Pfd. = 6 Ctr. 46 Pfd.
44 Hl 98 lt + 5 Hl 12 lt = 50 Hl 10 lt.

B. Schriftlich.

1) 8 Mark 36 Pfg. + 27 Mark 58 Pfg. + 43 Mark 5 Pfg. + 275 Mark 87 Pfg. =?

Die Aufgabe wird so, wie sie hier steht, an die Wandtafel geschrieben. Dann werden die Zahlen unter einander gesetzt, die Mark unter die Mark, die Pfennige unter die Pfennige, immer die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner.

Mark	Pfg.
8	36
27	58
43	05
275	87
1	2
354	86

Wir addiren zuerst die Pfennige. 7 + 5 + 8 + 6 E. = 26 E. = 6 Einer (notirt) und 2 Zehner; 2 + 8 + 5 + 3 Z. = 18 Z. = 8 Z. (notirt) + 1 Hunderter (auch notirt). Wir haben also 186 Pfg. oder 1 Mark + 86 Pfg. Die Mark löschen wir nun wieder ab und zählen sie zu den andern Marken u. s. w.

Wir können also die Hunderter, welche sich bei den Pfennigen ergeben, zu den Marken sogleich hinübernehmen, ohne sie vorher anzuschreiben, und ganz so rechnen, als wären die beiden Zahlensäulen zusammengerückt. Wir rechnen, als wären die Mark in Pfennige aufgelöst und als hätten wir 836 Pfg., 2758 Pfg., 4305 Pfg., 27587 Pfg. zu addiren.

2)

m	dm	cm	mm		m	cm	mm		m	mm		mm
18	7	9	5	=	18	79	5	=	18	795	=	18795
24	9	7	4	=	24	97	4	=	24	974	=	24974
9	8	6	3	=	9	86	3	=	9	863	=	9863
36	9	0	6	=	36	90	6	=	36	906	=	36906
3 3	2	1			3 3	2 1			3 3	2 1		3 3 2 1
90	5	3	8		90	53	8		90	538		90|5|3|8

Wir denken uns die vier Zahlensäulen zusammengerückt, und addiren die gegebenen Zahlen ohne Weiteres, wie man 18795 + 24974 + 9863 + 36906 addirt. Die Millimeter sind die Einer, die Centimeter sind die Zehner u. s. w.

6 + 3 = 9, + 4 = 13, + 5 = 18 E. = 8 E. (notirt) und 1 Zehner.
1 + 6 = 7, + 7 = 14, + 9 = 23 Z. = 3 Z. (notirt) u. 2 Hunderter 2c.

3) Hl	lt	4) Hl	lt	5) Hl	lt
48	86	126	35	24	72
165	90	73	87	343	96
39	05	148	60	98	84
8	78	87	58	9	55
2	1	2	2	3	1
262	59	436	40	477	07

Der Schüler erinnert sich, daß 100 lt = 1 Hl. So viele Hunderte von Litern, so viele Hektoliter. Wir rechnen demgemäß: 8 + 5 + 0 + 6 Einer = 19 E. = 1 Z. + 9 E.; 9 E. notirt, 1 Z. im Sinn; 1 + 7 + 9 + 8 Z. = 25 Z. = 2 H. + 5 Z.; die 5 Z. notirt, die 2 Hunderter sind 2 Hl und werden daher zu den Hektolitern gezählt u. s. w.

Oder wir denken uns die Hektoliter und Liter in Liter, die mehrfach benannten Zahlen also in einfach benannte verwandelt, und addiren diese, wie man unbenannte Zahlen addirt, nämlich wie 4886 + 16590 + 3905 + 878.

Auf dieselbe Weise werden nun auch folgende Aufgaben behandelt.

6) Dgr	gr	7) Kgr	Dgr	8) Kgr	Dgr	gr	9) Hektar	Ar	□m
75	3	313	46	3	45	2	4	53	85
8	9	529	24	9	84	8	25	08	46
36	5	87	85	7	09	5	8	79	00
22	8	826	49	8	60	7	36	97	09
2		2		2			2	1	
143	5	1757	04	29	00	2	75	38	40

---

§. 142. Mit angewandten Zahlen.

Es hatte Jemand 435 Mark 75 Pfg. in seiner Kasse, und nahm noch 96 Mark 84 Pfg., 248 Mark 56 Pfg. und 89 Mark 48 Pfg dazu ein. Wie viel Geld hatte er nun?

Aufl. Er hatte nun 435 Mark 75 Pfg. + 96 Mark 84 Pfg + 248 Mark 56 Pfg. + 89 Mark 48 Pfg. Ich muß also die Zahlen addiren.

Ausr.

Mark	Pfg.
435	75
96	84
248	56
89	48
2	
870	63

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr. Uebung 27.

III. Subtrahiren.

§. 143. Verfahren.

A. Mündlich.

Aufgabe 1. 27 Mark 40 Pfg. — 19 Mark =?

Ausr. Von 27 Mark 40 Pfg. sind 19 Mark wegzunehmen. Die Mark nimmt man von den Mark, die 19 Mark also von den 27 Mark. 27 — 19 = 8; 27 Mark 40 Pfg. — 19 Mark = 8 Mark 40 Pfg.

Aufgabe 2. 8 Mark 72 Pfg. — 48 Pfg. =?

Ausr. Die 48 Pfg. nehme ich von den 72 Pfennigen. 72 — 48 = 24; 8 Mark 72 Pfg. — 48 Pfg = 8 Mark 24 Pfg.

Aufgabe 3. 15 Mark 48 Pfg. — 8 Mark 36 Pfg. =?

Ausr. 15 Mark 48 Pfg. — 8 Mark = 7 Mark 48 Pfg.; 7 Mark 48 Pfg. — 36 Pfg. = 7 Mark 12 Pfg.

Oder 15 Mark — 8 Mark = 7 Mark, und 7 Mark 48 Pfg. — 36 Pfg. = 7 Mark 12 Pfg.

Da 100 hier fast durchaus die Reduktionszahl ist, so muß der Schüler jede kleinere Zahl sicher und fertig von ihr abziehen können. Daher jetzt folgende Uebung.

100—10, 40, 20, 90, 70, 30, 80, 60, 50 2c.
100—15, 36, 57, 28, 42, 72, 91, 69, 83 2c.

Aufgabe 4. 1 Mark — 32 Pfennige =?

Aufl. Von 1 **Markstück** lassen **Pfennige** sich nicht wegnehmen. Ich muß mir für dasselbe erst Pfennige einwechseln. Für 1 Mark erhalte ich 100 Pfg., und davon nehme ich nun 32 Pfg. weg. Ich rechne daher: 1 Mark = 100 Pfg.; 100 Pfg. — 32 Pfg. = 68 Pfg.; also ist 1 Mark — 32 Pfg. = 68 Pfg.

1 Mark — 24, 65, 48, 75, 36, 52, 84, 68 2c. Pfg.
1 Meter — 15, 37, 53, 78, 97, 26, 44, 85 2c. Centim.

Ferner werden abgezogen

Aren von 1 Hektar	Dekagramm von 1 Kilogr.
Liter von 1 Hektoliter	Pfunde von 1 Centner.

Aufgabe 5. 1 Kilogramm — 345 Gramm =?

Ausr. 1 Kilogramm = 1000 Gramm. Ich ziehe also 345 gr von 1000 gr ab. 1000 — 300 = 700; 700 — 40 = 660, und 660 — 5 = 655. 1 Kgr — 345 gr = 655 gr oder 65 Dgr 5 gr.

Aufgabe 6. 8 Mark — 25 Pfg. =?

Aufl. Wenn ich 8 Markstücke habe und will 25 Pfennige davon ausgeben, so wechsle ich mir zuerst für 1 Markstück 100 Pfennige ein. Dann habe ich 7 Mark und 100 Pfennige. Von den 100 Pfg. nehme ich dann 25 Pfg. weg. Ich rechne daher: 8 Mark = 7 Mark + 100 Pfg.; 100 — 25 = 75; also sind 8 Mark — 25 Pfg. = 7 Mark 75 Pfg.

12 Mark — 64 Pfg. =?	9 Hl — 58 lt =?
5 Meter — 65 Ctm. =?	4 Kgr — 72 Dgr =?
3 Hektar — 93 Ar =?	6 Ctr. — 46 Pfd. =?

Aufgabe 7. 12 Mark — 7 Mark 45 Pfg.

Ausr. 12 Mark — 7 Mark = 5 Mark, und 5 Mark — 45 Pfg. = 4 Mark 55 Pfg.

Aufgabe 8. 3 Meter 40 Ctm. — 94 Ctm. =?

Ausr. 94 = 40 + 54; 3 Meter 40 Ctm. — 40 Ctm. = 3 Meter, und 3 Meter — 54 Ctm. = 2 Meter 46 Ctm.

Oder: 3 Meter 40 Ctm. = 340 Ctm.; 340 — 90 = 250, und 250 — 4 = 246; 246 Ctm. = 2 Mtr. 46 Ctm.

Oder: Ich ziehe die 94 Centimeter von 3 Meter ab, Rest 2 Meter 6 Ctm.; es bleiben also 2 Meter 6 Ctm. + 40 Ctm. = 2 Meter 46 Ctm.

Oder: Zu 94 Ctm. muß ich noch 6 Ctm. legen, um 1 Meter, und zu 1 Mtr. noch 2 Mtr. 40 Ctm., um 3 Mtr. 40 Ctm. zu erhalten. 6 Ctm. + 2 Mtr. 40 Ctm. = 2 Mtr. 46 Ctm.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. 9 Mark 75 Pfg. — 3 Mark 86 Pfg. = ?

Ausrechnung.

a. Mark	Pfg.	b. Mark	Pfg.	c. Mark	Pfg.
9	75	9.	1.7.5	9.	7.5
— 3	86	— 3	8 6	— 3	8 6
		5	8 9	5	8 9

86 Pfg. können von 75 Pfg. nicht abgezogen werden. Wir müssen daher 1 Mark entlehnen und diese in Pfennige verwandeln. 1 Mark = 100 Pfg.; 100 Pfg. + 75 Pfg. = 175 Pfg. Wir setzen die Ziffer 1 vor 75, wie die Rechnung b. zeigt. Nun heißt es: 8 Mark 175 Pfg. — 3 Mark 86 Pfg. Der Rest = 5 Mark 89 Pfg.

Die Sache läßt sich aber kürzer ausführen. Wir betrachten die 9 Mark 75 Pfg. als 975 Pfg., die 3 Mark 86 Pfg. als 386 Pfg. und ziehen dann ohne Weiteres 386 Pfg. von 975 Pfg. ab, wie 386 von 975. Dann sieht die Rechnung aus, wie unter c., und dabei bleiben wir.

Beispiel 2. $37^{m}\ 35^{cm} - 19^{m}\ 86^{cm} = ?$

Ausrechnung.

m	cm		cm
3.7.	3.5	=	3.7.3.5
19	8 6	=	1 9 8 6
17	4 9		17|4 9

Wir betrachten, wie die zweite Ausrechnung zeigt, 37 Meter 35 Ctm. als 3735 Centimeter, ferner 19 Mtr. 86 Ctm. als 1986 Centimeter und ziehen die gegebenen Zahlen ohne Weiteres wie 1986 von 3735 ab.

Beispiel 3. $10^{m} - 8^{m}\ 7^{dm}\ 3^{cm}\ 5^{mm} = ?$

Ausrechnung.

m	dm	cm	mm
1.0	.0.	0.	0
3	7	3	5
6	2	6	5

Von $10^{m}\ 0^{dm}\ 0^{cm}\ 0^{mm}$ sollen $3^{m}\ 7^{dm}\ 3^{cm}\ 5^{mm}$ abgezogen werden. Um diese abziehen zu können, so borge ich 1^{m} und verwandle es in 10^{dm}; von diesen 10^{dm} borge ich 1^{dm} und verwandle es in 10^{cm} und von diesen 10^{cm} verwandle ich 1^{cm} in 10^{mm}.

Anstatt 10^m haben wir jetzt 9^m 9^{dm} 9^{cm} 10^{mm}, und davon nehmen wir nun 3^m 7^{dm} 3^{cm} 5^{mm} weg.

Besser: 10 Meter = 10000 Millimeter, und 3 Mtr. 7 Dzm. 6 Ctm. 5 Mllm. = 3735 Millimeter. Wenn wir daher die fehlenden Stellen ergänzt haben, so rechnen wir ohne Weiteres so, als hätten wir 3735 von 10000 abzuziehen.

Beispiel 4. 125 Hl 32 lt — 87 Hl 68 lt = ?

Ausr.	Hl	lt
	1.2.5.	3.2
	8 7	6 8
	3 7	6 4

125 Hl 32 lt = 12532 lt und 87 Hl 68 lt = 8768 lt. Man zieht daher die gegebenen Zahlen ab, wie 8768 von 12532. Der Rest beträgt 3764 lt = 37 Hl 64 lt.

Beispiel 5. 374 Hl — 186 Hl 54 lt = ?

Ausr.	Hl	lt
	3.7.4	0.0
	1 8 6	5 4
	1 8 7	4 6

374 Hl = 37400 lt, und 186 Hl 54 lt = 18654 lt. Man ergänzt die fehlenden Stellen durch Nullen und subtrahirt dann die mehrfach benannten Zahlen, wie einfach oder unbenannte Zahlen.

Beispiel 6. 64 Hl 5 lt — 28 Hl 32 lt = ?

Ausr.	Hl	lt
	6.4	0.5
	2 8	3 8
	3 5	6 7

64 Hl 5 lt = 6405 lt, und 28 Hl 38 lt = 2838 lt. Die Stelle der Zehner, welche im Minuenden fehlen, vertritt eine Null.

Beispiel 7. 72 Dgr 4 gr — 45 Dgr 7 gr = ?

Ausr.	Dgr	gr
	7 2.	4
	4 5	7
	2 6	7

72 Dgr 4 gr = 724 gr, und 45 Dgr 7 gr = 457 gr; 457 gr von 724 gr bleiben 267 gr = 26 Dgr. 7 gr.

Beispiel 8. 50 Kgr 7 Dgr — 18 Kgr 24 Dgr = ?

Ausr.	Kgr	Dgr
	5.0.	07
	1 8	24
	3 1	83

50 Kgr 07 Dgr = 5007 Dgr, und 18 Kgr 24 Dgr = 1824 Dgr; der Rest ist 3183 Dgr = 31 Kgr 83 Dgr.

Beispiel 9. 8 Kgr 4 gr — 3 Kgr 84 Dgr 5 gr = ?

Ausr.	Kgr	Dgr	gr
	8.	0.0.	4
	7	8 4	5
	4	1 5	9

8 Kgr 4 gr = 8004 gr, und 3 Kgr 84 Dgr 5 gr = 3845 gr.

Die fehlenden Stellen werden durch Nullen vertreten. Der Rest beträgt 4159 gr = 4 Kgr 15 Dgr 9 gr.

	10) Hektar	Ar		11) Ar	□m		12) Hektar	Ar	□m
	4.5.	8.7.		8.0.	0.5		1.9.	0 4	8.5
—	1 8	4 8	—	3 7	2 8	—	8	7 2	4 8
	2 7	3 9		4 2	7 7		1 0	3 2	3 7

Aufg. Uebung 28.

§. 144. Mit angewandten Zahlen.

A. Mündlich.

Eine passende Stelle finden hier die leichtesten Fälle aus der Gewinn- und Verlustrechnung.

1) Ein Obsthändler kauft das Pfund Kirschen um 16 Pfg.; wie viel gewinnt oder verliert er daran, wenn er es um 20 Pfg. (um 12, um 24, um 10, um 30 Pfg. wieder verkauft?

2) Einen Gastwirth kostet das Liter Wein 72 Pfg.; er verkauft es aber um 1 Mark 12 Pfg. Wie viel gewinnt er daran?

Der Gastwirth gewinnt am Liter so viel, als 1 Mark 12 Pfg. mehr ist, denn 72 Pfg. Und wie findest du das?

a) Ich sehe zu, wie viel ich zu 72 Pfg. legen muß, um 1 Mark 12 Pfg. zu erhalten. Zu 72 Pfg. muß ich noch 8 + 20 oder 28 Pfg. legen, um 1 Mark zu erhalten; 28 Pfg. + 12 Pfg. = 40 Pfg.

b) Ich ziehe 72 Pfg. von 1 Mark 12 Pfg. ab, und sehe zu, was übrig bleibt. 72 Pfg. von 1 Mark oder 100 Pfg. bleiben 28 Pfg., von 1 Mark 12 Pfg. bleiben also 28 Pfg. + 12 Pfg. oder 40 Pfg.

Der Gastwirth gewinnt also am Liter 40 Pfg.

3) Ein Kaufmann hat für das Meter Tuch 3 Mark 30 Pfg. bezahlt, kann aber nur 2 Mark 42 Pfg. dafür lösen; wie viel verliert er daran?

Er verliert so viel, als 2 Mark 42 Pfg. weniger ist, denn 3 Mark 30 Pfg. Und wie findest du das?

a. Ich sehe zu, wie viel ich von 3 Mark 30 Pfg. wegnehmen muß, um auf 2 Mark 42 Pfg. herunter zu kommen, oder wie viel ich auf 2 Mark 42 Pfg. legen muß, um auf 3 Mark 30 Pfg. hinauf zu kommen.

b. Ich ziehe 2 Mark 42 Pfg. von 3 Mark 30 Pfg. ab.

4) Ein Kaufmann zahlt für das Kilogramm einer Waare 75 Pfg und verkauft es mit 21 Pfg. Gewinn; wie viel läßt er sich dafür bezahlen?

Um 75 Pfg. hat er das Kilogramm gekauft. Verkauft er es mit 1 Pfg. Gewinn, so löst er 75 Pfg. + 1 Pfg.; verkauft er es mit 2 Pfg. Gewinn, so löst er 75 Pfg. + 2 Pfg. Er verkauft aber mit 21 Pfg. Gewinn; also löst er 75 Pfg. + 21 Pfg. oder 96 Pfg.

5) A kauft ein Pferd um 260 Mark und verkauft es wieder mit 28 Mark Verlust, wie theuer also?

Würde A nur 1 Mark verlieren, so würde er 260 Mark — 1 Mark lösen; würde er 2 Mark verlieren, so würde er 260 Mark — 2 Mark lösen. Da er 28 Mark verliert, so löst er 260 Mark — 28 Mark. Also ꝛc.

B. Schriftlich.

Eine Bauersfrau löst für verkaufte Gänse 18 Mark 45 Pfg., für Butter und Schmalz 30 Mark 84 Pfg. und für Eier 24 Mark 15 Pfg; dagegen gibt sie aus für Zeug zu einem Kleide 15 Mark 75 Pfg., für Kaffee und Zucker 9 Mark 64 Pfg. und für Gewürz 2 Mark 50 Pfg. Wie viel Geld bleibt ihr übrig?

Auflösung.

Zuerst muß ich suchen, wie viel die Frau im Ganzen eingenommen hat. Sie hat eingenommen 18 Mark 45 Pfg. + 30 Mark 84 Pfg. + 24 Mark 15 Pfg. Das muß ich also zusammenzählen. Dann suche ich, wie viel sie im Ganzen ausgegeben hat. Ausgegeben hat sie 15 Mark 75 Pfg. + 9 Mark 64 Pfg. + 2 Mark 50 Pfg. Das muß ich auch zusammenzählen. Dann ziehe ich die ganze Ausgabe von der ganzen Einnahme ab.

Ausrechnung.

Mrk.	Pfg.		Mrk.	Pfg.		Mrk.	Pfg.
18	45		15	75		7.3.	4.4
30	84		9	64		2 7	8 9
24	15		2	50	Rest =	4 5	5 5
Einnahme = 73	44	Ausgabe =	27	89			

Der Lehrer halte streng darauf, daß die Rechenarbeit ein Bild der Ordnung sei. Es hat dieß einen guten Einfluß auf den Schüler und erleichtert im höchsten Grade dem Lehrer die Uebersicht und Korrektur.

Aufg. Uebung 29 u. 30.

IV. Multipliciren.

§. 145. Verfahren.

A. Mündlich.

a. Der Multiplikand ist eine einfach benannte Zahl.

1) 9 × 28 Pfennige = ?

Ausr. 9 × 28 = 9 × 20 + 9 × 8; 9 × 20 = 180; 9 × 8 = 72; 180 + 72 = 252; 252 Pfennige = 2 Mark 52 Pfg.

2) 6 × 59 Liter = ?

Ausr. 6 × 59 = 6 × 50 + 6 × 9 = 300 + 54 = 354; 354lt = 3Hl 54lt.

Oder: 6 × 59 = 6 × 60 — 6 × 1; 6 × 60 = 360, und 6 × 1 = 6; 360 — 6 = 354; 354lt = 3Hl 54lt.

3) 36 × 7 Dezimeter = ?

Ausr. 36 × 7 = 30 × 7 + 6 × 7; 30 × 7 = 210, und 6 × 7 = 42; 210 + 42 = 252; 252 Dzm. = 25 Mtr. 2 Dzm.

Oder: 36 × 7 = 7 × 36 = 210 + 42 = 252; 252 Dzm. ꝛc.

4) 19 + 12 Centimeter = ?

Ausr. 19 × 12 = 10 × 12 + 9 × 12; 10 × 12 = 120, und 9 × 12 = 108; 120 + 108 = 228; 228 Centimeter = 2 Mtr. 28 Ctm.

Oder: 19 × 12 = 20 × 12 — 1 × 12; 20 × 12 = 240, und 1 × 12 = 12; 240 — 12 = 228; 228 Ctm. = 2^{m} 28^{cm}.

5) 32 × 45 Ar = ?

Ausr. 32 × 45 = 30 × 45 + 2 × 45; 3 × 45 = 135, und 10 × 135 = 1350; 2 × 45 = 90; 1350 + 90 = 1440; 1440 Ar = 14 Hektar 40 Ar.

Oder: 32 = 4 × 8; 32 × 45 = 4 × 8 × 45; 8 × 45 = 360, und 4 × 360 oder 4 × 36 × 10 = 1440; 1440 Ar = 14 Hektar 40 Ar.

6) 16 × 35 Dekagramm = ?

Ausr. 16 × 35 = 10 × 35 + 6 × 35; 10 × 35 = 350; 6 × 35 = 210; 350 + 210 = 560; 560 Dekagramm = 5 Kilogramm 60 Dekagramm.

Oder: Statt 35 setze ich das Doppelte und statt 16 nur die Hälfte.

16 × 35 = 8 × 70 = 560; 560 Dekagr. = 5 Kgr 60 Dgr.

7) 5 × 48 Pfund = ?

Ausr. 10 × 48 = 480; 5 × 48 ist halb so viel. Die Hälfte von 480 = 240; 240 Pfund = 2 Ctr. 40 Pfd.

8) 11 × 45 Pfennige = ?

Ausr. 10 × 45 = 450, und 1 × 45 = 45; 450 + 45 = 495.

Oder: 1 × 45 = 45
10 × 45 = 450
11 × 45 = 495; 495 Pfg. = 4 Mark 95 Pfg.

Man denkt: 4 + 5 = 9, und setzt die 9 zwischen 4 und 5.

9) 24 × 50 Pfennige = ?

Ausr. 2 × 50 Pfg. = 100 Pfg. = 1 Mark. So oft ich 2 × 50 Pfennige habe, so oft habe ich eine Mark. 24 = 12 × 2; 24 × 50 Pfg. = 12 × 2 × 50 Pfg., also auch = 12 × 1 Mark = 12 Mark.

10) 16 × 25 Dekagramm = ?

Ausr. 4 × 25 Dekagr. = 100 Dekagr. = 1 Kilogr. So oft ich 4 × 25 Dekagr. habe, so oft habe ich 1 Kilogr.; 16 × 25 Dekagr. = 4 × 4 × 25 Dekagr. = 4 × 1 Kgr. = 4Kgr.

11) 48 × 5 Gramm = ?

Ausr. 48 × 10gr = 48Dgr; 48 × 5gr ist halb so viel = 24 Dgr.

12) 100 × 87 Pfennige = ?

Ausr. 100 × 87 Pfg. = 87 × 100 Pfg. = 87 × 1 Mark = 87 Mk.

Oder: 100 × 1 Pfg. = 1 Mark; 100 × 2 Pfg. = 2 × 1 Mark; 100 × 87 Pfg. = 87 × 1 Mark oder 87 Mark.

13) 32 × 75 Pfennige?

Ausr. 75 = 50 + 25; 32 × 75 = 32 × 50 + 32 × 25; 32 × 50 Pfg. = 16 Mark, und 32 × 25 Pfg. ist halb so viel, also = 8 Mark; 16 M. + 8 M. = 24 Mark.

14) 12 × 26 Liter = ?

Ausr. 10 × 26 = 260, und 2 × 26 = 52; 260 + 52 = 312; 312 Liter = 3 Hektoliter 12 Liter.

Oder: 12 × 26 = 12 × 25 + 12 × 1; 12 × 25 Liter = 3 × 100 Liter = 3Hl; 12 × 1 Liter = 12lt; zus. 3Hl 12lt.

15) 17 × 34 Pfund = ?

Ausr. 17 × 34 = 17 × 30 + 17 × 4; 17 × 30 = 17 × 3 × 10 = 510; 17 × 4 = 68; 510 + 68 = 578; 578 Pfund = 5 Ctr. 78 Pfd.

Von Folgendem wird nur unter Umständen Gebrauch gemacht.

100 Pfg.	= 1 Mark.	100^{cm}	= 1^m	100 Ar	= 1 Hektar
50 „	= 1/2 „	50 „	= 1/2 „	50 „	= 1/2 „
25 „	= 1/4 „	25 „	= 1/4 „	25 „	= 1/4 „
20 „	= 1/5 „	20 „	= 1/5 „	20 „	= 1/5 „
10 „	= 1/10 „	10 „	= 1/10 „	10 „	= 1/10 „

Eben so mit Liter und Hektoliter, mit Neuloth oder Dekagramm und Kilogramm, mit Pfund und Centner.

1) 28 × 50 Pfennige = ?

Ausr. 50 Pfg. = $^1/_2$ Mark; 2 × 50 Pfg. = 2 × $^1/_2$ Mark; 3 × 50 Pfg. = 3 × $^1/_2$ Mark; also sind 28 × 50 Pfg. = 28 × $^1/_2$ Mark = $^{28}/_2$ Mark = 14 Mark.

2) 52 × 25 Pfennige = ?

Ausr. 25 Pfg. = $^1/_4$ Mark; 52 × 25 Pfg. = 52 × $^1/_4$ Mark = $^{52}/_4$ Mark = 13 Mark.

3) 84 × 75 Pfennige = ?

Ausr. 84 × 25 Pfg. = 84 × $^1/_4$ Mark = 21 Mark; 84 × 75 Pfg. = 3 × 21 oder 63 Mark.

4) 85 × 20 Pfennige = ?

Ausr. 20 Pfg. = $^1/_5$ Mark; 85 × 20 Pfg. = 85 × $^1/_5$ Mark = 17 Mark.

5) 65 × 80 Pfennige = ?

Ausr. 65 × 20 Pfg. = 65 × $^1/_5$ Mark = 13 Mark; 65 × 80 Pfg. = 4 × 13 oder 52 Mark.

b. Der Multiplikand ist eine mehrfach benannte Zahl.

Beispiel 1. 3 × 7 Mark 45 Pfennige = ?

Ausr. 3 × 7 Mark 45 Pfg. = 7 Mark 45 Pfg. + 7 Mark 45 Pfg. + 7 Mark 45 Pfg. = 3 × 7 Mark + 3 × 45 Pfg. Also sind sowohl die 7 Mark, als die 45 Pfennige 3mal zu nehmen. 3 × 7 Mark = 21 Mark; 3 × 45 Pfg. = 135 Pfg. = 1 Mark 35 Pfg; 21 Mark + 1 Mark 35 Pfg. = 22 Mark 35 Pfg.

Beispiel 2. 8 × 17^m 7^{dm} = ?

Ausr. 8 × 17^m = 80 + 56 = 136^m; 8 × 7^{dm} = 56^{dm} = 5^m 6^{dm}; 136^m + 5^m 6^{dm} = 141^m 6^{dm}.

Beispiel 3. 6 × 18 Hl 65 lt = ?

Ausr. 6 × 18 Hl = 60 + 48 = 108 Hl; 6 × 65 lt = 360 + 30 = 390 lt = 3 Hl 90 lt; 108 Hl + 3 Hl 90 lt = 111 Hl 90 lt. Oder:

6 × 18 Hl = 108 Hl; 6 × 65 lt = 6 × 50 lt + 6 × 15 lt; 6 × 50 lt = 3 Hl, und 6 × 15 lt = 90 lt; 108 Hl + 3 Hl 90 lt = 11 Hl 90 lt.

Beispiel 4. 7 × 4 Kgr 84 Dgr 5 gr = ?

Ausr. 7 × 4 Kgr = 28 Kgr; 7 × 84 Dgr = 560 + 28 = 588 Dgr = 5 Kgr 88 Dgr; 28 Kgr + 5 Kgr 88 Dgr = 33 Kgr 88 Dgr; 7 × 5 gr = 35 gr = 3 Dgr 5 gr; 33 Kgr 88 Dgr + 3 Dgr 5 gr = 33 Kgr 91 Dgr 5 gr.

B. Schriftlich.

a. Der Multiplikand ist eine einfach benannte Zahl.

1) 37 × 53 Pfennige = ? 2) 84 × 67 Liter = ?

Ausrechnung

```
  5 3 Pfg.                       6 7 lt
    3 7                          8 4
  -----                        -----
  3 7 1                        2 6 8
1 5 9                        5 3 6
---------                    ---------
1 9|6 1 = 19 Mark 61 Pfg.    5 6|2 8 L = 55 Hl 28 lt.
```

b. Der Multiplikand ist eine mehrfach benannte Zahl

Beispiel 1. 36 × 127 Mark 87 Pfg. = ?

a.

127 Mark 87 Pfg. =
1 2 7 8 7 Pfg.
× 3 6
7 6 7 2 2
3 8 3 6 1
4 6 0 3|3 2 Pfg. = 4603 M. 32 Pfg.

b.

127 Mark 87 Pfg.
× 6
767 22
× 6
4603 32

Das Verfahren unter a, wo wir die höhere Sorte in die niedere aufgelöst, diese mit 36 multiplicirt und das Produkt auf die höhere Sorte wieder zurückgeführt haben, ist in allen Fällen anwendbar. Man kann es daher das Normal-Verfahren nennen. Unter b haben wir den Multiplikator 36 in seine Faktoren 6 × 6 zerlegt, und mit einem nach dem andern multiplicirt. Dieses Verfahren ist natürlich nur dann anwendbar, wenn der Multiplikator eine Produktzahl ist, welche Grundzahlen als Faktoren hat.

Beispiel 2. 24 × 17^{m} 58^{cm} = ?

a.

17^{m} 58^{cm} = 1758^{cm}
× 24
7032
3516
$421|92^{cm}$

b.

17^{m} 58^{cm}
× 6
105 48
4
421 92

Beispiel 3. Multiplicire 38Hl 9lt mit 13!

38Hl 09lt = 3 8 0 9 lt
1 3
1 1 4 2 7
3 8 0 9
4 9 5|1 7 lt = 495Hl 17lt

Um die Schüler vor dem Fehler zu bewahren, die Zahl der Liter, wenn sie nur einstellig ist, unmittelbar an die Zahl der Hektoliter anzureihen, so ist es räthlich, sie daran zu gewöhnen, die fehlende Zehnerstelle durch eine Null zu ersetzen. Dasselbe gilt für die Zahl der Dekagramme, der Pfennige, Are und Pfunde, wenn dieselbe einstellig ist.

Beispiel 4. Vervielfache 8Kgr 3Dgr 8gr mit 37!

8Kgr 03Dgr 8gr = 8 0 3 8 gr
3 7
5 6 2 6 6
2 4 1 1 4
2 9 7|4 0|6 gr = 297Kgr 40Dgr 6gr

(Aufg. Uebung 31 und 32.)

§. 142. Die angewandte Zahl.

A. Mündlich.

Beispiel 1. Ein Meter kostet 95 Pfennige; was kosten 31 Meter?

Aufl. Ein Meter kostet 95 Pfg.; 2 Meter kosten 2 × 95 Pfg.; 3 Meter kosten 3 × 95 Pfg.; 31 Meter kosten daher 31 × 95 Pfg.

Ausr. 31 × 95 Pfg. = 31 × 1 Mark — 31 × 5 Pfg.; 31 × 1 Mark = 31 Mark; 31 × 5 Pfg. = 155 Pfg. = 1 Mark 55 Pfg.; 31 Mark — 1 Mark = 30 Mark, und 30 Mark — 55 Pfg = 29 Mark 45 Pfg. Mithin kosten 31 Meter 29 Mark 45 Pfg.

Beispiel 2. Ein Arbeiter verdient täglich eine Mark 65 Pfg.; wie viel verdient derselbe in 15 Tagen?

Aufl. Wenn ein Arbeiter in 1 Tage 1 Mark 65 Pfg. verdient, so verdient er in 15 Tagen 15 × 1 Mark. 65 Pfg.

Ausr. 15 × 1 Mark = 15 Mark; 15 × 65 Pfg = 10 × 65 + 5 × 65 = 650 + 325 = 975 Pfg. oder 9 Mark 75 Pfg.; 15 Mark + 9 Mark 75 Pfg. = 24 Mark 75 Pfg. Also ꝛc.

Beispiel 3. 1 lt zu 56 (72, 85) Pfg.; wie hoch kommt das Hl?

Aufl. 1 Hl = 100 lt. Wenn also 1 lt 56 Pfg. kostet, so kostet das Hektoliter 100×56 Pfg.; 100×56 Pfg. = 56.00 Pfg. = 56 Mrk. Oder ich rechne: 100×1 Pfg. = 1 Mrk., 100×2 Pfg. = 2×1 Mrk.; 100×56 Pfg. = 56×1 Mrk. oder 56 Mrk.

Beispiel 4. Das Ar zu 8 Mrk. 75 Pfg.; wie hoch kommt das Hektar?

Aufl. 1 Hektar = 100 Ar u. kostet daher 100×8 Mk. 75 Pfg. Ausr.
a. 100×8 Mk. = 800 Mk.; 100×75 Pf. = 75 Mk.; zusammen 875 Mk.
b. 8 Mrk. 75 Pfg. = 875 Pfg.; 100 × 875 Pfg. = 875 Mrk.

B. Schriftlich.

Beisp. 1. Das Hl Wein zu 78 Mk. 45 Pfg.; was kosten 28 Hl?
Aufl. Kostet 1 Hl 78 Mk. 45 Pfg., so kost. 28 Hl 28×78 Mk. 45 Pfg.
Ausr. 78 Mk. 45 Pfg. = 7845 Pfg. × 28

```
62760
15690
2196|60 Pfg. = 2196 Mrk. 60 Pfg.
```

Beisp. 2. Die bayer. Elle = 83 ^{cm} 3 ^{mm}; wie v. sind 35 b. Ellen?
Aufl. Ist 1 b. Elle = 83^{cm} 3^{mm}, so sind 35 b. Ellen = 35×83^{cm} 3^{mm}.
Ausr. a. 83 ^{cm} 3 ^{mm} = 833 ^{mm} × 35

```
4165
2499
29|15|5 mm = 29 m 14 cm 5 mm.
```

b. 82 ^{cm} 3 ^{mm} × 5 × 7

```
416 5
29|15 cm 5 mm
```

Aufgaben: Uebung 33 u. 34.

V. Dividiren.

A. Enthaltensein.

3 Pfg. | 12 Pfg. | 4
(3 Pfg. sind in 12 Pfg. 4mal enthalten.)

Divisor und Dividend sind benannte Zahlen; der Quotient ist eine reine Zahl.

§. 147. Verfahren.

A. Mündlich.

a. Mit gleichbenannten Zahlen. (Als Vorübung.)

1) Wie oft sind 2 Pfg. (3, 4, 5 2c. Pfg.) in 146 Pfg. enthalten?

Ausr. 2 Pfennige sind in 146 Pfennigen so oft enthalten, als 2 in 146; $146 = 140 + 6$; 2 ist in 140 70mal und in 6 3mal, in 146 also 73mal enthalten. Mithin sind 2 Pfg. in 146 Pfg. 2c.

2) Wie oft sind 11 Centimeter in 387 Centimeter enthalten?

Ausr. $387 = 330 + 57 = 330 + 55 + 2$; 11 liegt in 33 3mal, in 330 also 30mal; 11 liegt ferner in 55 5mal und in 2 $^2/_{11}$mal; $30 + 5^2/_{11} = 35^2/_{11}$; 11^{cm} sind also in 387^{cm} $35^2/_{11}$mal enthalten.

3) Wie oft sind 18 Liter in 240 Liter enthalten?

Ausr. $240 = 180 + 60 = 180 + 54 + 6$; 18 ist in 180 10mal, in 54 3mal und in 6 $^6/_{18}$mal; $10 + 3^6/_{18} = 13^6/_{18}$ also 2c.

Oder: $18 = 3 \times 6$; 6 ist in 240 40mal und 3 ist in 40 $13^1/_3$mal enthalten; also sind 18 Liter in 240 Liter $13^1/_3$mal enthalten.

Diese Ausrechnungsweise ist nur da anwendbar, wo wenigstens der eine Faktor des Divisors im Dividenden aufgeht.

4) Wie vielmal sind 35 Ar in 210 Ar enthalten?

Ausr. Ich weiß, wie oft 35 in 70 enthalten ist; $210 = 3 \times 70$; 35 ist in 70 2mal, in 3×70 also 3×2 oder 6mal enthalten 2c.

5) Wie oft sind 25 Neuloth in 1275 Neuloth enthalten?

Ausr. 25 ist in 100 4mal, in 1200 also 12×4 oder 48mal und in 75 noch 3mal, in 1275 also $48 + 3$ oder 51mal enthalten. Also 2c.

6) Wie oft sind 53 Pfund in 472 Pfund enthalten?

Ausr. 53 liegt in 106 2mal, in 4×106 oder 424 also 4×2 oder 8mal; $472 - 424 = 48$; in 48 liegt 53 noch $^{48}/_{53}$mal. Also sind 53 Pfd. in 472 Pfd. $8^{48}/_{53}$mal enthalten.

7) Wie oft sind 23 Pfennige in 800 Pfennigen enthalten?

Ausr. Ich weiß, wie oft 23 in 92 enthalten ist. $100 = 92 + 8$; 23 liegt in 100 4mal und 8 bleibt übrig; 23 liegt in 800 also 8×4 oder 32mal, und 8×8 oder 64 bleibt übrig. 23 liegt in 64 oder in $46 + 18$ noch $2^{18}/_{23}$mal; $32 + 2^{18}/_{23} = 34^{18}/_{23}$. Also 2c.

8) Wie oft sind 125 Pfennige in 900 Pfennigen enthalten?

Ausr. $125 = 5 \times 25$, und $900 = 36 \times 25$; 1×25

ist in 2 × 25 so oft als 1 in 2, 2 × 25 ist in 6 × 25 so oft als 2 in 6 enthalten. Also ist 5 × 25 in 36 × 25 eben so oft als 5 in 36, nämlich $7^1/_5$mal enthalten.

9) 120 in 560 = ?

Ausr. 120 in 560 = 12 in 56 = 3 × 4 in 14 × 4 = 3 in 14 = $4^2/_3$.

10) Wie oft sind 37^{cm} in 364^{cm} enthalten?

Ausr. 37 ist in 370 10mal enthalten; 364 ist um 6 weniger als 370; es geht also nur 9mal, und 37 — 6 oder 31 bleibt übrig. In diesem Reste ist 37 noch $^{31}/_{37}$mal enthalten; 37^{cm} sind also in 364^{cm} $9^{31}/_{37}$mal enthalten.

11) Wie oft sind 29 Liter in 240 Liter enthalten?

Ausr. Anstatt 29 nehme ich 30; 30 ist in 240, wie 3 in 24, 8mal enthalten. 29 ist 8mal enthalten in 8 × 29 oder 232; 240 — 232 = 8; in 8 liegt 29 noch $^8/_{29}$mal. Also sind 29lt in 240lt $8^8/_{29}$ mal enthalten.

b. Mit ungleich und mehrfach benannten Zahlen.

Beispiel 1. Wie oft sind 20 Pfennige in 7 Mark enthalten?

Ausr. 20 Pfg. sind in 7 Mark so oft enthalten, als ich sie davon wegnehmen kann. Pfennige lassen sich ohne Weiteres aber nur von Pfennigen wegnehmen. Ich verwandle daher die 7 Mark in Pfennige. 7 Mark = 700 Pfg. Nun heißt die Frage: Wie oft sind 20 Pfg. in 700 Pfg. enthalten? Antwort: So oft als 20 in 700. 20 in 700 = 2 in 70 = 35mal. Also sind 20 Pfg. in 7 Mark 35mal enthalten.

Oder: Ich suche zuerst, wie oft 20 Pfg. in 1 Mark, d. i. in 100 Pfg. enthalten sind. 20 Pfg. sind in 1 Mark 5mal, in 7 Mark also 7 × 5 oder 35mal enthalten.

Beispiel 2. Wie oft sind 8^{dm} in 12^{m} enthalten.

Ausr. 12^{m} = 12 × 10 oder 120^{dm}. Die Frage ist jetzt: Wie oft sind 8^{dm} in 120^{dm} enthalten? Antwort: So oft, als 8 in 120 enthalten ist. 8 ist in 80 10mal und in 40 5mal, in 120 also 15mal. Also 2c.

Beispiel 3. Wie oft sind 24 Dgr in 1 Kgr 15 Dgr enthalten?

Ausr. 1 Kgr 15 Dgr = 115 Dgr = 96 + 19 Dgr; 24 Dgr sind in 96 Dgr 4mal, in 19 Dgr $^{19}/_{24}$mal, in 115 Dgr also $4^{19}/_{24}$ mal enthalten.

Beispiel 4. Wie vielmal lassen sich 48 lt von 3 Hl 50 lt wegnehmen?

Ausr. 48 lt lassen sich von 3 Hl 50 lt so vielmal wegnehmen, als sie in diesen enthalten sind. 3 Hl 50 lt = 350 lt; 50 lt sind in 350 lt 7mal enthalten; 48 lt sind 7mal enthalten in 7 × 48 oder 336 lt; 336 von 350 bleibt 14; 48 lt sind in diesen 14 lt noch $^{14}/_{48}$mal enthalten. Also lassen sich 48 lt von 3 Hl 50 lt $7^{14}/_{48}$mal wegnehmen.

Beispiel 5. 8 Neuloth sind wie vielmal 1 Neuloth 6 gr?

Ausr. 8 Neuloth sind so vielmal 1 Neuloth 6 gr, als diese in 8 Neuloth enthalten sind. 1 Neuloth 6 gr = 16 gr; 8 Neuloth = 80 gr; 16 gr sind in 80 gr, wie 16 in 80, 5mal enthalten. Also sind 8 Neuloth 5mal 1 Neuloth 6 Gramm.

B Schriftlich.

Beispiel 1. Wie oft sind 4 Mark 32 Pfg. in 280 Mark 80 Pfg. enthalten?

Ausr. 4 M. 32 Pfg. = 432 Pfg. 432 | 28080 | 65mal
280 „ 80 „ = 28080 „ | 2592 |
2160
2160

4 Mark 32 Pfg. sind in 280 Mark 80 Pfg. so oft enthalten, als 432 Pfg. in 28080 Pfg. oder als 432 in 28080, nämlich 65mal.

Beispiel 2. Wie vielmal sind 36^{cm} in 17^{m} 28^{cm} enthalten?

Ausr. $36^{cm} = 36^{cm}$ 36 | 1728 | 48mal.
17^{m} $28^{cm} = 1728^{cm}$ | 144 |
288
288

Beispiel 3. Dividire 2^{m} 4^{dm} durch 2^{cm} 5^{mm}.

Ausr. 2^{cm} $5^{mm} = 25^{mm}$ 25 | 2400 | 96mal.
2^{m} $4^{dm} = 24^{dm}$ | 225 |
$= 240^{cm}$ 150
$= 2400^{mm}$ 150

Beispiel 4. Wie oft lassen sich 54 lt von 14 Hl 58 lt wegnehmen?

Ausr. 14 Hl 58 lt = 1458 lt. 54 | 1458 | 27mal.
| 108 |
378
378

Beispiel 5. Wie vielmal sind 13 Dgr 5 gr in 8 Kgr 64 Dgr enthalten?

Ausr. 13 Dgr 5 gr = 135 gr 135 | 8640 | 64
8 Kgr 64 Dgr 0 gr = 8640 gr | 810 |
540
540

Man bringt also in allen Fällen den Divisor und den Dividenden auf gleiche Benennung und dividirt dann wie mit unbenannten Zahlen.

Aufg. Uebung 35.

§. 148. Mit angewandten Zahlen.

Aufg. 1. Eine Frau verbraucht täglich 2 Dgr 5 gr Kaffee; wie lange reicht sie mit 1 Kilogramm aus?

Aufl. Von dem Kilogramm verbraucht sie am ersten Tage 2 Dgr 5 gr, am zweiten Tag 2 Dgr 5 gr, am dritten Tag 2 Dgr 5 gr u. s. f. So oft sie also 2 Dgr 5 gr von 1 Kgr wegnehmen kann, so vielmal 1 Tag reicht sie mit diesem aus. 2 Dgr 5 gr können aber von 1 Kgr so vielmal weggenommen werden, als sie darin enthalten sind. Es fragt sich nun: Wie oft sind 2 Dgr 5 gr in 1 Kgr enthalten?

Ausr. 2 Dgr 5 gr = 25 gr; 1 Kgr = 100 Dgr = 1000 gr; 25 gr sind in 100 gr 4 mal, in 1000 gr also 10 × 4 oder 40 mal enthalten. Mithin reicht die Frau mit 1 Kgr Kaffee 40 mal 1 Tag oder 40 Tage aus.

Aufg. 2. Für 1 Mark 50 Pfg. erhält man 1 Meter Zeug; wie viel für 24 Mark?

Aufl. So oft ich 1 Mark 50 Pfg bezahle, so oft erhalte ich 1 Meter. Für 24 Mark erhalte ich also so vielmal 1 Meter, als 1 Mark 50 Pfg. in 24 Mark enthalten sind.

Ausr. 1 Mark 50 Pfg. = 150 Pfg., und 24 Mark = 2400 Pfg.; 150 ist in 300 2mal, in 2400 oder 8 × 300 also 8 × 2 oder 16mal enthalten. Also ꝛc.

Aufg. 3. Wie viel Kleider lassen sich aus 60^{m} 8^{dm} Zeug verfertigen, wenn zu jedem derselben 7^{m} 6^{dm} verwendet werden?

Aufl. So oft sich 7^{m} 6^{dm} von 60^{m} 8^{dm} wegnehmen lassen, so oft also 7^{m} 6^{dm} in 60^{m} 8^{dm} enthalten sind, so viel Kleider gibt's.

Ausr. 7^{m} 6^{dm} = 76^{dm} 76 | 608 | 8 Kl.
60^{m} 8^{dm} = 608^{dm} 608

Aufg 4. Wie viele Fäßchen Wein à 1 Hl 25 lt lassen sich aus einem Fasse füllen, welches 15 Hl enthält?

Aufl. So oft 1 Hl 25 lt in 15 Hl enthalten sind, so viele Fäßchen lassen sich davon füllen.

Ausr. 1 Hl 25 lt = 125 125 | 1500 | 12 Fäßchen.
15 Hl = 1500 125
250
250

Aufg. 5. 18 Dgr 5 gr einer Waare kosten 1 Mk.; wie hoch kommen 6 Kgr 66 Dgr von derselben?

Aufl. So vielmal 18 Dgr 5 gr dieser Waare ich kaufe, so vielmal 1 Mk. muß ich bezahlen. So oft daher 18 Dgr 5 gr in 6 Kgr 66 Dgr enthalten sind, so vielmal 1 Mk. kosten diese.

Ausr. 18 Dgr 5 gr = 185 gr 185 | 6660 | 36 Mk.
6 Kgr 66 Dgr = 666 Dgr 555
= 6660 gr 1110
1110

Aufg. 6. Eine Anzahl von Arbeitern theilte 151 Mark 68 Pfg. unter sich. Wie viel waren's ihrer, da jeder 9 Mark 48 Pfg. erhielt?

Aufl. Von den 151 Mark 68 Pfg., welche zu theilen waren, hat ein Arbeiter nach dem andern seine 9 Mark 48 Pfg. weggenommen.

Es waren also so viele Arbeiter, so vielmal 9 Mark 48 Pfg. von 151 Mark 68 Pfg. weggenommen werden können, oder so vielmal 9 Mark 48 Pfg. in 151 Mark 68 Pfg. enthalten sind.

Ausr. 9 M. 48 Pfg. = 948 Pfg. 948 | 15168 | 16 Arb.
151 M. 68 Pfg. = 15168 Pfg.

948
5688
5688

Aufg. Uebung 36.

B. Theilen.

3 | 12 Pfennige | 4 Pfennige.

$\frac{1}{3}$ von 12 Pfg. = 4 Pfg.

Der Divisor ist eine reine Zahl; der Dividend und der Quotient hingegen sind benannte Zahlen.

§. 149. Verfahren.

A. Mündlich.

I. Der Dividend ist eine einfach benannte Zahl.

a Vorübung.

1) Wie heißen die Faktorenpaare von 100?
(2 × 50, 4 × 25, 5 × 20, 10 × 10.)
2) Durch welche Zahlen ist 100 (ohne Rest) theilbar?
(Durch 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.)
3) Wie viel ist $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{50}$) von 100 Pfg.?
4) Wie suchst du den 4ten Theil (den 5ten, 10ten Theil) von 300 Pfg?
Antw. $\frac{1}{4}$ von 100 Pfg. = 25 Pfg; $\frac{1}{4}$ von 300 Pfg. = 3 × 25 oder 75 Pfg.
5) Wie viel beträgt $\frac{1}{20}$ ($\frac{1}{25}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$) von 1700 Liter?
Antw. $\frac{1}{20}$ von 100 lt = 5 lt; $\frac{1}{20}$ von 1700 lt = 17 × 5 lt oder 85 lt.
6) Wie viel ist die Hälfte ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$) von 360 Pfd.?
Antw. 360 = 200 + 160; $\frac{1}{2}$ von 200 Pfd. = 100 Pfd., $\frac{1}{2}$ von 160 Pfd. = 80 Pfd., 100 Pfd. + 80 Pfd. = 180 Pfd.; die Hälfte von 360 Pfd. = 180 Pfd.
Oder: Die Hälfte von 36 Pfd. = 18 Pfd., von 360 Pfd. also 180 Pfd.

Gut ist es, das Zerlegen der Produktzahlen des ersten Hunderts in ihre Faktorenpaare hier wiederholen zu lassen. Ist der Schüler sich augenblicklich bewußt, daß z. B. 72 = 4 × 18; so weiß er auch ohne Weiteres, daß $\frac{1}{4}$ von 72 = 18 und $\frac{1}{4}$ von 720 = 180.

7) Wie läßt sich der 16. Theil von 360 finden?
Antw. 360 = 320 + 40 = 320 + 32 + 8; $\frac{1}{16}$ von 320 = 20, und $\frac{1}{16}$ von 32 + 8 = $2\frac{8}{16}$; 20 + $2\frac{8}{16}$ = $22\frac{8}{16}$.
Oder: 16 = 4 × 4; $\frac{1}{4}$ von 360 = 90, u. $\frac{1}{4}$ von 90 = $22\frac{2}{4}$.

Der 16. Theil von 360 beträgt nach der ersten Ausrechnung $22^8/_{16}$, nach der andern $22^2/_4$. Sind das aber auch wirklich zwei gleiche Ergebnisse? Sind $^8/_{16} = ^2/_4$? Um uns hievon zu überzeugen, so bestimmen wir $^8/_{16}$ und $^2/_4$ von der Zahl 16; $^1/_{16}$ von 16 = 1, und $^8/_{16}$ von 16 = 8 × 1 oder 8; $^1/_4$ von 16 = 4, und $^2/_4$ von 16 = 2 × 4 oder 8; $^8/_{16}$ von einer Zahl betragen hiernach eben so viel als $^2/_4$ von derselben; also sind $^8/_{16} = ^2/_4$, und $22^8/_{16} = 22^2/_4$.

b. Die Zahl des Dividenden ist kleiner als der Theiler.

aa. Der Theiler geht in der Reduktionszahl auf.

1) Wie viel ist $^1/_2$ ($^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_{20}$, $^1/_{25}$) von 1 Mark?
(1 Mark = 100 Pfg.; die Hälfte von 100 Pfg. = 50 Pfg.)
Wie v. Centimeter beträgt $^1/_2$ ($^1/_4$, $^1/_5$ 2c.) von 1 Meter?
Wie v. Aren macht $^1/_2$ ($^1/_4$, $^1/_5$ 2c.) von 1 Hektar?
Wie viel ist $^1/_2$ ($^1/_4$, $^1/_5$ 2c.) von 1 Hektoliter?
Wie viel ist $^1/_2$ ($^1/_4$ 2c.) von 1 Ctr.? von 1 Kilogramm?

2) Wie viel beträgt der 4te Theil von 3 Mark?
Aufl. Der 4. Theil von 1 Mark = 25 Pfg.; der 4. Theil von 3 Mark = 3 × 25 oder 75 Pfg.
Ebenso wird gesucht

$^1/_4$ von 3 Mtr. (in cm)	$^1/_5$ von 2 Mark	$^1/_{10}$ von 3 (7) Mark
$^1/_4$ von 3 Hektoliter	$^1/_5$ von 3 Mtr.	$^1/_{10}$ von 4 (6) Hl
$^1/_4$ von 3 Kilogr.	$^1/_5$ von 4 Hektol.	$^1/_{10}$ von 5 (8) Kilogr.
$^1/_4$ von 3 Ctr.	$^1/_5$ von 5 Kilogr.	$^1/_{10}$ von 7 (9) Ctr.

$^1/_{20}$ von 13 Mark, 17 Mtr., 19 Hl, 11 Kgr, 16 Ctr., 15 Ar.
$^1/_{25}$ von 20 Mark, 24 Mtr., 21 Hl, 22 Kgr, 23 Ctr., 19 Ar.
$^1/_{50}$ von 29 Mark, 32 Mtr., 48 Hl, 36 Kgr, 45 Ctr., 24 Hektar
$^1/_{100}$ von 50 Mark, 64 Mtr., 75 Hl, 84 Kgr, 96 Ctr., 72 Hektar

bb. Der Theiler geht in der Reduktionszahl nicht auf.

1) Wie viel beträgt der 3te Theil von 2 Mark?
Ausr. 3 geht in 100 nicht auf. Ich verwandle daher die 2 Mark in Pfennige; 2 Mark = 200 Pfg.; 200 = 180 + 20; der 3. Theil von 180 Pfg. = 60 Pfg., und der 3. Theil von 20 Pfg. = $6^2/_3$ Pfg.; 60 + $6^2/_3$ = $66^2/_3$ Pfg. Der 3. Theil von 2 Mark = $66^2/_3$ Pfg.
Oder: Die nächste Zahl unter 100, in welcher 3 aufgeht, ist 99; ich denke mir daher die Mark als 99 Pfg. + 1 Pfg. und sage: der 3. Theil von 1 Mark = 33 Pfg., Rest 1 Pfg.; der 3. Theil von 2 Mark = 2 × 33 oder 66 Pfg., Rest 2 × 1 Pfg. oder 2 Pfg.; von diesen 2 Pfg. ist der 3. Theil = $^2/_3$ Pfg. Also ist $^1/_3$ von 2 Mark = $66^2/_3$ Pfg.

2) Wie viel ist $^1/_{12}$ von 7 Mark?
Ausr. 12 geht in 100 nicht auf. 7 Mark = 700 Pfg.; 700 = 600 + 100 = 600 + 96 + 4; $^1/_{12}$ von 60 = 5, von 600 = 50; $^1/_{12}$ von 96 = 8; 50 + 8 = 58; $^1/_{12}$ von 4 = $^4/_{12}$. Also ist $^1/_{12}$ von 7 Mark = $58^4/_{12}$ Pfg.
Oder: 12 = 3 × 4; $^1/_4$ von 7 Mrk. = 1 Mrk. 75 Pfg., und $^1/_3$ von 175 (= 150 + 25) Pfg. = 50 + $8^1/_3$ = $58^1/_3$ Pfg.

Oder: Die nächste Zahl unter 100, in welcher 12 aufgeht, ist 96; ich denke mir daher die Mark als 96 + 4 Pfg. und sage: $^1/_{12}$ von 1 Mark = 8 Pfg., Rest 4 Pfg.; $^1/_{12}$ von 7 Mark = 7 × 8 oder 56 Pfg., Rest 7 × 4 oder 28 Pfg.; von diesen 28 Pfg. ist $^1/_{12}$ = $2^4/_{12}$ Pfg.; 56 + $2^4/_{12}$ Pfg. = $58^4/_{12}$ Pfg.

3) Wie viel beträgt der 35 Theil von 28 Mark?
Ausr. 35 = 5 × 7. Der 7. Theil von 28 Mrk. = 4 Mrk., und der 5. Theil von 4 Mark = 4 × 20 oder 80 Pfg.

c. Die Zahl des Dividenden ist größer als der Theiler.

1) $^1/_4$ von 75 Mark = ?
Ausr. 75 = 72 + 3; $^1/_4$ von 72 Mark = 18 Mark und $^1/_4$ von 3 Mark = 3 × 25 oder 75 Pfg. Der 4. Theil von 75 Mark = 18 Mark 75 Pfg.

2) $^1/_{14}$ von 64 Hektoliter = ?
Ausr. 64 = 56 + 8; $^1/_{14}$ von 56 Hektoliter = 4 Hektoliter. Nun habe ich noch den 14. Theil von 8Hl zu suchen. (100 = 98 + 2.) Der 14. Theil von 1Hl = 7lt, Rest 2lt; $^1/_{14}$ von 8Hl = 8 × 7 oder 56lt, Rest 8 × 2 oder 16lt, und von diesen 16lt ist $^1/_{14}$ = $1^2/_{14}$lt; 56lt + $1^2/_{14}$lt = $57^2/_{14}$lt. Also ist $^1/_{14}$ von 64Hl = 4Hl $57^2/_{14}$lt.

II. Der Dividend ist eine mehrfach benannte Zahl.

a. Die zu theilenden benannten Zahlen sind (von ihrer Benennung abgesehen) reine Vielfache des Theilers.

1) Wie viel ist die Hälfte von 6 Mark 32 Pfg.? von 14 Mark 84 Pfg.? von 32 Mark 90 Pfg.?
2) Suche $^1/_3$ von 12^m 18^{cm}, von 15^m 75^{cm}!
3) Wie viel ist $^1/_4$ von 72 Ctr. 48 Pfd.? Wie viel $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_{12}$?
4) Wie groß ist der 5. Theil von 35Hl 70lt? von 90Hl 65lt?
5) Welches ist der 15. Theil von 45Kgr 90Dgr?

b. Die Zahl der höheren Benennung des Dividenden ist (als reine Zahl betrachtet) kleiner als der Theiler.

1) $^1/_3$ von 2 Mark 67 Pfg. = ?
Ausr. Der 3. Theil von 2 Mark ist nicht 1 Mark. Ich verwandle daher die Mark in Pfennige und nehme die 67 Pfennige dazu. 2 Mark 67 Pfg. = 267 Pfg.; 267 = 240 + 27; $^1/_3$ von 240 = 80, und $^1/_3$ von 27 = 9; 80 + 9 = 89. Also ist $^1/_3$ von 2 Mark 67 Pfg. = 89 Pfg.

2) $^1/_{10}$ von 8 Ctr. 75 Pfd. = ?
Ausr. $^1/_{10}$ von 8 Ctr. ist nicht 1 Ctr.; 10 geht in 100 auf; $^1/_{10}$ von 1 Ctr. = 10 Pfd., von 8 Ctr. = 8 × 10 oder 80 Pfd.; $^1/_{10}$ von 75 Pfd. = $7^5/_{10}$ Pfd.; 80 Pfd. + $7^5/_{10}$ Pfd. = $87^5/_{10}$

Pfd. Also ist $^1/_{10}$ von 8 Ctr. 75 Pfd. = $87^5/_{10}$ Pfd. (= 87 Pfd 25 Neuloth.)

c. Die Zahl der höhern Benennung des Dividenden ist ein vermischtes Vielfaches vom Theiler.

1) $^1/_8$ von 31 Mark 55 Pfg =?

Ausr. $^1/_8$ von 31 Mark = 3 Mark, Rest 7 Mark; 7 Mark 55 Pfg. = 755 Pfg.; 755 = 720 + 35; $^1/_8$ von 720 Pfg. = 90 Pfg., und $^1/_8$ von 35 Pfg. = $4^3/_8$ Pfg.; 90 + $4^3/_8$ Pfg. = $94^3/_8$ Pfg. Also ist $^1/_8$ von 31 Mark 55 Pfg. = 3 Mark $94^3/_8$ Pfg.

2) $^1/_6$ von 23Kgr 55Dgr =?

Ausr. $^1/_6$ von 23Kgr = 3Kgr, Rest 5Kgr.

5Kgr 55Dgr = 555Dgr; 555 = 540 + 15; $^1/_6$ von 540Dgr = 90Dgr, und $^1/_6$ von 15Dgr = 2Dgr, Rest 3Dgr; 90Dgr + 2Dgr = 92Dgr. Nun habe ich 3Kgr 92Dgr.

3Dgr = 30gr; $^1/_6$ von 30gr = 5gr.

Also ist $^1/_6$ von 23Kgr 55Dgr = 3Kgr 92Dgr 5gr.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. Wie viel ist $^1/_{13}$ von 5168 Mark 54 Pfg.?

a.

```
13 | 5168 M. 54 Pfg. | 397 M.
     39
     126
     117
       98
       91
13 |  754 Pfg. | 58 Pfg.
      65
      104
      104
```

b.

```
        5168 Mark 54 Pfg. =
13 | 516854 Pfg. | 397|58 Pfg.
     39          = 397 M. 58 Pfg.
      126
      117
        98
        91
         75
         65
         104
         104
```

Die Ausrechnung unter a fällt mit dem mündlichen Verfahren zusammen. Der 13. Theil von 5168 Mark = 397 Mark, Rest 7 Mark; 7 Mark und 54 Pfg. = 754 Pfg.; der 13. Theil von 754 Pfg. = 58 Pfg.

Bei der Ausrechnung unter b wurde zuerst die höhere Sorte in die niedere aufgelöst; diese wurde dann durch 13 getheilt, und der Quotient wieder auf die höhere Sorte zurückgeführt. Zu empfehlen!

Beispiel 2. Wie viel beträgt

a. $^1/_{16}$ v. 758^m? b. $^1/_{25}$ v. 196 Hl? c. $^1/_{32}$ v. 988 Kgr?

Ausrechnung.

a.

16	758^m	47^m
	64	
	118	
	112	
	60^{dm}	3^{dm}
	48	
	120^{cm}	7^{cm}
	112	
	80^{mm}	5^{mm}
	80	

b.

25	196 Hl	7 Hl
	175	
	2100 lt	84 lt
	200	
	100	
	100	

c.

32	988 Kgr	30 Kgr
	96	
	2800 Dgr	87 Dgr
	256	
	240	
	224	
	160 gr	5 gr.
	160	

Erklärung.

a. Der 16. Theil von $758^m = 47^m$, Rest 6^m; $6^m = 6 \times 10 = 60^{dm}$; der 16. Theil von $60^{dm} = 3^{dm}$, Rest 12^{dm}; $12^{dm} = 12 \times 10$ oder 120^{cm}; der 16. Theil von $120^{cm} = 7^{cm}$, Rest 8^{cm}; $8^{cm} = 8 \times 10$ oder 80^{mm}; der 16. Theil von $80^{mm} = 5^{mm}$. Also ꝛc.

b. Der 25. Theil von 196 Hl = 7 Hl, Rest 21 Hl; 21 Hl $= 21 \times 100 = 2100$ lt; der 25. Theil von 2100 lt = 84 lt. Also ꝛc.

c. Der 32. Theil von 988 Kgr = 30 Kgr, Rest 28 Kgr; 28 Kgr $= 28 \times 100 = 2800$ Dgr; der 32. Theil von 2800 Dgr. = 87 Dgr, Rest 16 Dgr; 16 Dgr $= 16 \times 10 = 160$ gr; der 32. Theil von 160 gr = 5 gr. Also ꝛc.

Beispiel 3. Suche $^1/_{13}$ von 102^m 29^{cm} 7^{mm}!

Ausrechnung.

a.

13	102^m 29^{cm} 7^{mm}	7^m
	91	
13	1129^{cm}	86^{cm}
	104	
	89	
	78	
13	117^{mm}	9^{mm}
	117	

b.

102^m 29^{cm} 7^{mm} =

13	102297^{mm}	$7\|86\|9^{mm}$ =
	91	7^m 86^{cm} 9^{mm}
	112	
	104	
	89	
	78	
	117	
	117	

Beispiel 4. Wie viel ist $^1/_{53}$ von 241 Hl 68 lt?

Ausrechnung.

a.

53	241 Hl 68 lt	4 Hl
	212	
	2968 lt	56 lt
	265	
	318	
	318	

b.

241 Hl 68 lt =

53	24168 lt	456 lt =
	212	4 Hl 56 lt
	296	
	265	
	318	
	318	

Beispiel 5 Theile 1343 Kgr 8 Dgr durch 8!

Ausrechnung.

a.

8 | 1343 Kgr 08 Dgr | 167 Kgr
8
54
48
63
56
8 | 708 Dgr | 88 Dgr
64
68
64
8 | 40 gr | 5 gr

b.

1343 Kgr 08 Dgr =
8 | 134308 Dgr | 16788 Dgr
8 = 167 Kgr 88 Dgr,
54 wozu noch 5 gr
48 kommen.
63
56
70
64
68
64
8 | 40 gr | 5 gr

Aufg. Uebung 37.

§. 150. Mit der angewandten Zahl.

Verfahren.

Aufg. 1. 5 Brüder haben 743 Mark unter sich zu theilen; wie viel bekommt jeder?

Aufl. Die 743 Mark sind nach der Zahl der Brüder in 5 gleiche Theile zu theilen; also bekommt jeder $^1/_5$ von 743 Mark.

Ausr. 743 = 700 + 40 + 3; $^1/_5$ von 700 Mark = 140 Mark; $^1/_5$ von 40 Mark = 8 Mark; 140 Mark + 8 Mark = 148 Mark; $^1/_5$ von 3 Mark = 3 × 20 oder 60 Pfg. Also bekommt jeder 148 Mark 60 Pfg.

Aufg. 2. 9 Meter Zeug kosten 7 Mark 38 Pfg.; was kostet 1 Meter?

Aufl. Um zu finden, was 1 Meter kostet, so müssen wir die 7 Mark 38 Pfg. auf die 9 Meter gleichheitlich vertheilen; auf 1 Meter kommt $^1/_9$ von 7 Mark 38 Pfg.

Ausr. $^1/_9$ von 7 Mark ist nicht 1 Mark; 7 Mark + 38 Pfg. = 738 Pfg.; 738 = 720 + 18; $^1/_9$ v. 720 = 80, und $^1/_9$ von 18 = 2; 80 + 2 = 82; also kostet 1 Meter 82 Pfennige.

Aufg. 3. Aus 277 Meter 50 Centimeter Tuch sind 75 Kleidungsstücke von gleicher Größe gemacht worden. Wie viel Tuch wurde zu 1 Kleidungsstück verwendet?

Aufl. Die 277 Mtr. 50 Ctm. wurden in 75 gleiche Theile getheilt, und aus jedem dieser 75 Theile wurde 1 Kleidungsstück verfertigt. Zu 1 Kleidungsstück wurde also der 75. Theil von 277 Mtr. 50 Ctm. verwendet.

Ausr. 75 | 277m 50cm | 3m Oder: 277m 50cm =
225 75 | 27750cm | 370cm
75 | 5250cm | 70cm 225
525 525 = 3m 70cm
0 525
0

Aufg. Uebung 38 und 39.

Zweiter Abschnitt.

Die Rechnungsarten mit den Münzen, Maßen und Gewichten mit nicht rein decimaler Abtheilung.

§. 151. Vorbemerkung.

Das Rechnen mit den zehntheiligen Münzen, Maßen und Gewichten fällt, wie wir gesehen haben, mit dem Rechnen in reinen Zahlen auf das engste zusammen. Darum reiht sich jenes an dieses am besten unmittelbar an. Das Rechnen mit zehntheiligen Größen ist aber zugleich wieder eine Vorbereitung für das Rechnen mit solchen Größen, deren Abtheilung mit dem Zehnersysteme nicht übereinstimmt. Der Schüler arbeitet sich daher nun leicht auch in dieses ein, und da auch das Lehrverfahren überall das nämliche ist, so können wir hier Vieles voraussetzen und uns kurz fassen, um so mehr, als im Aufgabenhefte zum Kopfrechnen die nichtzehntheiligen Maße und Gewichte schon bei den zehntheiligen berücksichtigt worden sind.

§. 152. Resolviren.

1) 6 Kreuzer, wie viel (süddeutsche) Pfennige?
Ausr. 1 kr. = 4 pf.; 6 kr. = 6 × 4 oder 24 pf.

2) 7 kr. 3 pf., wie viel Pfennige?
Ausr. 7 kr. = 7 × 4 oder 28 pf.; 28 pf. + 3 pf. = 31 pf.

3) 1, 2, 3, 4 . . . . . 10 fl., wie viel Kreuzer?
Ausr. 1 fl. = 60 kr.; 2 fl. = 2 × 60 oder 120 kr.; 3 fl. = ꝛc.

4) 4 fl. 56 kr., wie viel Kreuzer?
Ausr. 4 fl. = 4 × 60 oder 240 kr., 240 kr. + 56 kr. = 296 kr.

5) 1 fl. 35 kr. 2 pf., wie viele Pfennige?
Ausr. 1 fl. = 60 kr.; 60 kr. + 35 kr. = 95 kr.; 95 kr. = 95 × 4 pf. = 360 + 20 oder 380 pf.; 380 pf. + 2 pf. = 382 pf.

6) 48 fl. =? Kreuzer. 7) 75 Pfd. =? Neuloth.

Ausrechnung.

6) 48 fl.
60
2880 kr.

7) 75 Pfd.
60
3750 Neuloth.

1 fl. = 60 kr. (60 untergesetzt); 48 fl. = 48 × 60 kr. oder 60 × 48 kr.

8) 58 Pfd. 32 Neuloth 5 gr = ? 9) 17 fl. 54 kr. 3 pf. = ? pf.

50	60
2932 Neuloth	1074 kr.
10	4
29325 Gramm.	4299 pf.

1 Pfd. = 50 Neuloth (50 untersetzt); 58 Pfd. = 58 × 50 oder 50 × 58 Neuloth, und die 32 Neuloth dazu = 2932 Neuloth.

1 Neuloth = 10 Gramm (10 untergesetzt); 2932 Neuloth = 2932 × 10 oder 10 × 2932 Gr., und die 5 Gr. dazu = 29325 Gramm.

§. 153. Reduciren.

1. Beispiel: 20 pf., wie viele Kreuzer?

Aufl. 4 pf. = 1 kr. So oft ich 4 pf. habe, so oft habe ich 1 kr. So oft also 4 pf. in 20 pf. enthalten sind, so viele Kreuzer machen diese. 4 pf. sind in 20 pf. 5mal enthalten; also sind 20 pf. = 5 kr.

2) Wie heißen die Vielfachen von 60? (120, 180 &c.) Aus wie vielmal 60 besteht 120, 240, 420, 180 &c.? Wie viel Gulden à 60 kr. (oder Schober à 60 Bd.) sind 180, 360, 540, 120 &c. kr. (oder Bd.?).

3) 200 kr. (oder Bd.) sind wie viel Gulden? (oder Schbr.?)

Ausr. 200 kr. = 180 kr. + 20 kr. = 3 fl. 20 kr. (200 Bd. = 3 Sch. 20 Bd.)

4) 1524 kr. = ? Gulden. 5) 4785 Tage, wie viel Jahre?

Ausrechnung.

60 kr. = 1 fl. So oft also 60 kr. in 1524 kr. enthalten sind, so viele Gulden machen diese.

60 | 1524 | 25 fl.
120
324
300
24 kr.

365 Tage = 1 Jahr. So oft also 365 Tage in 4785 Tagen enthalten sind, so viele Jahre betragen diese.

365 | 4785 | 13 Jahre
365
1135
1095
40 Tage.

6) 1539 pf. = ? Gulden &c. 7) 3765 Bg. = ? Rs., Bch.

Ausrechnung.

Ich führe die Pfennige auf Kreuzer und diese auf Gulden zurück.

4 | 1539 | (60) 384 | 6 fl.
12 | 360
33 | 24 kr.
32
19
16
3 pf.

Ich führe die Bogen auf Buch und diese auf Ries zurück.

24 | 3765 | (20) 156 | 7 Rs.
24 | 140
136 | 16 Bch.
120
165
144
20 Bg.

§. 154. Addiren.

1) 14 Schober 48 Bund + 9 Schbr. 37 Bd. = ?

Ausr. 14 Schbr. + 9 Schbr = 23 Schbr.; 48 Bd. + 37 Bd. = 85 Bd. = 1 Schbr. 25 Bd.; 23 Sch. r. + 1 Schbr. 25 Bd. = 24 Schbr. 25 Bd. (Oder: 48 Bd. + 37 Bd. = 48 + 12 + 25 Bd. = 60 + 25 Bd. oder 1 Schbr 25 Bd. 2c.)

2)

fl. (60)	kr. (4)	pf.
8	58	3
27	39	2
3	48	3
125	59	3
(carry) 3	2	
166	26	3

a. 4 | 11 | 2 kr.
8
3 pf.

b. 60 | 206 | 3 fl.
180
26

3)

Pfd (50)	Neul.
37	48
9	27
43	36
6	8
(carry) 2	
97	19

50 | 119 | 2
100
19

4)

Schbr.	Bd.
14	36
27	48
58	27
103	55
(carry) 2	
204	46

60 | 166 | 2 Schbr.
120
46 Bd.

5)

Bll.	Rs.	Bch.
3	9	18
14	8	15
9	0	10
12	5	6
(carry) 2	2	
40	4	9

20 | 49 | 2 Rs.
40
9 Bch.

10 | 24 | 2 Bll.
20
4 Rs.

§. 155. Subtrahiren.

1) 1 Gulden (oder Schock) — 20, 40, 12, 24, 36, 42 kr. (od. Stck.)

2) 7 fl. — 35 kr. = ?

7 fl. = 6 fl. + 1 fl. = 6 fl. + 60 kr.; hievon 35 kr. ab, Rest 6 fl. 25 kr.

3) 48 fl. — 3 fl. 18 kr. = ?

48 fl. — 3 fl. = 45 fl., und 45 fl. — 18 kr. = 44 fl. 42 kr.

4) 50 Jahre 4 Mon. — 16 Jahre 7 Mon. = ?

50 J. 4 Mon. — 16 J. = 34 J. 4 Monate. Wie ziehe ich nun hievon die 7 Monate ab? a. Ich verwandle 1 Jahr in Monate, zähle diese zu den 4 Mon. und nehme hierauf die 7 Mon. davon weg. Also: 34 J. 4 Mon. = 33 J. 12 Mon. + 4 Mon. oder 33 J. 16 Mon.; hievon 7 Mon. ab, so bleiben 33 J. 9 Monat. b. Ich ziehe die 7 Mon. von einem der 34 Jahre ab. 34 J. 4 Mon. — 7 Mon. = 33 J. 5 Mon. + 4 Mon. = 33 J. 9 Mon.

5)

	(borrowed) 83	5
348. fl.	24. kr.	1 pf.
—195 fl.	45 kr.	3 pf.
152 fl.	38 kr.	2 pf.

6)

	(borrowed) 86
44. Pfd.	36 Neuloth
—19 Pfd.	48 "
25 Pfd.	38 Neuloth.

Erkl. 3 pf. von 1 pf. geht nicht; ich borge daher 1 kr.; 1 kr. = 4 pf.; 4 pf. + 1 pf. = 5 pf. Anstatt 24 kr. 1 pf. steht jetzt 23 kr. 5 pf., und nun ziehe ich die 3 pf. von den 5 pf. ab.

45 kr. von 23 kr. geht wieder nicht; ich borge daher 1 fl.; 1 fl. = 60 kr.; 60 kr. + 23 kr. = 83 kr. Anstatt 348 fl. 23 kr. steht jetzt 347 fl. 83 kr. Und davon ziehe ich nun 195 fl. 45 kr. ab.

7)

	(borrowed) 60
142. Schbr.	— Bd.
—57 "	32 "
84 Schbr.	28 Bd.

8)

	(borrowed) 10.	20
43. Bll.	— Rs.	— Bch.
28 "	7 "	15 "
14 Bll.	2 Rs.	5 Bch.

Erkl. Um die 32 Bd. abziehen zu können, so müssen wir von den 142 Schbr. einen Schober in Bund verwandeln. Anstatt 142 Schbr. steht dann 141 Schbr. 60 Bd. Und davon nehmen wir nun 57 Schbr. 32 Bd. hinweg.

§. 156. Multipliciren.

1) 5 (10, 20) Mark, wie viel Gulden und Kreuzer?

Ausr. 1 Mrk. = 35 kr.; 5 Mrk. = 5×35 kr.; 5×30 kr. = 150 kr., und 5×5 kr. = 25 kr.; 150+25 kr. = 175 kr. = 120+55 kr. = 2 fl. 55 kr.

2) 1 Fünfmarkstück gilt 2 fl. 55 kr.; wie viel machen 3 Fünfmarkst.?

Ausr. 3 Fünfmarkst. = 3 × 2 fl. 55 kr. = 3 × 3 fl. — 3 × 5 kr. = 9 fl. — 15 kr. = 8 fl 45 kr.

3) Wie viel Gulden betragen 7 Zehnmarkst. à 5 fl. 50 kr.?

Ausr. 7 Zehnmrkst. = 7 × 5 fl. 50 kr.; 7 × 5 fl. = 35 fl., und 7 × 50 kr. = 350 kr. oder 5 fl. 50 kr.; 35 fl. + 5 fl. 50 kr. = 40 fl. 50 kr

4) Ein 20=Mrkst. = 11 fl. 40 kr.; wie viel betragen 3 dergleichen?

Ausr. 3 Zwanzigmrkst. = 3 × 11 fl. 40 kr. = 33 fl. + 2 fl. = 35 fl.

5) 12 × 15 Bogen, wie viel Buch?

Ausr. 12 × 15 Bg. = 10 × 15 + 2 × 15 Bg.; 10 × 15 = 150, und 2 × 15 = 30; 150+30=180; 180 Bg. = 120 + 60 Bg. = 5 Bch. + 2 Bch. 12 Bg. oder 7 Bch. 12 Bg.

Oder: 15 Bg. = 12 Bg. + 3 Bg. = $\frac{1}{2}$ Bch. + 3 Bg.; 12 × $\frac{1}{2}$ Bch. = 6 Bch., und 12 × 3 Bg. = 36 Bg. oder 1 Bch. 12 Bg.; 6 Bch. + 1 Bch. 12 Bg. = 7 Bch. 12 Bg.

Oder: 12×15 Bg. = 15 × 12 Bg. = 15 × $\frac{1}{2}$ Bch. = $7\frac{1}{2}$ Bch. = 7 Bch. 12 Bg.

6) 21 × 64 fl. 37 kr. =?   7) 56 × 7 Bch. 18 Bg. =?

Ausrechnung.

```
a. 37×21        b. 64×21        |  a. 56×18           b. 56×7
   74              128          |     448               392 Bch.
60|777|12 fl.      1344 fl.     |  24|1008|42 Bch.   + 42  „
  |60 |            +12 „ 57 kr. |    | 96 |        20|434 Bch.|21 Rs.
   177             1356 fl. 57 kr.|    48              |40      |
   120                          |     48                34
    57 kr.                      |                       20
                                |                       14 Bch.
```

21×37 kr. = 777 kr. = 12 fl. 57 kr. 21×64 fl. = 1344 fl. Beide Theilprodukte addirt = 1356 fl. 57 kr.

56×18 od. 18×56 Bg. = 1008 Bg. = 42 Bch.; 56×7 od. 7×56 Bch. = 392 Bch.; zusammen 434 Bch. = 21 Rs. 14 Bch. = 2 Bll. 1 Rs. 14 Bch.

§. 157. Dividiren.

1) Wie oft sind 8 Bg. in 5 Bch. enthalten?

Ausr. 1 Bch. = 24 Bg.; 5 Bch. = 5×24 oder 120 Bg.; 8 Bg. sind in 120, d. i. in 80+40 Bg. 10+5 oder 15mal enthalten. Oder: 8 Bg. sind in 1 Bch. oder 24 Bg. 3mal, in 5 Bch. also 5 × 3 oder 15mal enthalten.

Aufg. 2. Wie oft sind 3 kr. 3 pf. in 1 fl. 24 kr. enthalten?

Ausr. 3 kr. 3 pf. = 15 pf.; 1 fl. 24 kr. = 84 kr. = 84 × 4 = 336 pf. Ich suche nun, wie oft 15 pf. in 336 pf. enthalten sind. 336 = 300 + 30 + 6; 15 ist in 300 20mal, in 30 2mal und in 6 noch $\frac{6}{15}$mal enthalten; 20 + $2\frac{6}{15}$ = $22\frac{6}{15}$. Also 2c.

Aufg. 3. Wie viel beträgt 1/6 von 1 Jahr 10 Mon.?

Ausr. 1/6 von 1 Jahre ist nicht 1 Jahr; 1 J. + 10 Mon. = 12 + 10 oder 22 Mon.; 1/6 von 22 Mon. = 3 Mon., Rest 4 Mon.; 4 Mon. = 4 × 30 oder 120 Tg.; 1/6 von 120 Tg. = 20 Tg.; also ist 1/6 von 1 J. 10 Mon. = 3 Mon. 20 Tg. Oder: 1/6 von 1 Jahre = 2 Mon.; 1/6 von 10 Mon. = 1 Mon., Rest 4 Mon.; 2 Mon. + 1 Mon. + 3 Mon.; 1/6 von 1 Mon. = 5 Tg., von 4 Mon. = 4 × 5 oder 20 Tg.; zusammen 3 Mon. 20 Tg.

Aufg. 4. Wie viel beträgt 1/4 von 35 fl. 36 kr.?

Ausr. 1/4 von 35 fl. = 8 fl., Rest 3 fl.; 3 fl. = 180 kr.; 180 kr. + 36 kr. = 216 kr.; 1/4 von 216 (= 200 + 16 kr.) = 54 kr. Also ist 1/4 von 35 fl. 36 kr. = 8 fl. 54 kr.

Aufg. 5. Wie oft sind 5 fl. 36 kr. in 240 fl. 48 kr. enthalten?

Ausrechnung.

```
5 fl. 36 kr.      240 fl. 48 kr.      336 | 14448 | 43mal
  60                    60                | 1344  |
---------         -------------           -------
336 kr.           14448 kr.                 1008
                                            1008
```

Aufg. 6. Wie viel beträgt 1/25 von 837 Schock 48 Stck.?

```
25 | 837 Schck.   48 Stck. | 33 Schck. 30 18/25 Stck.
   |  75         720       |
   ----         -----
     87          768
     75           75
   -----        -----
   12×60          18
   -----
   720 Stck.
```

Aufgaben: Uebung 40, 41 und 42.

Schlußrechnung.

A. Mündlich.

§. 158. *Es wird von der Einheit auf eine Mehrheit und von einer Mehrheit auf die Einheit geschlossen.*

Die gegebenen gleichartig benannten Zahlen sind:

a. Eine Einheit und eine Mehrheit von gleicher Benennung.

Aufg. 1. Wenn ein Arbeiter 2 Mrk. 35 Pfg. Lohn erhält, wie viel erhalten 18 Arbeiter?

Ausr. Wenn 1 Arbeiter 2 Mrk. 35 Pfg. erhält, so erhalten 18 Arbeiter 18 × 2 Mark 35 Pfg.; 18 × 2 Mark = 36 Mark; 18 × 35 Pfg. = 18 × 30 + 18 × 5 Pfg.; 18 × 30 = 540, und 18 × 5 = 90; 540 + 90 = 630; 630 Pfg. = 6 Mark 30 Pfg.; 36 Mark + 6 Mark 30 Pfg. = 42 Mark 30 Pfg. Also erhalten 2c.

Aufg. 2. Wie berechnet sich 1 Meter, wenn 28 Meter 91 Mrk. 42 Pfg. kosten?

Ausr. 1 Mtr. ist 1/28 von 28 Mtr.; daher kostet 1 Mtr. auch 1/28 von 91 Mrk. 42 Pfg.; 28 = 7 × 4; 1/7 von 91 Mrk. = 13 Mrk., und 1/7 von 42 Pfg. = 6 Pfg.; zusammen 13 Mrk. 6 Pfg. Nun suche ich 1/4 von 13 Mrk. 6 Pfg.; 1/4 von 13 Mrk. = 3 Mrk., Rest 1 Mrk.; 1 Mark + 6 Pfg. = 106 Pfg.; 1/4 von 106 Pfg. = 26 2/4 Pfg. Also berechnet sich 1 Mtr. auf 3 Mark 26 2/4 Pfg.

b. Die Einheit einer niederen und die Einheit der nächsthöheren Benennung.

Beispiel 1. Das Liter zu 16 (24, 36, 48, 64) Pfg.; wie hoch kommt das Hektoliter?

Aufl. 1 Hektoliter = 100 Liter, also 100mal 1 Liter; daher kostet 1 Hektoliter auch 100mal so viel als 1 Liter.

Ausr. Kostet 1 Ltr. 16 Pfg., so kostet 1 Hektoliter 100 × 16 Pfg.; 100 × 1 Pfg. = 100 Pfg. = 1 Mrk; 100 × 2 Pfg. = 200 Pfg. = 2 Mrk.; 100 × 3 Pfg. = 300 Pfg. = 3 Mrk.; 100 × 16 Pfg. = 1600 Pfg. = 16 Mrk. Wenn also das Liter 16 Pfg. kostet, so kostet das Hektoliter 16 Mrk.

Kostet 1 lt 24 Pfg., so kostet 1 Hl 100 × 24 Pfg.; 100 × 1 Pfg. = 1 Mrk.; 100 × 24 Pfg. = 24 Mark.

Eben so:

1 Centimeter zu 7 (13, 25, 38) Pfg.; was kostet 1 Meter?
1 □Meter Bauplatz zu 18 (27, 52, 96) Pfg.; was kostet 1 Ar?
1 Dgr zu 15 (32, 45, 68) Pfg.; was kostet 1 Kgr?
1 Pfd. zu 22 (54, 75, 88) Pfg.; was kostet 1 Ctr.?

Hieraus geht hervor:

So viele **Pfennige** 1 Liter kostet, so viele **Mark** kostet 1 Hektoliter.
" " " 1 Centim. " " " " " 1 Meter.
" " " 1 □Mtr. " " " " " 1 Ar.
" " " 1 Dgr " " " " " 1 Kilogr.
" " " 1 Pfund " " " " " 1 Centner.

Beisp. 2. Das Liter zu 1 Mrk. 75 Pfg.; was kostet das Hl?

Ausr. 1 Hl kostet 100 × 1 Mrk. 75 Pfg. = 100 × 175 Pfg. = 175 Mk.

Beispiel 3. 1 Hl zu 8 (15, 24, 133) Mrk.; was kostet 1 lt?

Aufl. Da 1 Hl = 100 lt, so ist 1 lt $^1/_{100}$ von 1 Hl; daher kostet 1 lt auch $^1/_{100}$ von dem, was ein Hl kostet.

Ausr. Kostet 1 Hl 8 Mrk., so kostet 1 lt $^1/_{100}$ von 8 Mark. $^1/_{100}$ von 1 Mrk. = 1 Pfg.; $^1/_{100}$ von 8 Mrk. = 8 × 1 Pfg. oder 8 Pfg.

Kostet 1 Hl 15 Mrk., so kostet 1 lt $^1/_{100}$ von 15 Mrk.; $^1/_{100}$ von 1 Mark = 1 Pfg., $^1/_{100}$ von 15 Mark = 15 Pfg.

Kostet 1 Hl 133 Mrk., so kostet 1 lt $^1/_{100}$ von 133 Mrk. = 133 Pfg. oder 1 Mrk. 33 Pfg.

Eben so:

1 Meter zu 3 (5, 7, 12) Mark; was kostet 1 Ctm.?
1 Ar Bauplatz zu 15 (21, 32) Mark; was kostet 1 □Mtr.?
1 Hektar zu 375 (850, 1725) Mrk.; was kostet 1 Ar?
1 Kgr zu 4 (6, 8, 15) Mark; was kostet 1 Dgr?
1 Ctr. zu 18 (36, 54, 85, 196, 348) Mark; was kostet 1 Pfd.?

Hieraus geht hervor:

So viele **Mark** 1 Hl kostet, so viele **Pfennige** kostet 1 lt
" " " 1 Mtr. " " " " " 1 Centim.
" " " 1 Ar " " " " " 1 □m
" " " 1 Hektar " " " " " 1 Ar
" " " 1 Kgr " " " " " 1 Dgr
" " " 1 Ctr. " " " " " 1 Pfd.

c. Eine Einheit und eine mehrfach benannte Zahl.

Aufgabe 1. Ein Arbeiter verdient in 1 Tg. 1 Mark 26 Pfg., wie viel in 4 Wch. und 3 Tg.?

Aufl. Berechnet soll werden, wie viel ein Arbeiter in 4 Wch. und 3 Tg. verdient. In 1 Tg. verdient er 1 Mrk. 26 Pf.; also verdient er in 2 Tg. 2 × 1 Mrk. 26 Pfg., in 3 Tg. 3 × 1 Mrk. 26 Pfg. u. s. f. Wie vielmal 1 Mrk. 26 Pfg. verdient er nun aber in 4 Wch. 3 Tg.? Das kann ich nur dann sagen, wenn ich weiß, wie viele Tage dieß sind. 4 Wch. 3 Tg. = 4 × 6 + 3 oder 27 Tage. In 27 Tg. verdient er 27 × 1 Mark 26 Pfg. = 34 Mrk. 2 Pfg.

Aufgabe 2. Man kauft 2 Hl 40 lt Wein um 96 Mrk.; wie berechnet sich das Liter?

Aufl. Wie viel würde 1 lt kosten, wenn man für 2 lt 96 Mrk. bezahlen müßte? (Die Hälfte von 96 Mrk.) Wie viel, wenn 3 lt 96 Mrk. kosten würden? (Den dritten Theil von 96 Mrk.) u. s. w. Wenn ich also weiß, was irgend eine Anzahl von Litern kostet, so kann ich bestimmen, den wie vielten Theil davon 1 lt kostet. Was thun wir daher mit den 2 Hl 40 lt? (Wir verwandeln sie in Liter. 2 Hl 40 lt = 240 lt.) Wie heißt jetzt die Aufgabe? (240 lt zu 96 Mrk.; was kostet 1 lt.) Und wie heißt die Ausrechnung? Antwort: Wenn 240 lt 96 Mrk. kosten, so kostet 1 lt den 240. Theil von 96 Mrk.; da 240 und 96 den Faktor 24 gemeinschaftlich haben, so zerlege ich den Theiler 240 in 10 × 24; $^1/_{24}$ von 96 Mrk. = 4 Mrk., und $^1/_{10}$ von 4 Mrk. = 40 Pfg. Also ꝛc.

d. Die Einheit einer niederen und eine Mehrheit der höheren Benennung.

Aufgabe 1. Das Dekagramm einer Waare kostet 5 Pfg.; wie hoch kommen 4 Kgr derselben?

Aufl. Wie viel 4 Kgr kosten, kann ich finden, wenn ich weiß, was 1 Kgr kostet. Das sagt mir die Aufgabe nicht; ich kann es aber berechnen, weil ich weiß, was 1 Dgr kostet. Ich suche daher zuerst, was 1 Kgr kostet, und dann, was 4 Kgr kosten. (Ich gehe oder schließe von 1 Dgr auf 1 Kgr und von 1 Kgr auf 4 Kgr.) Ausrechnung! Resultat: 20 Mark.

Aufgabe 2. 6 Ctr. Salz kosten 45 Mrk.; wie hoch kommt 1 Pfd.?

Aufl. Was sollen wir hiernach suchen? Was 1 Pfd. kostet. Und was sagt uns die Aufgabe? Was 6 Ctr. kosten. Wie thun wir, wenn wir wissen, was 1 Pfd. kostet, und suchen sollen, was 6 Ctr. kosten? Wir gehen von 1 Pfd. auf 1 Ctr. und von 1 Ctr. auf 6 Ctr. Hier ist's umgekehrt. Wie werden wir also rechnen? Wir gehen von 6 Ctr. auf 1 Ctr. und von 1 Ctr. auf 1 Pfd. Das ist der Gang. Nun geht's zur Ausrechnung. Resultat $7^1/_2$ Pfg.

Aufg. z. Kopfr. Uebung 43—45.

§. 159. **Es wird von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit geschlossen.**

Hier unterscheiden sich wieder zweierlei Fälle.

a. Die eine Mehrheit ist ein reines Vielfaches, oder ein einfacher Theil von der andern.

Zuerst werden Gruppen von Aufgaben über einzelne Produktzahlen und deren Faktoren gebildet. Z. B.

12 = 2 × 6 = 3 × 4 = 4 × 3 = 6 × 2.

a.	b.
12 Pfd. sind 2mal so viel als 6 Pfd.	Von 12 Pfd. sind 6 Pfd. die Hälfte,
3 „ „ „ „ 4 Pfd.	4 Pfd. ein Drittel,
4 „ „ „ „ 3 Pfd.	3 Pfd. ein Viertel,
6 „ „ „ „ 2 Pfd.	2 Pfd. ein Sechstel.

a. Wenn **6** Pfd. Mehl 45 Pfg. kosten, so kosten 12 Pfd. 2mal so viel, also 2 × 45 Pfg. oder 90 Pfg. Wenn **4** Pfd. Mehl 45 Pfg. kosten, so kosten 12 Pfd. 3mal so viel, also 3 × 45 oder 135 Pfg. Wenn **3** Pfd. Mehl 45 Pfg. kosten, so kosten 12 Pfd. 4mal so viel, also 4 × 45 Pfg. oder 180 Pfg. Wenn **2** Pfd. Mehl 45 Pfg. kosten, so kosten 12 Pfd. 6mal so viel, also 6 × 45 Pfg. oder 2 Mark 70 Pfg.

b. Wenn 12 Pfd. Zucker 9 Mark kosten, so kosten **6** Pfd. davon $^1/_2$mal so viel, also nur die Hälfte von 9 Mark oder 4 Mark 50 Pfg.; **4** Pfd. kosten nur $^1/_3$mal so viel, also nur den 3. Theil von 9 Mark oder 3 Mark; **3** Pfd. kosten nur $^1/_4$mal so viel, also nur den 4. Theil von 9 Mark oder 2 Mark 25 Pfg.; **2** Pfd. kosten nur $^1/_6$mal so viel, also nur den 6. Theil von 9 Mark oder 1 Mark 50 Pfg.

In dieser Weise behandle der Lehrer noch einige Produktzahlen und bilde Aufgaben dazu. So etwas muß aus dem Stegreife gehen, frisch und frei.

Nach dieser Uebung werden ähnliche Aufgaben ohne Schwierigkeit gerechnet werden, wobei übrigens folgende Auflösungsweise zu empfehlen ist.

Beispiel 1. 12 Mann verdienen 15 Mark, wie viel 96 Mann?

Aufl. Berechnet soll werden, was 96 Mann verdienen; nach der Aufgabe wissen wir, was 12 Mann verdienen; 12 Mann verdienen 15 Mark; 96 Mann sind 8 × 12 Mann; also verdienen sie auch 8 × 15 Mark; 8 × 15 Mark = 120 Mark. Also verdienen 2c.

Beispiel 2. 96 Morgen ertrugen 267Hl, wie viel 16 Mrg.?

Aufl. Berechnet soll werden, wie viel 16 Mrg. ertrugen; die Aufgabe sagt uns, wie viel 96 Mrg. ertrugen; 96 Mrg. ertrugen 267 Hl; 16 Mrg. sind von 96 Mrg. der sechste Theil; mithin ertrugen sie auch den 6. Theil von 267 Hl; 267 Hl = 240 + 24 + 3 Hl; $^1/_6$ hievon = 44 Hl 50 lt. Also 2c.

b. Die eine Mehrheit ist weder ein reines Vielfaches, noch ein einfacher Theil von der andern.

Beispiel. 3m kosten 84 Pfg.; was ist für 10m zu bezahlen?

Verfahren: Was soll nach unsrer Aufgabe berechnet werden? (Was 10m kosten.) Welche Zahlen sind einfache Theile von 10? (1, 2, 5.) Und von welchen Zahlen ist 10 selbst wieder ein einfacher Theil? (Von 20, 30, 40 2c.) Was 10m kosten, können wir also auf einmal finden, wenn wir wissen, was 1m kostet, oder was 2m, 5m, 20m 2c. kosten. Das wissen wir aber nicht; denn die Aufgabe sagt uns, was 3m kosten. Wie kommen wir nun von 3m auf 10m? Welche Zahl ist ein einfacher Theil von 3 und von 10 zugleich? (1.) Wie werden wir also rechnen? (Wir gehen von 3m auf 1m und von 1m auf 10m.) Ausr. 3m kosten 84 Pfg.; 1m kostet $^1/_3$ von 84 Pfg. oder 28 Pfg. und 10m kosten 10 × 28 Pfg. = 280 Pfg. = 2 Mark 80 Pfg.

Aufg. z. Kopfr. Uebung 46 u. 47.

B. Schriftlich.

§. 160. Verfahren.

Aufg. 1. Ein Stück zu 2 Mark 48 Pfg.; was kostet 1 Dutzend?

Aufl. 1 Dutzend = 12 Stück. Wenn also 1 Stück 2 Mark 48 Pfg. kostet, so kostet 1 Dutzend 12 × 2 Mark 48 Pfg.

Ausr. 2 Mrk. 48 Pfg. = 248 Pfg. × 12

$$\begin{array}{r} 496 \\ 248 \\ \hline 2976 \end{array}$$ Pfg. = 29 Mrk. 76 Pfg.

Aufg. 2. Ein Hopfenhändler bezahlt für 18 Ctr. Waare 3325 Mark 50 Pfg., wie theuer hat er den Ctr. gekauft?

Aufl. Wenn 18 Ctr. 3325 Mark 50 Pfg. kosten, so kostet 1 Ctr. $^1/_{18}$ von 3325 Mark 50 Pfg. Ich muß diese Summe also durch 18 theilen.

Ausr. 3325 Mark 50 Pfg.

18 | 332550 Pfg. | 18475 Pfg. = 184 Mark 75 Pfg.

Aufg. 3. Was kosten 7 Kgr 1 Pfd., das Pfund zu 5 Mark 35 Pfg.?

Aufl. 1 Kgr = 2 Pfd.; 7 Kgr 1 Pfd. = 7 × 2 + 1 = 15 Pfd. Wenn 1 Pfd. 5 Mark 35 Pfg. kostet, so kosten 15 Pfd. 15 × 5 Mark 35 Pfg.

Ausrechnung bekannt. Antwort: 80 Mark 25 Pfg.

Aufg. 4. 8 Mtr. 4 Dzm. zu 36 Mrk.; was kostet 1 Dezimeter?

Aufl. 8 Mtr. 4 Dzm. = 84 Dzm. Diese kosten 36 Mrk.; also kostet 1 Dzm. den 84. Theil von 36 Mark. Ich muß also 36 Mark durch 84 theilen, und da dieß keine ganze Mark gibt, so mache ich die 36 Mark zu Pfennigen. 36 Mark = 3600 Pfg.

84 | 3600 Pfg. | $42^{72}/_{84}$ Pfg.

Aufg. 5. A erspart sich monatlich 3 Mark 75 Pfg.; wie viel demnach in 4 Jahren?

Aufl. 4 Jahre = 4 × 12 oder 48 Monate. Erspart sich A in 1 Monat 3 Mark 75 Pfg., so macht dieß in 48 Mon. 48 × 3 Mark 75 Pfg. Resultat: 180 Mark.

Aufg. 6. 8 Ar Gartenfeld kosten 120 Mark; wie berechnen sich 9 Ar?

Aufl. Ich suche zuerst, was 1 Ar kostet, und dann, was 9 Ar kosten. (Ich gehe oder schließe von 8 Ar auf 1 Ar und von 1 Ar auf 9 Ar.)

Ausr. 8 Ar = 120 Mark.

$$1 \text{ Ar} = \frac{120 \text{ Mark}}{8} = 15 \text{ Mark}$$

9 Ar = 15 Mrk. × 9 = 135 Mark.

Sprechweise: 8 Ar kosten (sind dem Werthe nach gleich) 120 Mark. 1 Ar kostet $^1/_8$ davon, also 120 Mark getheilt durch 8. (Die 8 wird untergesetzt und die Division sogleich ausgeführt.) Gibt 15 Mark. So viel kostet 1 Ar. 9 Ar kosten 9mal so viel, nämlich 9 × 15 Mark; 9 × 15 Mark = 135 Mark. Also kosten 9 Ar 135 Mark.

Aufg. 7. Eine Familie verbraucht in 7 Mon. 26 Kgr 25 Dgr Zucker; wie viel demnach in 1 Jahre?

Aufl. Ich berechne zuerst, wieviel Zucker die Familie in 1 Monat verbraucht, und dann, wie viel sie in 1 Jahre oder in 12 Monaten verbraucht. (Ich gehe oder schließe von 7 Mon. auf 1 Mon. und von 1 Mon. auf 12 Mon.)

Ausr. 26 Kgr 25 Dgr = 2625 Dgr.

$$\text{In 7 Mon.} = 2625 \text{ Dgr}$$
$$\text{„ 1 Mon.} = \frac{2625 \text{ Dgr}}{7} = 375 \text{ Dgr}$$
$$\text{„ 12 Mon.} = 375 \text{ Dgr} \times 12$$

```
  750
 375
 45|00 Dgr = 45 Kgr
```

Sprechweise: In 7 Mon. verbraucht die Familie 2625 Dgr. In 1 Mon. verbraucht sie $^1/_7$ davon, also 2625 Dgr getheilt durch 7. (Die 7 wird untergesetzt und die Division sogleich ausgeführt.) Gibt 375 Dgr. So viel verbraucht die Familie in 1 Monat. In 12 Monaten verbraucht sie 12mal so viel, nämlich 375 Dgr × 12. Gibt 4500 Dgr oder 45 Kgr. Also verbraucht &c.

Ist der Divisor eine mehrstellige Zahl, so wird auch die Division durch eine Nebenrechnung ausgeführt. Selbstverständlich können hier nur Aufgaben gegeben werden, wo die Division keinen Rest gibt. Mehrfach benannte Zahlen werden vorher resolvirt.

Aufg. z. Zifferr., Uebung 43—47.

Zeitrechnung.

§. 161. Die Zeit und die Eintheilung derselben.

Die Zeit fließt gleichmäßig dahin. Sie hat (wie die mathematische oder bloß gedachte Linie) nur die einzige Ausdehnung in die Länge, d. h. ihre Theile sind nicht zugleich vorhanden, sondern sie folgen nach oder auf einander. Die Eintheilung der Zeit in gewisse Zeitabschnitte hat hauptsächlich in der Bewegung der Erde ihren Grund.

1) Die scheinbare Umdrehung der Sonne um die Erde, oder eigentlich die Bewegung der Erde um ihre eigene Achse, wodurch Tag und Nacht entsteht, bildet einen Zeitabschnitt, den man den „Sonnentag“ oder auch bloß „Tag“ nennt. Den Anfangspunkt desselben hat man

in die Mitte der Nacht gesetzt. Der Tag beginnt Nachts 12 Uhr und dauert über Mittag bis wieder Nachts 12 Uhr.

Den Tag theilen wir in 24 Stunden von gleicher Länge, jede Stunde wieder in 60 Minuten und jede Minute in 60 Sekunden.

Sieben Tage zusammen bilden eine Woche.

2) Die Zeit, innerhalb welcher sich die Erde um die Sonne bewegt, nennt man ein Jahr. Bei diesem Laufe dreht sich die Erde $365^{242255}/_{1000000}$mal um sich selbst. Das Jahr hat also 365 ganze und 242255 Millionteltage oder 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten und nahe 51 Sekunden. Weil wir aber im gemeinen Leben nur nach ganzen Tagen rechnen können, so nimmt man für das gewöhnliche oder gemeine Jahr 365 Tage an. Die übrigen 5 Stunden 48 Minuten 51 Sekunden werden immer nach 4 Jahren, bis wohin sie 1 Tag — 44 Minuten 36 Sekunden zusammen machen, in den Monat Februar als der 24ste eingeschaltet. Dadurch erhält derselbe 29 und das treffende Jahr, Schaltjahr genannt, 366 Tage. Die Schaltjahre sind daran erkennbar, daß die Einer und Zehner der Jahreszahl durch 4 theilbar sind. 1852, 1856, 1860 ꝛc. sind also Schaltjahre, die dazwischen liegenden Jahre sind gemeine.

Auf die einzelnen Tage des Jahres hat man die Namen von Personen übertragen, daher die Namenstage. Die Jahre selbst bezeichnet man durch Ordnungszahlen. In der Christenheit nennt man das Jahr, das mit dem Tage der Geburt Jesu Christi eintrat, das erste Jahr oder das Jahr 1, das darauf folgende Jahr das zweite oder das Jahr 2 ꝛc. Das Jahr 1858 ist daher das 1858ste nach Chr. Geb.; folglich sind bis zu diesem Jahre bereits 1857 volle Jahre abgelaufen. Um also aus einer Jahreszahl die Anzahl aller bis dahin (seit Chr. Geb.) bereits verflossenen Jahre zu erhalten, so muß man dieselbe um 1 vermindern.

3) Unsere Eintheilung der Zeit nach Monaten ist von der Umlaufszeit des Mondes um die Erde entlehnt. Diese Umlaufszeit, während welcher der Mond seinen ganzen Lichtwechsel von Neumond zu Neumond durchmacht, beträgt 29 T. 12 St. 44 M.; 12 solche Zeitperioden bildeten in der alten Römerzeit ein Jahr. Das Mondenjahr ($354^1/_3$ T.) war aber gegen das Sonnenjahr ($365^1/_4$ T.) beinahe um 11 Tage zu kurz. Julius Cäsar schaffte daher im römischen Reiche die Eintheilung nach dem Mondlaufe ab und ließ den Lauf der Sonne zur Feststellung der Jahreslänge allein anwenden. Die Abschnitte der Monate und deren Namen (bis auf Quintilis und Sextilis, an deren Stelle Julius und Augustus kamen) behielt man bei. Sie verloren aber die Gleichheit ihrer Länge. Die 365 Tage wurden in folgender, bis jetzt unveränderter Weise auf die Monate vertheilt:

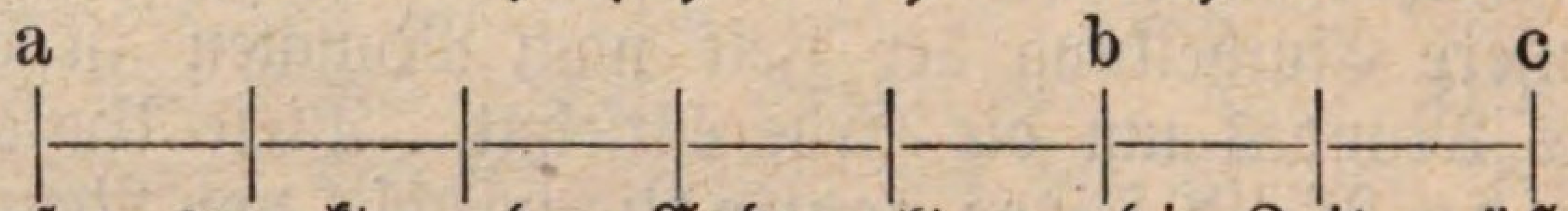
Januar,	der 1. M.	=	31 Tg.	Juli,	der 7. M.	=	31 Tg.
Februar,	der 2. M.	=	28 Tg.	August,	der 8. M.	=	31 Tg.
	in Schaltjahren		29 Tg.	Septbr,	der 9. M.	=	30 Tg.
März,	der 3. M.	=	31 Tg.	Oktober,	der 10. M	=	31 Tg.
April,	der 4. M.	=	30 Tg.	Novbr.,	der 11. M.	=	30 Tg.
Mai,	der 5. M.	=	31 Tg.	Dezbr.,	der 12. M.	=	31 Tg.
Juni,	der 6. M.	=	30 Tg				

Dieß ist dem Gedächtnisse recht tüchtig einzuprägen. Dann gebe man Fragen folgender Art so lange, bis die Antwort rasch erfolgt.

1) Welcher Monat folgt auf den Februar? auf den Oktober? ꝛc.
2) Welcher Monat steht vor dem März? vor dem August? ꝛc.
3) Zwischen welchen 2 Monaten ist der April? der November? ꝛc.
4) Wie heißt der erste, 3te, 8te, 6te, ꝛc. Monat des Jahres?
5) Der wievielte Monat im Jahre ist der Mai? der August? ꝛc.
6) Wie viele Monate sind vor dem April? vor dem Juni? ꝛc.
7) Wie viele Tage hat der Januar? der März? ꝛc.
8) Welche Monate haben 30 Tage? welche haben 31?
9) Nennt Jahre, da der Februar nur 28 Tage hat? — Jahre, da derselbe 29 Tage zählt?
10) Wie viele Monate und Tage des Jahres sind am 23. April verflossen? (Der 23. April ist der 23. Tag des 4. Monats; also sind bis dahin 3 Monate und 22 Tage abgelaufen.)
11) Wie viele Jahre, Monate und Tage sind am 25. August 1853 seit Chr. Geb. verflossen? (Der 25. August 1853 ist der 25. Tag des 8. Monats vom Jahre 1853; also sind bis zu diesem Tag abgelaufen (1853—1=) 1852 Jahre, (8—1=) 7 Monate und (25—1=) 24 Tage.)
12) In welchem Jahre, Monate und Tage stand man, als seit Christi Geb. 1845 Jahre 10 Monate und 18 Tage verflossen waren? (Man stand im Jahre 1846, im 11. Monat dieses Jahres und im 19. Tage dieses Monats, d. i. im 19. November 1846.)

§. 162. Berechnung der Zeitdauer.

Die Zeit ist unendlich. Jeder Zeitabschnitt aber hat einen Anfang und ein Ende und läßt sich wie hier durch eine Linie darstellen.



a ist der Anfangspunkt, c der Endpunkt, ac die Zeitgröße oder Zeitdauer selbst. Diese ist bei b in zwei ungleiche Theile (ab und bc) getheilt. In Folge dessen haben wir jetzt 3 verschiedene Zeiträume vor uns: ab, bc und ac. Sind zwei dieser Größen gegeben, so läßt die dritte sich durch Rechnung finden.

Ist das Ganze ac (= 7) und der Theil ab (= 5) gegeben, so finde ich den Theil bc, indem ich den bekannten Theil vom Ganzen wegnehme. 7 — 5 = 2; bc = 2.

Ist das Ganze ac und der Theil bc gegeben, so finde ich den Theil ab, indem ich vom Ganzen den Theil bc abziehe. 7 — 2 = 5; ab = 5.

Sind endlich die beiden Theile ab und bc bekannt, so finde ich das Ganze, indem ich die beiden Theile zusammenzähle. 5 + 2 = 7; ac = 7.

Aehnliche Aufgaben noch mehr. Z. B. Es sei ac = 50 J., und ab = 35 J.; wie groß ist bc? — Es sei ac = 50 J., und bc = 18 J.; wie groß ist ab? — Es sei ab = 36 J., und bc = 25 J.; wie groß ist ac? Dann:

Als Karl der Gr. zur Regierung kam, waren seit Christi Geburt 767 J. verflossen, und als er starb, 813 J.; wie lange hat er regiert? Wie viele Jahre sind jetzt (1873) seit Chr. Geb. verflossen? (1872 J.) Vor 543 Jahren hat Schwarz das Schießpulver erfunden; welcher Zeitraum liegt zwischen Chr. Geb und dieser Erfindung? — 1396 J. nach Chr. Geb. wurde Guttenberg zu Mainz geboren; als er 44 J. alt war, erfand er die Buchdruckerkunst; wann also?

Ein Mann ist am 18. August 1809 geboren und am 4. März 1840 gestorben. Wie alt ist er geworden?

A. Mündlich.

Vom 18. August 1809 bis 18. August 1839 sind 30 Jahre, vom 18. August 1839 bis 18. Februar 1840 sind 6 Monate, und vom 18. Februar bis 4. März sind 11 + 4 = 15 Tage. Also ist der Mann 30 J. 6 M. und 15 Tg. alt geworden.

B. Schriftlich.

```
1. Jan.                      18. Aug.              4. März
a|----------------------------|----------------------|c
1                            1809                  1840
```

Das Alter des Mannes besteht in dem Zeitabschnitte, der zwischen seiner Geburt und seinem Tode liegt, ist also = bc; bc = ac — ab. Der 18. August des Jahres 1809 ist aber nicht der Zeitraum ab selbst, sondern nur dessen Endpunkt. Er beträgt aber 1808 J. 7 M. 17 Tg. — Ebenso ist der 4. März des Jahres 1840 nur der Endpunkt von ac. Der Zeitraum ac selbst = 1839 J. 2 M. 3 Tg. Nun ziehe ich ab von ac ab.

		12	29
ac =	1839. J.	2. M.	3 Tage
		13	32
ab =	1808 „	7 „	17
bc =	30 J.	6 M.	15 Tg.

17 Tage von 3 Tagen abzuziehen, geht nicht. Ich entlehne mir 1 Monat und zwar den Monat, welcher dem März zunächst vorangeht, d. i. den Februar. Der Februar des Jahres 1840 = 29 Tg.; 29 + 3 = 32 Tg.; 32 — 17 = 15 Tg.; 7 Monat von 1 Monat hinwegzunehmen, geht nicht. Ich borge mir daher 1 J; 1 J. = 12 M.; 12 + 1 M. = 13 M.; 13 M. — 7 M. = 6 Monat. 1838 — 1808 = 30 J. Also beträgt das Alter des Verstorbenen 30 J. 6 Mon. und 15 Tage.

Die Schüler berechnen nun auch ihr eigenes Alter.

Damit schließt das Pensum aus der Zeitberechnung für die Volksschule ab. Das Folgende ist für höhere Lehranstalten.

Aufg. Uebung 48.

§. 163. Berechnung des Anfangspunktes.

A starb am 4. März 1840 in einem Alter von 30 Jahren 6 M. und 15 T. Wann war derselbe geboren?

30. 6. 15. 4. März

a|——————————|——————|c

b 1840

c ist der Todestag und bc die Lebzeit des A; b ist daher der Zeitpunkt seiner Geburt. Von demselben ist zu suchen, in welchem Jahre, Monate und Monatstag er liegt. Dieß ergibt sich, wenn man weiß, wie viele volle Jahre, Monate und Tage von a bis b verflossen sind. Das aber wird gefunden, wenn man A's Alter von der Zeit, die zwischen seinem Tode und Chr. Geburt enthalten ist, abzieht. Bis zum 4 März 1840 beträgt die abgelaufene Zeit 1839 Jahre 2 Mon. und 3 Tage. Ich rechne daher:

		12	29
ac =	1839. J.	2. M.	3 Tage
		13	32
bc =	30 „	6 „	15 „
ab =	1808 J.	7 M.	17 Tg.

Bis zum Zeitpunkt der Geburt des A waren demnach verflossen 1808 J. 7 M. 17 Tg. Also fällt dessen Geburtszeit in das Jahr 1809 und zwar auf den 18. Tag des 8. Monats dieses Jahrs, d. i. auf den 18. Aug 1809.

§. 164. Berechnung des Endpunktes.

A wurde am 18. August 1809 geboren und erreichte ein Alter von 30 J. 6 M. 15 Tg. Wann starb derselbe?

18. August. 30. 6. 15.

a|——————————|——————|c

1809

Dieß ergibt sich, wenn man weiß, wie viele Jahre, Monate und Tage von a bis c abgelaufen sind. Das aber wird gefunden, wenn man die Zeit, die bis zu der Geburt des A verflossen war (ab), und seine Lebenszeit (bc) zusammen zählt. Bis zum 18. August 1809 beträgt die abgelaufene Zeit 1808 J. 7 M. 17 T. Ich rechne daher:

ab =	1808 J.	7 M.	17 Tage
bc =	30 J.	6 M.	15 Tage
ac =	1839 J.	2 M.	3 Tage.

15 + 17 Tage = 32 Tage. Um wissen zu können, wie viele Tage auf den Monat zu rechnen sind, muß ich erst die Monate addiren 7 + 7 = 13 M. = 1 J. + 1 Monat (Januar). Der von den Tagen herüber zu zählende Monat ist demnach der Februar.

Dieser Monat hat aber entweder 28 oder 29 Tage, je nachdem er zu einem gemeinen oder zu einem Schaltjahre gehört. Also muß ich auch erst die Jahre zusammen zählen. 1 + 30 + 1808 = 1839. Der Februar gehört demnach zum Jahre 1840, hat also 29 Tage. Nun erst kann ich die Tage ins Reine bringen. 32 Tage = 29 + 3 Tage = 1 Monat + 3 Tage.

Als A starb, waren also 1839 J., 2 M. und 3 Tage abgelaufen; der Zeitpunkt seines Todes fällt darum auf den 4 März 1840.

Aufgaben.

1) A starb am 4. März 1840 in einem Alter von 30 Jahren 6 M. und 15 Tg. Wann war derselbe geboren?

2) Maximilian Joseph I., der biedere und von seinem Volke hochverehrte König von Bayern, starb nach einer ruhmreichen Regierung von 26 J. 7 M. und 26 Tg. am 13. Oktober 1825. Wann war derselbe auf den Thron gelangt?

3) König Ludwig I. bestieg den bayerischen Thron am 13. Oktober 1825 in einem Alter von 39 J. 1 M. 18 Tg., und König Max II. übernahm die Regierung am 21. März 1848 im Alter von 36 J. 3 M. 22 Tg. Wann sind beide Könige geboren?

4) Wann ist König Ludwig II. geboren, welcher, 18 Jahre 6 Mon. und 14 Tage alt, am 10. März 1864 die Regierung antrat?

5) Am 29. Mai 1453 wurde Konstantinopel durch die Türken und 353 Jahre 10 M. 14 Tg. früher Jerusalem durch die Kreuzfahrer erobert. Wann ist Letzteres geschehen?

6) A wurde am 18. August 1809 geboren und erreichte ein Alter von 30 J. 6 M. 15 Tg. Wann starb derselbe?

7) Der französische Kaiser Napoleon I. ward am 15. August 1769 zu Ajaccio auf Korsika geboren und hatte ein Alter von 51 J. 8 M. und 20 Tgn. erreicht, als er auf der Insel Sanct Helena verschied. Wann starb derselbe?

8) Die beiden großen Schlachten, welche über Napoleon's Geschick entschieden, fielen bei Leipzig und bei Waterloo vor. Erstere war am 18. Oktober 1813, letztere 1 Jahr 8 Monate später? Wann war diese?

9) Am 12. September 1683 half der bayer. Churfürst Maximilian Emanuel die Türken vor Wien schlagen, und 4 J. 11 M. 24 Tage später war er bei der Erstürmung der türkischen Festung Belgrad der Erste auf deren hohen Wällen. Wann fand das statt?

10) A starb am 14. Dezbr. 1845; sein Alter betrug 78 Jahre 6 Monate und 24 Tage. Wann war er geboren?

11) Wilhelm ist am 28. August 1830 geboren. Als er 12 J. 8 M. 19 T. alt war, starb seine Mutter und 3 J. 4 M. 14 Tage darauf sein Vater. Wann fanden beide Todesfälle statt?

12) Straßburg wurde am 30. Sept. 1681 von den Franzosen besetzt und nach 188 J. 11 Mon. 29 Tg. von denselben wieder geräumt. Wann geschah Letzteres?

Fragen und Aufgaben für Präparanden.

1) Was heißt resolviren? was reduciren? 2) Rechne jede von den folgenden vier Aufgaben auf doppelte Weise aus, ohne dabei die höhere Sorte in die niedere zu verwandeln!

a. 5 × (1783 Mark 51 Pfg. + 3275 Mark 47 Pfg.) = ?

b. 7 × (375 Hl 74 lt — 187 Hl 92 lt) = ?

c. $^1/_5$ von (764^m 8^{dm} + 647^m 4^{dm}) = ?

d. $^1/_7$ von (890 Kgr 5 Dgr — 689 Kgr 43 Dgr) = ?

3) In welchem Sinne ist die Aufgabe zu lösen: 7328 Pfd., dividirt durch 37 Pfd.? 4) In welchem Sinne: 8425^m, dividirt durch 43? 5) Ein Weinwirth kauft 12 Hl 50 lt Wein, das Hektoliter zu 23 Mark 45 Pfg., 10 Hl 80 lt, das Hektoliter zu 25 Mark 30 Pfg., und 15 Hl 75 lt, das Hektoliter zu 18 Mark 48 Pfg. Was löst er, wenn er am Liter 18 Pfg. gewinnt? 6) Ein Kaufmann erhält eine Sendung Kaffee von 351 Kgr Bruttogewicht; wie viel wiegen

die Verpackungsgegenstände, welche er nicht zu bezahlen braucht, wenn die Rechnung für den Kaffee 519 Mark 60 Pfg. und der Preis vom Kilogramm 1 Mark 20 Pfg beträgt? 7) Jemand verdiente in einem Jahre 450 Mrk Hätte er aber außer den 52 Sonntagen alle Tage gearbeitet, so hätte er 469 Mrk. 50 Pfg. verdient; was betrug sein Taglohn und wie viele Tage hat er nicht gearbeitet? 8) Ein Metzger schlachtet wöchentlich 6 Schweine à 120 Pfd. und verkauft das Pfund um 60 Pfennige, mit Ausnahme der beiden Schlegel, deren jeder roh 12 Pfd., geräuchert $11^1/_2$ Pfd. wiegt, und wovon er den Schinken zu 80 Pfg. per Pfund anbringt. Wenn er nun 1 Schwein durchschnittlich um 64 Mark ankauft, was gewinnt er an allen 6 Schweinen? 9) Ein Lehrer gibt wöchentlich 3 Std. Privatunterricht und erhält dafür vierteljährig 46 Mark 80 Pfg.; wie theuer kommt die Stunde? 10) Wie viele Mark machen 216 Gulden? 11) Ein Winzer verkauft von 2340 lt $^4/_9$ und vom Reste wieder $^4/_5$; wie viel bleibt ihm? 12) A hat jährlich den 20. Theil eines erborgten Kapitals als Interessen zu entrichten; wie groß ist dasselbe, wenn er monatlich 34 Mark 85 Pfg. Zins zu zahlen hat? 13) Ein Landmann erntet 143 Schock 20 Garben Korn und Weizen; davon sind 25 Schock 48 G. weniger Korn als Weizen; wie viel von jeder Art? 14) Der Ladenpreis eines Buches ist 6 Mark 60 Pfg.; bei einer Abnahme von 10 Exemplaren wird das 11. gratis gegeben; wie theuer kommt dann 1 Exemplar? 15) An Vereinsthlr. und Krthlr. besitzt Jemand 155 fl. 27 kr., an Krthlr. und Fünffrkthlr. 130 fl. 22 kr., an Vrsthlr. und Fünffrkthlr. 118 fl. 25 kr. Wie viel Stück hat er von jeder Sorte? 16) Es werden Einem 480 fl. baar und 10 Hl Roggen als Jahreslohn versprochen. Wenn er nun den Roggen sogleich faßt und bei seinem Austritt, welcher nach 5 Monaten stattfindet, noch 172 fl. erhält, wie ist das Hektoliter Roggen berechnet?

Vierter Cursus.

Die gemeinen Brüche.

§. 165. Ueber die Ausdehnung und die Aufeinanderfolge der gemeinen und der Decimalbruchrechnung.

Die große Verschiedenheit der Ansichten, welche sich in Bezug auf die Ausdehnung und die gegenseitige Stellung der gewöhnlichen und der Decimalbruchrechnung zur Zeit geltend machen, läßt es uns als Pflicht erscheinen, unsern eigenen Standpunkt in der Sache zu bezeichnen.

Der Ansichten über die Ausdehnung oder über das Wieviel gibt es dreierlei. Nach einer derselben ist von jetzt an nur noch der Decimalbruchrechnung ein Platz auf dem Unterrichtsplane einzuräumen; nach einer andern soll sowohl die Decimalbruchrechnung als das Rechnen mit gemeinen Brüchen vollständig durchgearbeitet werden, und nach einer dritten ist neben der vollständigen Decimalbruchrechnung nur das Einfachste und Nothwendigste von den gemeinen Brüchen zu behandeln.

Daß durch die Einführung des decimalen Münz-, Maß- und Gewichtssystems das Rechnen mit gemeinen Brüchen in seiner Bedeutung für die Geschäfte des täglichen Lebens erheblich verloren, die Decimalbruchrechnung dagegen ebensoviel gewonnen hat und in den Vordergrund versetzt worden ist, unterliegt keiner Frage, und hierin sind auch Alle einig. Wenn aber deshalb die gemeinen Brüche nunmehr von dem Unterrichtsplane für die Volksschule völlig gestrichen werden wollen, so wird hierin offenbar zu weit gegangen. So wenig wir unsere Schüler je dahin bringen werden, den Werth mehrstelliger Decimalbrüche so scharf aufzufassen als in kleineren Zahlen ausgedrückte gewöhnliche Brüche, und mit jenen frei im Kopfe so schnell und leicht zu operiren wie mit diesen, und so wenig sich alles Rechnen auf die einfachen Einkaufs- und Verkaufsgeschäfte beschränkt; ebensowenig können wir das Rechnen mit den gemeinen Brüchen je ganz entbehren. Dazu gewährt die gemeine Bruchrechnung eine so vortreffliche Uebung und Schulung der Denkkraft, daß dieselbe schon aus diesem Grunde es verdient, ihr auch fernerhin einen Platz auf dem Lehrplane einzuräumen. Anderseits sind wir weder dafür, daß die gemeine Bruchrechnung überall vollständig, noch dafür, daß von derselben überall nur das

Nothwendigste und praktisch Nützliche gelehrt werde, sondern machen das Eine wie das Andere von der zu Gebote stehenden Zeit und den Umständen abhängig. Wo diese es gestatten, namentlich also da, wo jeder besondere Jahrgang der Schüler von einem besondern Lehrer unterrichtet wird, und dieser seine Kraft und Zeit nicht auf verschiedene Klassen zu vertheilen hat, kann und soll auch die gewöhnliche Bruchrechnung in ihrer ganzen Ausdehnung wie bisher zur Behandlung kommen. In allen andern Fällen dagegen soll man sich bei den gemeinen Brüchen auf das beschränken, was nach Maßgabe der Verhältnisse ohne Verkürzung der übrigen Partien des Rechenunterrichts sich noch gut bewältigen läßt. Als geringstes Maß möchte festzustellen sein: die individuelle Behandlung der gemeinen Brüche von den Halben an bis zu den Zehnteln, das Erweitern und Kürzen, das Gleichnamigmachen und das Verwandeln der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

Unsere Ansicht ist also, um sie kurz auszudrücken: die Decimalbruchrechnung überall möglichst gründlich und vollständig, von den gemeinen Brüchen außer dem eben bezeichneten geringsten Maße noch so viel, als nach Maßgabe der Zeit und Umstände bearbeitet werden kann.

Was die Stellung der Decimalbruchrechnung im Unterrichtsplane betrifft, so gehen auch hier die Ansichten in drei Richtungen auseinander. Dieselbe wollen nämlich manche Methodiker nach den gemeinen Brüchen, andere vor den gemeinen Brüchen, und wieder andere mit diesen gleichzeitig und gemeinschaftlich behandelt wissen.

Die zuletzt bezeichnete Methode ist jedenfalls die schwierigste und soll hier auch nicht weiter in Betracht gezogen werden.

Als Hauptgrund für die Ansicht, der Decimalbruchrechnung ihre Stelle vor den gemeinen Brüchen einzuräumen, wird geltend gemacht: das Rechnen mit Decimalbrüchen sei eine naturgemäße Fortsetzung des Rechnens mit ganzen Zahlen und daher auch an dieses unmittelbar anzureihen. Dagegen wird von der andern Seite angeführt: die Decimalbrüche seien nur eine Art von Brüchen, nämlich Brüche mit den Nennern 10 und Potenzen von 10 und eben deßhalb müsse die auch die zehntheiligen Brüche in sich schließende allgemeine Bruchlehre vor der Decimalbruchrechnung vorgenommen werden. Beide Ansichten haben ihre Berechtigung.

Unsere Ansicht ist eine vermittelnde. Da nämlich auch dann, wenn die Decimalbrüche ihre Stelle vor den gemeinen Brüchen erhalten, der Schüler doch vor Allem einen sichern Begriff von den Brüchen überhaupt erhalten muß und dieß am besten erreicht wird, wenn Brüche mit kleineren Nennern in möglichst vielseitiger Weise behandelt werden; da ferner manche Rechenoperationen, namentlich das Multipliciren eines Bruches mit einem andern, viel mannigfaltiger und leichter bei den gewöhnlichen Brüchen, als bei den zehntheiligen veranschaulicht und begriffen werden können, und da es sich bereits als zweckmäßig bewährt hat, auch der eigentlichen Lehre von den gemeinen Brüchen Uebungen voraus gehen zu lassen, bei welchen von Stufe zu Stufe ein Bruch nach dem andern anschaulich und allseitig behandelt wird: so erscheint

es als das Geeignetste, auf die Rechnungsarten mit mehrfach benannten Zahlen zunächst einen Anschauungs- oder Begründungskursus folgen zu lassen, welcher durch die wiederholte Veranschaulichung der einfachsten Brüche und der verschiedenen Operationen mit denselben sowohl auf das Rechnen mit Decimalbrüchen, als auf das mit den gemeinen Brüchen gründlich vorbereitet. Und dem entsprechend haben wir die vorzugsweise für die Volksschule bestimmten Aufgabenhefte zum Kopf- und Zifferrechnen eingerichtet.

Das zweite Heft enthält nach den Rechnungsarten mit mehrfach benannten Zahlen die individuelle Behandlung der Brüche.

Das dritte Heft bringt zuerst den Uebungsstoff zur Decimalbruchrechnung, welcher überall vollständig durchzuarbeiten sein dürfte, und dann erst den Uebungsstoff zur vollständigen gewöhnlichen Bruchrechnung. Daß hier an das Erweitern und Kürzen das gegenseitige Verwandeln der gemeinen und der zehntheiligen Brüche und an dieses wieder das Resolviren und Reduciren der benannten Brüche angereiht wurde, wird der Gebrauch rechtfertigen, und daß nicht alles dort Gebotene für Alle ist, wurde bereits gesagt.

Für Präparandenanstalten, wo beide Rechnungsarten unter allen Umständen gleichgründlich und in möglichster Ausdehnung behandelt werden müssen, und wohin die Zöglinge ohnehin schon Kenntniß von beiden Rechnungsarten mitbringen, ist es gewiß von unerheblichem Belange, ob die Decimalbrüche vor oder nach den gemeinen Brüchen ihre Stelle erhalten. Aus diesem Grunde und damit daselbst die beiden vorigen Auflagen dieses Buches neben der gegenwärtigen benützt werden können, ist hier die bisherige Aufeinanderfolge beibehalten worden.

Individuelle Behandlung der Brüche.

(Anschauungskursus).

§. 166. Verfahren.

| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

1) Theile ich dieses Ganze (ein Stäbchen, einen Papierstreifen, eine Nuß, 1 Apfel, 1 Linie) in zwei gleiche Theile, so erhalte ich zwei Halbe. Ein Theil davon ist ein Halbes. Ein Halbes erhalte ich daher, wenn ich 1 Ganzes in 2 gleiche Theile theile und einen davon nehme.

2) Wie viel Pfennige beträgt $\frac{1}{2}$ Mark? Wie viel Bogen $\frac{1}{2}$ Buch? Wie viel Dekagramm $\frac{1}{2}$ Kilogr.? ꝛc.

3) Wie viel ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$? $1 - \frac{1}{2}$? $2 \times \frac{1}{2}$? Wie viel ist 2×2? 1×2? $\frac{1}{2} \times 2$? Wie viel ist 2×1? 1×1? $\frac{1}{2} \times 1$? Also: $\frac{1}{2} \times 2$ ist die Hälfte von 2 oder 1; $\frac{1}{2} \times 1$ ist die Hälfte von 1 oder $\frac{1}{2}$. Etwas $\frac{1}{2}$mal nehmen, ist so viel als die Hälfte davon nehmen.

4) Wie viel ist $1 - {}^1/_2$? und ${}^1/_2 - {}^1/_2$? Wie oft läßt sich also ${}^1/_2$ von 1 Ganzen wegnehmen? Wie vielmal ist daher ${}^1/_2$ in 1 Ganzen enthalten? Wie oft ist ${}^1/_2$ Dutzend (= 6 Stück) in 1 ganzen Dutzend enthalten? ${}^1/_2$ Hl in 1 Hl?

Wie oft liegt ${}^1/_2$ in ${}^1/_2$? ${}^1/_2$ Mtr. in ${}^1/_2$ Mtr.? Wie oft liegt 1 in 2? 1 in 1? 1 in ${}^1/_2$? Welcher Theil von 1 Liter läßt sich in ein Gefäß gießen, das nur ${}^1/_2$ Liter hält? (Der halbe Theil.) Wie oft liegt also 1 Ganzes in 1 Halben?

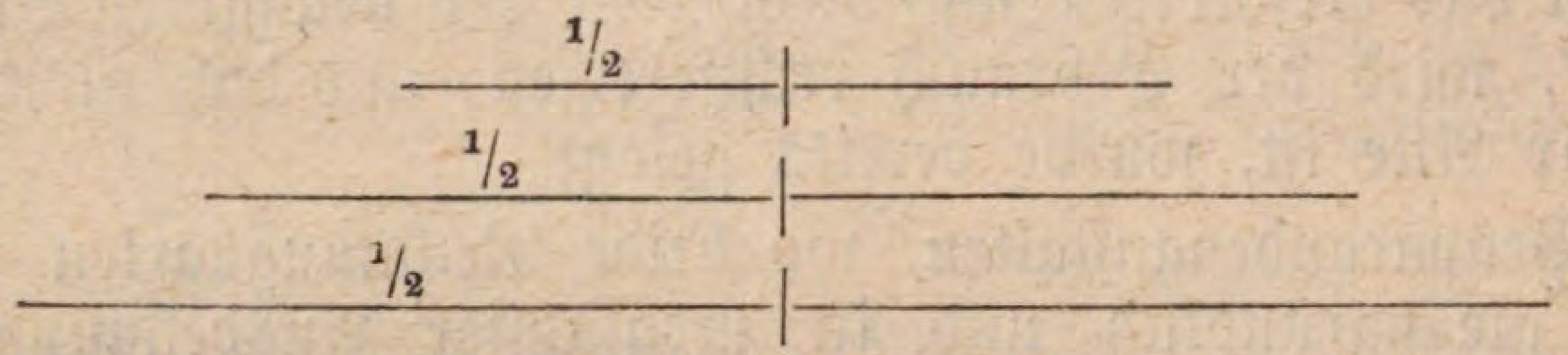
5) Wie viel muß man zu ${}^1/_2$ legen, um 1 Ganzes zu erhalten? Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 1 Halben und 1 Ganzen? Zwischen 1 halben und 1 ganzen Mark?

6) Der wie vielte Theil ist ${}^1/_2$ von 1 Ganzen? Und wie vielmal so groß ist 1 Ganzes als 1 Halbes?

7) ${}^1/_2$ Ctr. Mehl zu 7 Mrk. 85 Pfg.; wie hoch kommt 1 Ctr.?

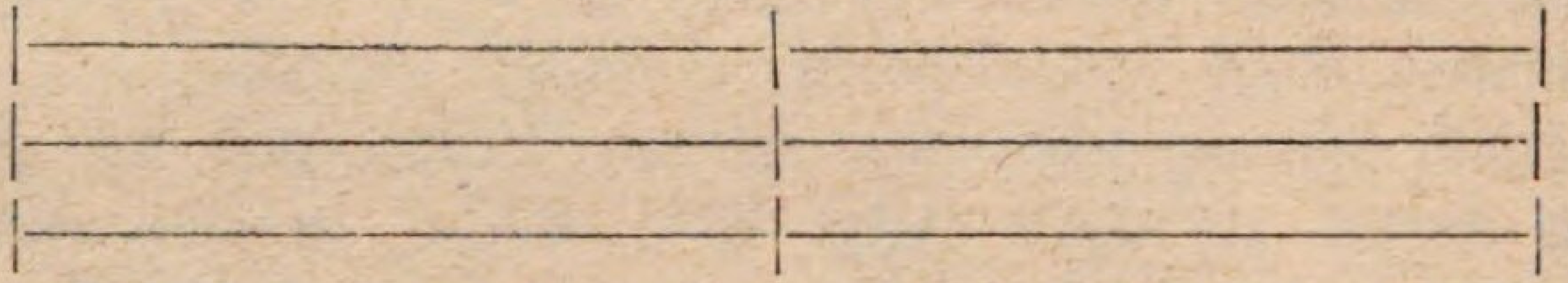
8) 1 Hl Wein zu 57 Mrk. 72 Pfg.; wie hoch kommt ${}^1/_2$ Hl?

9)



Hier sind 3 Ganze und jedes derselben ist in 2 gleiche Theile getheilt. Jeder Theil ist also die Hälfte von einem Ganzen oder ein Halbes. Vergleicht nun die Halben miteinander! Warum sind sie von verschiedener Größe? Vergleicht einmal ${}^1/_2$ Dutzend mit ${}^1/_2$ Schock! ${}^1/_2$ Buch mit ${}^1/_2$ Ries! Wovon hängt also die Größe der Halben ab?

10)



Das erste Ganze = ${}^2/_2$; das andere G. gibt wieder ${}^2/_2$; 2 G. machen also $2 \times {}^2/_2$ oder ${}^4/_2$; das dritte G. gibt wieder ${}^2/_2$; 3 G. machen also $3 \times {}^2/_2$ oder ${}^6/_2$ u. s. w. So zuerst; dann 5 G. = $5 \times {}^2/_2$ oder ${}^{10}/_2$; 8 G. = $8 \times {}^2/_2$ oder ${}^{16}/_2$ u. s. w.

11) $1{}^1/_2 = {}^2/_2 + {}^1/_2 = {}^3/_2$; $5{}^1/_2 = {}^{10}/_2 + {}^1/_2 = {}^{11}/_2$; $8{}^1/_2 = {}^{17}/_2$; $12{}^1/_2 = {}^{25}/_2$ u. s. f.

12) Wie viel Ganze machen ${}^8/_2$? ${}^2/_2 = 1$ G. Nehme ich daher ${}^2/_2$ von ${}^8/_2$ weg, so habe ich 1 G.; nehme ich vom Reste wieder ${}^2/_2$, so habe ich wieder 1 G. u. s. f. So vielmal ${}^2/_2$ in ${}^8/_2$ enthalten sind, so vielmal 1 Ganzes habe ich. ${}^2/_2$ sind in ${}^8/_2$ 4mal enthalten; also sind ${}^8/_2 = 4 \times 1$ G. oder 4 G.

${}^{14}/_2$ =? G. ${}^2/_2$ sind in ${}^{14}/_2$ 7mal enthalten; ${}^{14}/_2$ = 7 G.
${}^{10}/_2$ =? G. ${}^2/_2$ sind in ${}^{10}/_2$ 5mal enthalten; ${}^{10}/_2$ = 5 G.
${}^{18}/_2$ =? G. ${}^2/_2$ sind in ${}^{18}/_2$ 9mal enthalten; ${}^{18}/_2$ = 9 G.

So wieder zuerst; dann ${}^{16}/_2 = 8$, ${}^{28}/_2 = 14$, ${}^{44}/_2 = 22$ rc.

${}^{11}/_2 = {}^{10}/_2 + {}^1/_2 = 5{}^1/_2$; ${}^{17}/_2 = {}^{16}/_2 + {}^1/_2 = 8{}^1/_2$; ${}^{25}/_2 = 12{}^1/_2$. Dieß bis zur Fertigkeit.

Was die weiteren Uebungen und die Veranschaulichung derselben betrifft, so weisen wir auf das (zweite) Aufgabenheft zum Kopfrechnen hin und führen hier nur noch einzelne Fälle auf, um zu zeigen, wie sie auf dieser Stufe zu behandeln sind.

1) $8^1/_2 + 7^1/_2 = ?$

Wie zählst du 8 Mrk. 50 Pfg. + 7 Mrk. 50 Pfg. zusammen? Ich addire zuerst die Mark und dann die Pfennige, oder zuerst die Pfennige und dann die Mark.) Ausführung! — Wie wirst du nun auch $8^1/_2$ Mrk. + $7^1/_2$ Mrk. oder $8^1/_2 + 7^1/_2$ addiren? ($8 + 7 = 15$; $^1/_2 + ^1/_2 = ^2/_2 = 1$; $15 + 1 = 16$. Oder: $^1/_2 + ^1/_2 = 1$ 2c.)

2) $10 - ^1/_2 = ?$

Wie ziehst du 50 Pfg. von 10 Mrk. ab? (Ich löse 1 Mrk. in Pfennige auf und ziehe davon die 50 Pfg. ab.) Wie wirst du nun $^1/_2$ Mrk. von 10 Mrk. oder $^1/_2$ von 10 abziehen? ($10 = 9 + 1 = 9 + ^2/_2$; hievon $^1/_2$ abgezogen, so bleibt $9^1/_2$.)

3) $9^1/_3 - 5^2/_3 = ?$

Wie ziehst du 5 Dtz. 8 Stck. von 9 Dtz. 4 Stck. ab? (9 Dtz. 4 Stck. — 5 Dtz. = 4 Dtz. 4 Stck., und 4 Dtz. 4 Stck. — 8 Stck. oder 3 Dtz. 16 Stck. — 8 Stck. = 3 Dtz. 8 Stck.) Wie wirst du demgemäß rechnen $9^1/_3 - 5^2/_3$? ($9^1/_3 - 5 = 4^1/_3$, und $4^1/_3 - ^2/_3$ oder $3^4/_3 - ^2/_3 = 3^2/_3$.)

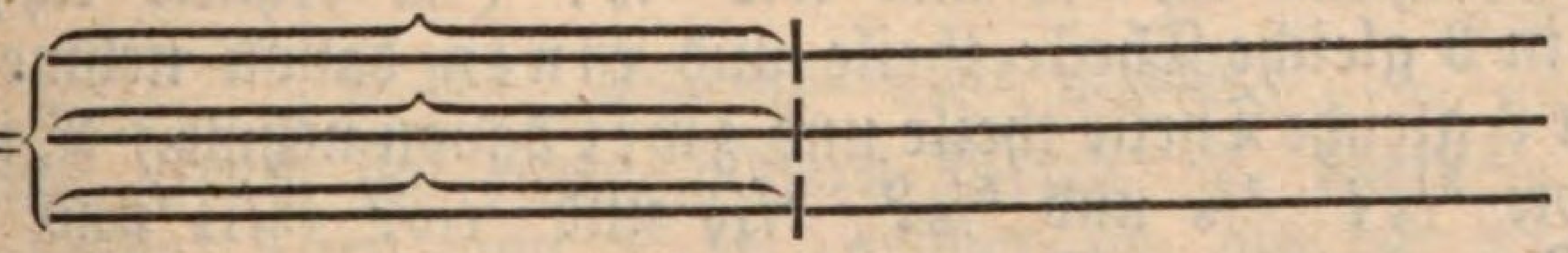
4) 35×48 Pfg. $= ?$

Wie bezahlt man 48 Pfg. am einfachsten? (Man zahlt $^1/_2$ Mrk. und läßt sich 2 Pfg. wiedergeben.) Wie kann man demnach 35×48 Pfg. bezahlen? (Man bezahlt $35 \times ^1/_2$ Mrk. und läßt sich 35×2 Pfg. zurückgeben.) Eben so kann man auch 35×48 Pfg. rechnen. (Man rechnet $35 \times ^1/_2$ Mrk. und zieht von dem Produkte 35×2 Pfg. ab.) Resultat: 16 Mrk. 80 Pfg.

5) $3 \times 7^1/_2 = ?$

Wie rechnest du 3×7 Mrk. 50 Pfg.? (Ich rechne 3×7 Mrk. $+ 3 \times 50$ Pfg.) Wie rechnest du demnach auch $3 \times 7^1/_2$ Mrk. oder $3 \times 7^1/_2$? ($3 \times 7^1/_2 = 3 \times 7 + 3 \times ^1/_2 = 21 + 1^1/_2 = 22^1/_2$.)

6) $^1/_2 \times 3 = ?$

$^1/_2 \times 3 =$  $^3/_2 = 1^1/_2$

7) $5^1/_2 \times 7 = ?$

Woraus ist 12 zusammengesetzt? (Aus $10 + 2$.) Wie rechnest du also 12×7? (Ich rechne $10 \times 7 + 2 \times 7$.) Woraus ist $5^1/_2$ zusammengesetzt? (Aus $5 + ^1/_2$.) Wie rechnest du daher auch $5^1/_2 \times 7$? ($5^1/_2 \times 7 = 5 \times 7 + ^1/_2 \times 7$; $5 \times 7 = 35$, und $^1/_2 \times 7 = ^7/_2 = 3^1/_2$; $35 + 3^1/_2 = 38^1/_2$.)

8) Wie oft ist $^1/_2$ in 4 enthalten?

Wie suchst du frei im Kopfe, wie oft 12 Bg. Papier in 4 Buch enthalten sind? (12 Bg. sind in 1 Bch. 2mal, in 4 Buch also 4×2 oder 8mal enthalten.) Suche nun eben so, wie oft $^1/_2$ Bch. in 4 Bch. oder $^1/_2$ in 4 enhalten ist! ($^1/_2$ ist in 1 zweimal, in 4 also 4×2 oder 8mal enthalten.)

9) Wie oft ist $^2/_3$ in 4 enthalten?

Wie suchst du, wie oft 20 Tg. in 4 Mon. enthalten sind? (4 Mon. $= 4 \times 30$ oder 120 Tg.; 20 Tg. sind in 120 Tg. 6mal enthalten.) Wie wirst du demnach suchen, wie oft $^2/_3$ Mon. in 4 Mon. oder $^2/_3$ in 4 enthalten sind? (Ich verwandle die 4 Ganzen auch in 3tel. 4 G. = 12 Drittel; 2 Drittel sind in 12 Drittel, wie 2 in 12, 6mal enthalten.)

10) Wie oft ist $2\frac{1}{2}$ in $12\frac{1}{2}$ enthalten?

Suche zuerst, wie oft 2 Dgr 5 gr in 12 Dgr 5 gr enthalten sind! (2 Dgr 5 gr = 25 gr, und 12 Dgr 5 gr = 125 gr; 25 gr sind in 125 gr, wie 25 in 125, 5mal enthalten.) Wie werden wir nun verfahren, um zu finden, wie oft $2\frac{1}{2}$ Dgr in $12\frac{1}{2}$ Dgr oder $2\frac{1}{2}$ in $12\frac{1}{2}$ enthalten ist? (Wir verwandeln, wie vorhin die höhere Sorte in die niedere, so jetzt die Ganzen in Theile, nämlich in Halbe. $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, und $12\frac{1}{2} = \frac{25}{2}$; $\frac{5}{2}$ sind in $\frac{25}{2}$, wie 5 in 25, 5mal enthalten.)

11) Wie viel ist die Hälfte von $1\frac{1}{3}$?

Wie suchst du die Hälfte von 1 Wch. 3 Tg.? (Da die Hälfte von 1 Wch. keine ganze Woche ist, so löse ich die Woche in Tage auf. 1 Wch. und 3 Tg. = 10 Tg.; die Hälfte von 10 Tg. = 5 Tg.) Suche nun in ähnlicher Weise die Hälfte von $1\frac{1}{3}$! (Ich verwandle das Ganze auch in 3tel; $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; die Hälfte von $\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.)

12) Wie viel beträgt der 5. Theil von $12\frac{1}{2}$?

Wie suchst du den 5. Theil von 12 Dutz. 6 Stck.? ($\frac{1}{5}$ von 12 Dtz. = 2 Dtz., Rest 2 Dtz.; 2 Dtz. + 6 Stck. = 30 St.; $\frac{1}{5}$ von 30 Stck. = 6 Stck.) Wie wirst du demgemäß den 5. Theil von $12\frac{1}{2}$ Dutz. oder $12\frac{1}{2}$ suchen? ($\frac{1}{5}$ von 12 = 2, Rest 2; $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; der 5. Theil von $\frac{5}{2} = \frac{1}{2}$.)

Das Verständniß wird also überall erzielt durch Veranschaulichung oder durch den Anschluß an Bekanntes.

Die eigentliche Bruchlehre.

Erste Abtheilung.

Die Rechnungsarten mit gleichnamigen Brüchen.

§. 167. Entstehung der Brüche.

Wie entstehen Halbe? (Halbe entstehen, wenn man 1 Ganzes in 2 gleiche Theile theilt.) Wie entstehen Drittel, 5tel, 8tel, 12tel, 18tel? ꝛc. — Wie erhalte ich $\frac{1}{3}$ und wie $\frac{2}{3}$? ($\frac{1}{3}$ erhalte ich, wenn ich 1 Ganzes in 3 gleiche Theile theile und einen davon nehme; $\frac{2}{3}$, wenn ich 1 G. in 3 gleiche Theile theile und zwei davon nehme.) Wie erhalte ich $\frac{1}{4}$ und wie $\frac{3}{4}$? $\frac{1}{8}$ und $\frac{5}{8}$? $\frac{1}{10}$ und $\frac{7}{10}$? $\frac{1}{12}$ und $\frac{11}{12}$? $\frac{1}{16}$ und $\frac{13}{16}$? u. s. w. — Was versteht man also unter $\frac{1}{3}$ und was unter $\frac{2}{3}$? ($\frac{1}{3}$ ist einer von 3 gleichen Theilen, und $\frac{2}{3}$ sind zwei von 3 gleichen Theilen.) Was versteht man unter $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$? unter $\frac{1}{6}$ und $\frac{5}{6}$? unter $\frac{1}{9}$ und $\frac{7}{9}$? unter $\frac{1}{13}$ und $\frac{11}{13}$? u. s. w.

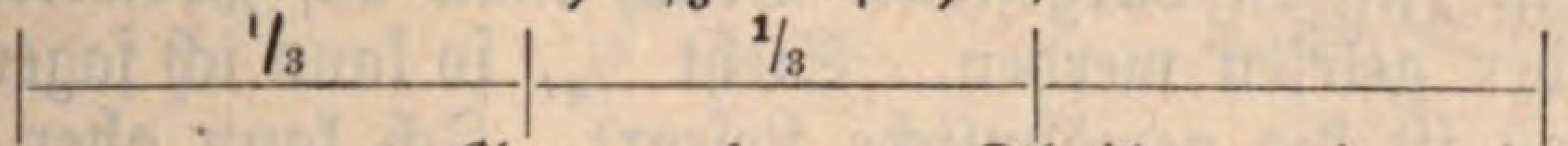
Die ganzen Zahlen entstehen, indem man die Eins wiederholt zu sich nimmt; die Theil- oder Bruchzahlen, indem man von der Eins, d. i. von einem Ganzen einen oder mehrere gleiche Theile wegbricht oder wegnimmt. Unter einem Bruche versteht man daher einen oder mehrere gleiche Theile von einem Ganzen. Das ist die unsern Schülern schon bekannte gewöhnliche Auffassung.

Zweite Art.

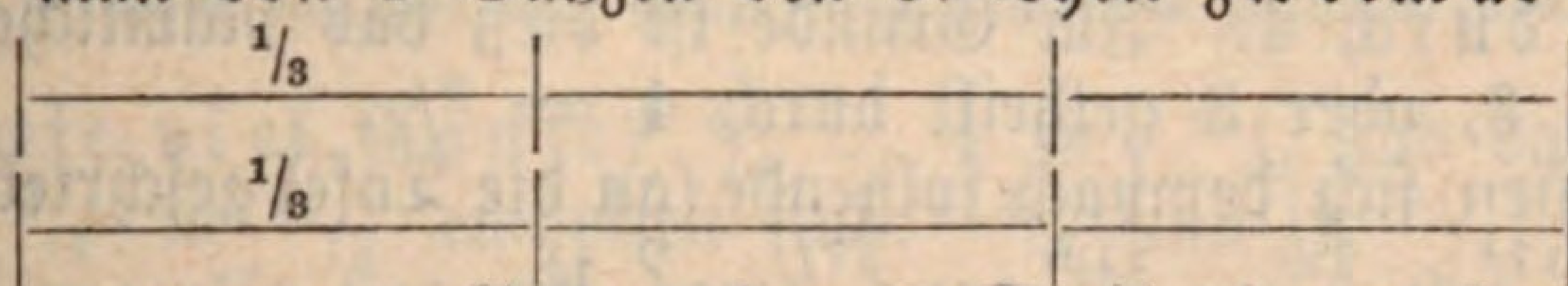
Wie entsteht der Bruch $\frac{1}{3}$? Wenn man 1 G. in 3 gleiche Theile theilt und 1 Theil davon nimmt. Eine andere Weise ist nicht denkbar. Wie entsteht der Bruch $\frac{2}{3}$? Wenn man 1 G. in 3 gleiche Theile theilt

und 2 Theile davon nimmt. Der Bruch $^2/_3$ kann aber noch auf eine zweite Weise entstehen. Wer weiß es? 3 Schüler haben sich in 2 Aepfel gleichheitlich zu theilen; den wie vielten Theil erhält einer von ihnen? Den 3. Theil. Wie erhält man den 3. Theil von 2 Ganzen? Man theilt jedes Ganze in 3 gleiche Theile und nimmt von jedem 1 Theil. Wie viel hat man dann? $^1/_3 + ^1/_3$ oder $^2/_3$. Der Bruch $^2/_3$ kann demnach auch dadurch entstehen, daß man den 3. Theil von 2 G. nimmt.

Mithin kann der Bruch $^2/_3$ entstehen,



a. indem man von 1 Ganzen den 3. Theil zweimal nimmt;

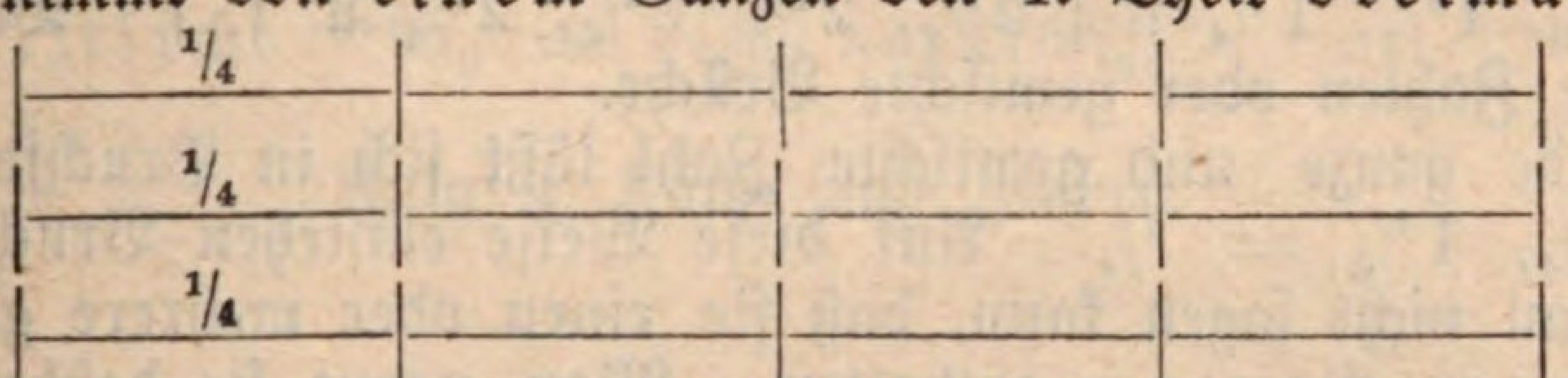


b. indem man von 2 Ganzen den 3. Theil einmal nimmt.

Der Bruch $^1/_4$ wird nur auf die eine Weise erhalten, daß man den 4. Th. von 1 G. einmal nimmt. Der Bruch $^3/_4$ kann auf zweierlei Weise entstehen.



a. Man nimmt von einem Ganzen den 4. Theil dreimal.



b. Man nimmt von 3 Ganzen den 4. Theil einmal.

Der Bruch $^4/_5$ kann entstehen, indem von 1 G. der 5. Theil 4mal, oder indem von 4 G. der 5. Theil einmal genommen wird.

Wie kann demnach der Bruch $^5/_6$ entstehen? Wie $^3/_7$? $^7/_{12}$? $^{15}/_{16}$?

§. 168. Bezeichnung der Brüche.

Welcher Bruch hat einen höhern Werth: $^1/_2$ oder $^1/_4$? Warum? Weil der halbe Theil von 1 G. größer ist, als der vierte Theil. Welcher Bruch gilt mehr: $^1/_4$ oder $^3/_4$? Warum? Weil der Bruch $^3/_4$ drei Theile enthält, wie der Bruch $^1/_4$ einen. Der Werth eines Bruches hängt also von Zweierlei ab: von der Größe seiner Theile und von der Anzahl seiner Theile. Daher sind zur Bezeichnung eines Bruches zwei Zahlen erforderlich. Um den Bruch drei Viertel mit Ziffern zu schreiben, setzt man

$$^3/_4.$$

Wie groß die Theile eines Bruches sind, kommt auf die Anzahl der Theile an, in welche das Ganze getheilt worden ist. Das sagt uns bei $^3/_4$ die Ziffer 4. Das Ganze ist in 4 gleiche Theile getheilt. Folglich ist jeder Theil der 4te Theil vom Ganzen. Ist dies eine Mark, so ist jeder Theil = 25 Pfg.

Theilt man 1 Ganzes in 4 gleiche Theile, so heißen die Theile 4tel. Also sagt die 4 zugleich, wie die Theile des Bruches heißen. Sie benennt die Theile. Darum ist sie der Nenner des Bruchs.

Wie viele Theile der Bruch enthält, bezeichnet die Ziffer 3. Sie zählt die Theile des Bruches. Deßhalb heißt sie der Zähler.

Der Nenner zeigt demnach an, in wie viel gleiche Theile ein Ganzes getheilt ist, und hiedurch zugleich, wie groß die Theile sind und wie sie heißen. Der Zähler aber sagt, wie viele Theile der Bruch enthält.

Jeder in Ziffern dargestellte Bruch kann auf zweierlei Weise ausgesprochen oder gelesen werden. Steht $^{3}/_{4}$, so kann ich sagen: 3 Viertel, und das ist die gewöhnliche Leseart. Ich kann aber auch sagen: 3 getheilt durch 4. Im Grunde ist dieß das Nämliche, denn der 4. Theil von 3, oder 3 getheilt durch 4 = $^{3}/_{4}$.

Wie lassen sich demnach folgende (an die Tafel geschriebene) Brüche aussprechen: $^{17}/_{31}$, $^{72}/_{97}$, $^{113}/_{136}$, $^{371}/_{569}$? ꝛc.

§. 169. **Die Arten der Brüche.**

Die Zahlen 1, 2, 3, 4, ꝛc. sind ganze Zahlen; ihre Anzahl ist unendlich groß. Die Zahlen $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$, $^{2}/_{3}$, $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{4}$, $^{1}/_{5}$ ꝛc. sind Bruchzahlen oder Brüche; auch ihre Anzahl geht ins Unendliche. Mit jeder ganzen Zahl läßt sich jeder Bruch verbinden. So erhalten wir $1^{1}/_{2}$, $1^{1}/_{3}$, $1^{2}/_{3}$, $1^{1}/_{4}$ ꝛc.; $2^{1}/_{2}$, $2^{1}/_{3}$, $2^{2}/_{3}$, $2^{1}/_{4}$ u. s. f. Dies sind gemischte Zahlen oder gemischte Brüche.

Jede ganze und gemischte Zahl läßt sich in Bruchform bringen. $1 = {}^{4}/_{4}$, $1^{3}/_{4} = {}^{7}/_{4}$. Auf diese Weise entstehen Bruchzahlen, von denen man nicht sagen kann, daß sie einen oder mehrere gleiche Theile von einem Ganzen enthalten. Man nennt sie deßhalb unechte Brüche. Ihr Zähler ist entweder dem Nenner gleich, oder größer als derselbe. Im Gegensatze zu ihnen heißen die Brüche $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$ ꝛc., welche in Wirklichkeit nur aus einem oder mehreren Theilen eines Ganzen bestehen, echte Brüche.

§. 170. **Ganze und gemischte Zahlen in unechte Brüche zu verwandeln (gemischte Zahlen einzurichten).**

Mündlich.

a. Verwandle die Zahl 8 in 4tel! (1 G. = $^{4}/_{4}$; 8 G. = 8 $\times$ $^{4}/_{4}$ oder $^{32}/_{4}$.) Drücke die Zahl 16 in 8tel aus! (1 G. = $^{8}/_{8}$; 16 G. = 16 $\times$ $^{8}/_{8}$; 16 $\times$ 8 oder 8 $\times$ 16 = 128; 16 $\times$ $^{8}/_{8}$ = $^{128}/_{8}$; also sind 16 G. = $^{128}/_{8}$.) Mache 6 G. zu 12tel! (1 G. = $^{12}/_{12}$, 6 G. = 6 $\times$ $^{12}/_{12}$ oder $^{72}/_{12}$.)

7 Ganze, wie viel 9tel? 11tel? 15tel? 18tel? 20stel?

Dergleichen Aufgaben bis zur Fertigkeit!

b. Verwandle die gemischte Zahl $5^{3}/_{4}$ in einen unechten Bruch! (5 G. = 5 $\times$ 4 oder $^{20}/_{4}$, $^{20}/_{4} + {}^{3}/_{4} = {}^{23}/_{4}$; $5^{3}/_{4} = {}^{23}/_{4}$.) Drücke $8^{5}/_{6}$ ganz in 6tel aus! (8 G = 8 $\times$ 6 oder $^{48}/_{6}$, $^{48}/_{6} + {}^{5}/_{6} = {}^{53}/_{6}$; $8^{5}/_{6} = {}^{53}/_{6}$.)

$7^{1}/_{2}$ =? $4^{1}/_{11}$ =? $1^{17}/_{25}$ =? $11^{1}/_{4}$ =? $21^{3}/_{10}$ =?
$9^{2}/_{3}$ =? $3^{5}/_{12}$ =? $3^{16}/_{31}$ =? $15^{3}/_{5}$ =? $25^{7}/_{8}$ =?
$5^{5}/_{6}$ =? $6^{11}/_{15}$ =? $2^{13}/_{48}$ =? $12^{1}/_{7}$ =? $30^{5}/_{9}$ =?

Aufg. z. Kopfr.

Schriftlich.

Aufg. a. 8 Ganze, wie viele 13tel? b. $563\,^5/_6 = ?$

Ausr. a. $1 = {}^{13}/_{13}$

$8 = 13$

$\times\, 8$

$104 = {}^{104}/_{13}$

b. $563\,^5/_6$

6

3378

$+\,5$

$3383 = {}^{3383}/_6$

kürzer: $563\,^5/_6$

3383

6

§. 171. Unechte Brüche auf ganze oder gemischte Zahlen zurückzuführen.

$^{24}/_4$, wie viel Ganze? $^4/_4 = 1$ G.; $^{24}/_4$ sind daher so vielmal 1 G., als $^4/_4$ in $^{24}/_4$ enthalten sind. $^4/_4$ sind in $^{24}/_4$, wie 4 in 24, 6mal enthalten; also sind $^{24}/_4 = 6 \times 1$ G $= 6$ G.

Wie viel Ganze sind $^{75}/_8$? $^8/_8 = 1$ G.; so oft also $^8/_8$ in $^{75}/_8$ enthalten sind, so viel Ganze habe ich. $^8/_8$ sind in $^{75}/_8$ 9mal enthalten und $^3/_8$ bleiben im Rest; mithin sind $^{75}/_8 = 9\,^3/_8$.

$^{27}/_2 = ?$ $^2/_2 = 1$; $^2/_2$ in $^{27}/_2 =$ 13mal, Rest $^1/_2$; $^{27}/_2 = 13\,^1/_2$.

$^{32}/_5 = ?$ $^5/_5 = 1$; $^5/_5$ in $^{32}/_5 =$ 6mal, Rest $^2/_5$; $^{32}/_5 = 6\,^2/_5$.

Schriftlich: $^{2483}/_9 = \frac{2483}{9} = 275\,^8/_9$.

Aufg. z. Kopf- und Zifferr.

B. Addiren gleichnamiger Brüche.

§. 172.

Mündlich.

1) $^3/_7 + {}^2/_7 = ?$ $^3/_7 + {}^2/_7 = {}^5/_7$.
2) $^7/_8 + {}^4/_8 = ?$ $^7/_8 + {}^4/_8 = {}^{11}/_8 = 1\,^3/_8$.
3) $5\,^8/_9 + {}^5/_9 = ?$ $^8/_9 + {}^5/_9 = {}^{13}/_9 = 1\,^4/_9$; $5 + 1\,^4/_9 = 6\,^4/_9$.
4) $8\,^3/_5 + 7\,^4/_5 = ?$ $8 + 7 = 15$; $^3/_5 + {}^4/_5 = {}^7/_5 = 1\,^2/_5$; $15 + 1\,^2/_5 = 16\,^2/_5$.
5) $^{24}/_{25} + {}^{23}/_{25} = ?$
 a. $^{24}/_{25} + {}^{23}/_{25} = {}^{24}/_{25} + {}^1/_{25} + {}^{22}/_{25} = 1\,^{22}/_{25}$.
 b. $^{24}/_{25} + {}^{23}/_{25} = (1 + 1) - ({}^1/_{25} + {}^2/_{25}) = 2 - {}^3/_{25} = 1\,^{22}/_{25}$.

Ein Gefäß enthält $18\,^7/_8$ lt Wein, ein zweites $13\,^6/_8$ lt; wie viel Wein enthalten beide zusammen? ($32\,^5/_8$ lt) — Eine Frau kauft von einem Zeuge $9\,^8/_{10}$ m und dann wieder $6\,^9/_{10}$ m, wie viel im Ganzen? ($16\,^7/_{10}$ m)

Schriftlich.

Beispiel 1. $^9/_{17} + {}^{12}/_{17} + {}^8/_{17} + {}^{15}/_{17} + {}^4/_{17} + {}^{16}/_{17} = ?$

Beispiel 2. $15\,^{11}/_{23} + 24\,^{17}/_{23} + 4 + 375\,^{22}/_{23} + {}^6/_{23} = ?$

Ansatz und Berechnung.

1.

$^{9}/_{17}$	9
$^{12}/_{17}$	12
$^{8}/_{17}$	8
$^{15}/_{17}$	15
$^{4}/_{17}$	4
$^{16}/_{17}$	16
	64

$\frac{64}{17} = 3^{13}/_{17}$

2.

$15^{11}/_{23}$	11
$24_{1}\,^{7}/_{23}$	17
4	
$375^{22}/_{23}$	22
$^{6}/_{23}$	6
$420^{10}/_{23}$	56

$\frac{56}{23} = 2^{10}/_{23}$.

Aufg. z. Kopf- und Ifferr.

C. Subtrahiren gleichnamiger Brüche.

§. 173.

Mündlich.

1) $^7/_9 - ^2/_9 = ?$ $^7/_9 - ^2/_9 = ^5/_9$.
2) $9^2/_3 - 5 = ?$ $9 - 5 = 4$; also ist $9^2/_3 - 5 = 4^2/_3$.
3) $8^7/_8 - ^4/_8 = ?$ $^7/_8 - ^4/_8 = ^3/_8$; also ist $8^7/_8 - ^4/_8 = 8^3/_8$.
4) $12^6/_7 - 8^4/_7 = ?$ $12^6/_7 - 8^4/_7 = (12 - 8) + (^6/_7 - ^4/_7)$. $12 - 8 = 4$, und $^6/_7 - ^4/_7 = ^2/_7$; $4 + ^2/_7 = 4^2/_7$. Oder: $12^6/_7 - 8 = 4^6/_7$, und $4^6/_7 - ^4/_7 = 4^2/_7$.

---

5) $7 - ^2/_5 = ?$

Fünftel lassen sich nur von Fünfteln wegnehmen. Ich löse daher von den 7 Ganzen 1 Ganzes in Fünftel auf. $7 = 6^5/_5$. Jetzt heißt die Aufgabe: $6^5/_5 - ^2/_5 = ?$ $6^5/_5 - ^2/_5 = 6^3/_5$. Also ist $7 - ^2/_5 = 6^3/_5$.

6) $8 - 3^1/_2 = ?$

$8 - 3^1/_2 = 7^2/_2 - 3^1/_2 = 4^1/_2$. Oder: $8 - 3 = 5$, und $5 - ^1/_2 = 4^1/_2$.

7) $4^1/_5 - ^4/_5 = ?$

a. Da sich $^4/_5$ von $^1/_5$ nicht ganz wegnehmen lassen, so denke ich mir $4^1/_5$ als $3 + 1^1/_5 = 3^6/_5$; $3^6/_5 - ^4/_5 = 3^2/_5$.

b. Ich ziehe die $^4/_5$ von 4 ab; $4 - ^4/_5 = 3^1/_5$; $3^1/_5 + ^1/_5 = 3^2/_5$.

c. $^4/_5 = ^1/_5 + ^3/_5$; $4^1/_5 - ^1/_5 = 4$; $4 - ^3/_5 = 3^2/_5$.

8) $5^1/_3 - 2^2/_3 = ?$

a. $5^1/_3 - 2^2/_3 = 4^4/_3 - 2^2/_3$; $4^4/_3 - 2^2/_3 = 2^2/_3$.

b. $5^1/_3 - 2 = 3^1/_3$; $3^1/_3 - ^2/_3 = 2^2/_3$. Also ist 2c.

Schriftlich.

a. Ohne Borgen.

1) $^{123}/_{137} - ^{75}/_{137} = ?$ 2) $304^{81}/_{95} - 187^{54}/_{95} = ?$

Ansatz und Berechnung.

$^{123}/_{137}$	123	$304^{81}/_{95}$	81
$^{75}/_{137}$	75	$187^{54}/_{95}$	54
	48	$117^{27}/_{95}$	27
	137		

b. Mit Borgen.

1) $372 - 185^{17}/_{28} = ?$ 2) $543^{73}/_{101} - 345^{97}/_{101} = ?$

Berechnung.

3.7.2.	28		101
1 8 5 $^{17}/_{28}$	17	5.4.3.$^{73}/_{101}$	73
1 8 6 $^{11}/_{28}$	11		174
		3 4 5 $^{97}/_{101}$	97
		1 9 7 $^{77}/_{101}$	77

Aufg. z. Kopf- und Zifferr.

D. Multipliciren.

Der Multiplicator ist eine ganze Zahl.

§. 174.

Mündlich.

$4 \times {}^2/_3 = ?$

$4 \times {}^2/_3 = {}^2/_3 + {}^2/_3 + {}^2/_3 + {}^2/_3 = {}^8/_3$; $4 \times {}^2/_3 = {}^8/_3 = 2^2/_3$.

$3 \times 6^3/_4 = ?$

$3 \times 6^3/_4 = 6^3/_4 + 6^3/_4 + 6^3/_4 = 3 \times 6 + 3 \times {}^3/_4$; $3 \times 6 = 18$; $3 \times {}^3/_4 = {}^9/_4 = 2^1/_4$; $18 + 2^1/_4 = 20^1/_4$; also ist $3 \times 6^3/_4 = 20^1/_4$.

Ist der Multiplicator eine der größeren Zahlen, oder steht der Bruch der Einheit 1 sehr nahe, so verfährt man, wie folgt:

36mal $^{11}/_{12} = ?$

a. $36 \times {}^1/_{12} = 3$; $36 \times {}^2/_{12} = 2 \times 3$; $36 \times {}^3/_{12} = 3 \times 3$; $36 \times {}^{11}/_{12} = 11 \times 3$ oder 33. Oder:

b. $^{11}/_{12} = 1 - {}^1/_{12}$; $2 \times {}^{11}/_{12} = 2 \times 1 - 2 \times {}^1/_{12}$; $3 \times {}^{11}/_{12} = 3 \times 1 - 3 \times {}^1/_{12}$; $36 \times {}^{11}/_{12} = 36 \times 1 - 36 \times {}^1/_{12}$; $36 \times 1 = 36$; $36 \times {}^1/_{12} = 3$; $36 - 3 = 33$.

$32 \times 8^{15}/_{16} = ?$

$8^{15}/_{16} = 9 - {}^1/_{16}$; also ist $32 \times 8^{15}/_{16} = 32 \times 9 - 32 \times {}^1/_{16}$; $32 \times 9 = 288$; $32 \times {}^1/_{16} = 2$; $288 - 2 = 286$.

Ein Fäßchen hält $49^3/_4$ lt; wie viel halten 12 dergleichen?

Antw. $12 \times 49^3/_4$ lt $= 12 \times 50 - 12 \times {}^1/_4$ lt $= 600$ lt $- 3$ lt $= 597$ lt oder 5 Hl 97 lt.

1 Zehnmarkstück gilt $5^5/_6$ fl.; was gelten 2, 3, 4 ꝛc. solche Stück?

§ 175.

Schriftlich.

Aufg. 1. $13 \times {}^{15}/_{16} = ?$ Aufg. 2. $18 \times 25^{12}/_{13} = ?$

Auflösung.

$$13 \times {}^{15}/_{16} = \frac{13 \times 15}{16} \qquad 18 \times 25^{12}/_{13} = 18 \times 25 + 18 \times {}^{12}/_{13}.$$

Ausrechnung.

1)	2)		
15	25	12	450
13	18	18	$+ 16^8/_{13}$
45	200	96	$466^8/_{13}$
15	25	12	
16 | 195 | $12^3/_{16}$	450	13 | 216 | $16^8/_{13}$	

Aufg. 3. $75 \times {}^7/_8$ Ctr. = ?

Ausrechnung.

$$75 \times {}^7/_8 \text{ Ctr.} = \frac{75 \times 7 \text{ Ctr.}}{8}$$ (75 × 7 Ctr., getheilt durch 8.)

75
7
8 | 525 Ctr. | 65 Ctr. 62 Pfd. 25 Neuloth.

Aufg. z. Kopf- und Zifferr.

E. Dividiren.

Im Sinne des Enthaltenseins.

Nur Aufgaben mit gleichnamigen Brüchen.

§. 176. **Vorbereitendes.**

Wie oft liegt 12 in 36? die Hälfte von 12 in der Hälfte von 36? $^1/_3$ von 12 in $^1/_3$ von 36? $^1/_4$ von 12 in $^1/_4$ von 36 ꝛc. (12 liegt in 36 dreimal; die Hälfte von 12 oder 6 ist in der Hälfte von 36 oder 18 auch 3mal ꝛc.) Andere Beispiele! So oft also eine Zahl in einer andern enthalten ist, so oft liegt auch irgend ein Theil der ersteren Zahl in dem gleichnamigen Theile der letzteren.

Wie oft liegt 2 in 12? wie oft 2 × 2 in 2 × 12? 3 × 2 in 3 × 12? 4 × 2 in 4 × 12? 2 in 12 ist 6mal; 2 × 2 oder 4 ist in 2 × 12 oder 24 wieder 6mal ꝛc.) Andere Beispiele! So oft also eine Zahl in einer andern enthalten ist, so oft liegt auch irgend ein Vielfaches der ersteren Zahl in dem gleichen Vielfachen der anderen.

A. Mündlich.

§. 177. Einen Bruch durch einen Bruch.

a. Der Quotient eine ganze Zahl.

$^3/_{10}$ in $^9/_{10}$ = ?

(Wie oft sind $^3/_{10}$ in $^9/_{10}$ enthalten?)

Wie oft können $^3/_{10}$ von $^9/_{10}$ weggenommen werden? ($^9/_{10}$ — $^3/_{10}$ = $^6/_{10}$, $^6/_{10}$ — $^3/_{10}$ = $^3/_{10}$, und $^3/_{10}$ — $^3/_{10}$ — 0; 3mal.) $^9/_{10}$ sind also wie viel mal $^3/_{10}$? Wie vielmal sind daher $^3/_{10}$ in $^9/_{10}$ enthalten? ($^3/_{10}$ sind in $^9/_{10}$ 3mal enthalten.)

b. Der Quotient ein Bruch.

1) $^2/_5$ in $^1/_5$ = ?

Wie oft liegt 2 in 4? 2 in 2? 2 in 1? Welcher Theil von 2 ist in 1 enthalten? Wie oft liegt daher 2 in 1? ($^1/_2$mal.) Wie oft liegen $^2/_5$ in $^4/_5$? $^2/_5$ in $^2/_5$? $^2/_5$ in $^1/_5$? Der wie vielte Theil von $^2/_5$ ist in $^1/_5$ enthalten? (Der halbe Theil.) Wie oft sind daher $^2/_5$ in $^1/_5$ enthalten? ($^2/_5$ sind in $^1/_5$ $^1/_2$mal enthalten.)

2) $^4/_5$ in $^3/_5$ = ?

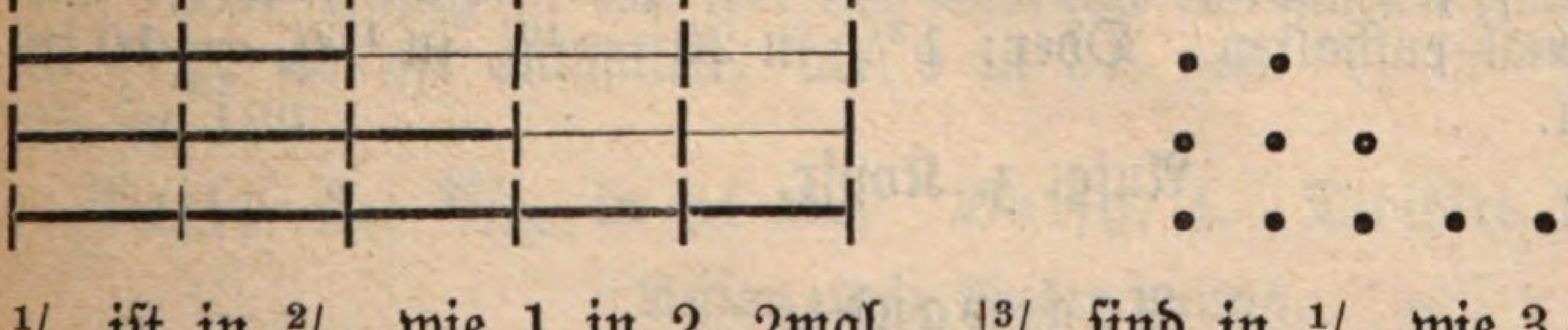
Welcher Theil von 4 ist in 1 enthalten? (Der 4. Theil oder $^1/_4$.) Welche Theile von 4 sind in 3 enthalten? ($^3/_4$ von 4.) Wie oft liegt daher 4 in 3? ($^3/_4$mal.) Der wie vielte Theil von $^4/_5$ ist in $^1/_5$ enthalten? (Der 4. Theil.) Wie oft liegt daher $^4/_5$ in $^1/_5$? ($^1/_4$ mal.) Wie viele Theile von $^4/_5$ sind in $^3/_5$ enthalten? (3 Theile.) Wie oft liegt daher $^4/_5$ in $^3/_5$? ($^3/_4$mal.)

c. Der Quotient eine gemischte Zahl.

$^3/_9$ in $^8/_9$ = ?

Wie verfährst du, um zu finden, wie oft 3 in 8 enthalten ist? (8 = 6 + 2; 3 liegt in 6 2mal und in 2 $^2/_3$ mal, in 8 also 2$^2/_3$ mal.) Wie wirst du thun, um zu finden, wie oft $^3/_9$ in $^8/_9$ enthalten sind? ($^8/_9$ = $^6/_9$ + $^2/_9$; $^3/_9$ sind in $^6/_9$ 2mal und in $^2/_9$ $^2/_3$mal, in $^8/_9$ also 2$^2/_3$mal enthalten.)

Veranschaulichung dieser drei Fälle.



$^1/_5$ ist in $^2/_5$, wie 1 in 2, 2mal,
in $^3/_5$, wie 1 in 3, 3mal,
in $^5/_5$, wie 1 in 5, 5mal;
$^2/_5$ sind in $^1/_5$, wie 2 in 1, $^1/_2$mal,
in $^3/_5$, wie 2 in 3, 1$^1/_2$mal,
in $^5/_5$, wie 2 in 5, 2$^1/_2$mal;

$^3/_5$ sind in $^1/_5$, wie 3 in 1, $^1/_3$mal,
in $^2/_5$, wie 3 in 2, $^2/_3$mal,
in $^5/_5$, wie 3 in 5, 1$^2/_3$mal;
$^5/_5$ sind in $^1/_5$, wie 5 in 1, $^1/_5$mal,
in $^2/_5$, wie 5 in 2, $^2/_5$mal,
in $^3/_5$, wie 5 in 3, $^3/_5$mal,

Die Schüler erkennen hieraus, daß Brüche mit gleichen Nennern dividirt werden wie Ganze.

$^{45}/_{76}$ in $^{75}/_{76}$ = ? $^{45}/_{76}$ sind in $^{75}/_{76}$ so oft enthalten, als 45 in 75; 45 und 75 haben den gemeinschaftlichen Faktor 15. Ich suche also, wie oft der 15. Theil von 45 in dem 15. Theil von 75, d. i. wie oft 3 in 5 enthalten ist.

§. 178. Die übrigen Fälle.

1) $^4/_5$ in $3\,^2/_5$ = ?

Wie verfährst du, um zu finden, wie oft 3 Pf. in 1 Mrk. 20 Pf. enthalten sind? Wie wirst du nun suchen, wie oft $^4/_5$ in $3\,^2/_5$ liegen? Ich verwandle die Ganzen auch in Fünftel. $3\,^2/_5 = {}^{17}/_5$. Nun fragt sich's: Wie oft sind $^4/_5$ in $^{17}/_5$ enthalten? Antwort: So oft, als 4 in 17, nämlich $4\,^1/_4$mal. Also 2c.

2) $1\,^1/_4$ in $^3/_4$ = ?

$1\,^1/_4 = {}^5/_4$; $^5/_4$ sind in $^3/_4$ so oft enthalten, als 5 in 3; 5 liegt in 3 $^3/_5$mal; also ist $1\,^1/_4$ in $^3/_4$ $^3/_5$mal enthalten.

3) $2\,^2/_5$ in $8\,^3/_5$ = ?

$2\,^2/_5 = {}^{12}/_5$; $8\,^3/_5 = {}^{43}/_5$; $^{12}/_5$ sind in $^{43}/_5$ so oft enthalten, als 12 in 43; 12 liegt in 43, d. i. in 36 + 7 $3\,^7/_{12}$mal; also ist $2\,^2/_5$ in $8\,^3/_5$ $3\,^7/_{12}$mal enthalten.

4) $^1/_2$ in 6 = ?

$^1/_2$ ist in 1 Ganzen 2mal, in 6 Ganzen 6mal so oft, 6×2, oder 12mal. Oder: 1 ist in 6 sechsmal; $^1/_2$ ist in 6 2mal so oft, 2×6 oder 12mal. Oder: $^1/_2$ in 6 = $^1/_2$ in $^{12}/_2$ = 1 in 12 = 12mal.

5) $^3/_4$ in 9 = ?

a. 9 = $^{36}/_4$; $^3/_4$ sind in $^{36}/_4$, wie 3 in 36, 12mal enthalten.

b. $^3/_4$ ist der wie vielte Theil von 3? (Der 4. Theil.) Wie oft liegt 3 in 9? (3mal.) Wie vielmal so oft wird $^3/_4$ in 9 enthalten sein? (4mal so oft, also 4 × 3 oder 12mal.)

$^4/_5$ in 96 = ? $^4/_5$ ist der 5. Theil von 4; 4 liegt in 96 24mal; $^4/_5$ ist in 96 5mal so oft, 5 × 24 oder 120 enthalten.

6) $1\,^3/_7$ in 20 = ?

$1\,^3/_7 = {}^{10}/_7$; 10 liegt in 20 2mal; $^{10}/_7$ sind in 20 7mal so oft, 7×2 oder 14mal enthalten. Oder: $1\,^3/_7$ in 20 = $^{10}/_7$ in $^{140}/_7$ = 10 in 140 = 14mal.

Aufg. z. Kopfr.

Angewandt.

§. 179.

1) A kauft sich 84 lt Wein und trinkt täglich $^3/_4$ lt davon; auf wie viele Tage reicht sein Vorrath hin?

Antwort: Auf so viele Tage, als $^3/_4$ lt in 84 lt enthalten sind.

3 lt sind in 84 lt 28mal. $^3/_4$ lt sind in 84 lt 4mal so oft, 4×28 oder 112mal enthalten. Also ꝛc.

2) Wie viel Zehnmarkstücke à $5^5/_6$ fl. erhalte ich für 100 fl.?

Aufl. Für $5^5/_6$ fl. erhalte ich 1 Zehnmarkstück. So oft ich $5^5/_6$ fl. zahle, so vielmal 1 Zehnmarkstück erhalte ich. Für 100 fl. bekomme ich daher so vielmal 1 Zehnmarkstück, als $5^5/_6$ fl. in 100 fl. enthalten sind.

Ausr. $5^5/_6$ fl. $= {}^{35}/_6$ fl., und 100 fl. $= {}^{600}/_6$ fl.; $^{35}/_6$ in $^{600}/_6 = 35$ in $600 = 7$ in $120 = 17^1/_7$mal. Also erhalte ich für 100 fl. $17^1/_7 \times 1$ Zehnmarkstück $= 17^1/_7$ Zehnmarkstück ($= 17$ Zehnmarkst. $1^3/_7$ Mark.)

3) Ein Landmann hat $3^1/_5$ Hl Weizen ausgesäet und $41^3/_5$ Hl geerntet, wie vielmal so viel also?

Aufl. Er hat so vielmal $3^1/_5$ Hl geerntet, als $3^1/_5$ Hl in $41^3/_5$ Hl enthalten sind.

Ausr. $3^1/_5 = {}^{16}/_5$. Ich suche zuerst, wie oft $^{16}/_5$ Hl in 32 Hl enthalten sind, und zerlege daher $41^3/_5$ in $32 + 9^3/_5$; 16 ist in 32 2mal, $^{16}/_5$ sind in 32 5mal so oft, 5×2 oder 10mal; $9^3/_5 = {}^{48}/_5$; $^{16}/_5$ sind in $^{48}/_5$ 3mal; also sind $^{16}/_5$ in $41^3/_5$ $10 + 3$ oder 13mal enthalten. Die Ernte hat also 13mal so viel betragen, als die Aussaat.

Aufg. z. Kopfr.

B. Schriftlich.

§. 180.

Beisp. 1. $^9/_{32}$ in $^{31}/_{32}$? Beisp. 2. Dividire $94^1/_2$ durch $12^1/_2$.

Ansatz und Ausrechuung.

1)

$^9/_{32}$	$^{31}/_{32}$	
9	31	$3^4/_9$
	27	
	4	

2)

$12^1/_2$	$94^1/_2$	
25	189	$7^{14}/_{25}$
	175	
	14	

Der Ansatz ist wie bei der Division mit ganzen Zahlen. $^9/_{32}$ sind in $^{31}/_{32}$ so oft enthalten, als 9 in 31, und $^{25}/_2$ in $^{189}/_2$ so oft, als 25 in 189.

Beisp. 3. $^{23}/_{24}$ in $84 = ?$ Beisp. 4. Dividire $18^1/_2$ durch 4!

Ansatz und Ausrechnung.

3)

$^{23}/_{24}$	84	
	24	
	336	
	168	
23	2016	$87^{15}/_{23}$

4)

4	$18^1/_2$	
2	2	
8	37	$4^5/_8$
	32	
	5	

Die Ganzen werden in eben solche Theile verwandelt, aus welchen der Bruch der andern Zahl besteht. Dieß geschieht, indem wir sie mit dem Nenner des Bruches multipliciren.

Aufg. z. Zifferr.

Im Sinne des Theilens.

Nur Aufgaben, wo der Divisor in dem Zähler des Bruches aufgeht.

§. 181.

1) $^1/_4$ von $^8/_9$ =? Der 4. Theil von $^8/_9 = {}^2/_9$.
2) $^1/_5$ von $3^3/_4$? $3^3/_4 = {}^{15}/_4$; der 5. Theil von $^{15}/_4 = {}^3/_4$.
3) $^1/_3$ von $11^1/_4$ =? $11^1/_4 = 9 + 2^1/_4$; der dritte Theil von $9 = 3$; $2^1/_4 = {}^9/_4$; der dritte Theil von $^9/_4 = {}^3/_4$; $3 + {}^3/_4 = 3^3/_4$; also ist der 3. Theil von $11^1/_4 = 3^3/_4$.

Andere Fälle kommen hier nicht vor. Es folgen nun noch einige Aufgaben mit größeren Zahlen.

1) $^1/_8$ von $^{104}/_{125}$ =?

Ausr. $8 = 2 \times 4$. Ich suche zuerst den 4. Theil und dann hievon den halben Theil. Der 4. Theil von $^{104}/_{125} = {}^{26}/_{125}$, und der halbe Theil von $^{26}/_{125} = {}^{13}/_{125}$.

2) Welche Zahl ist 9mal in $66^3/_8$ enthalten?

Ausr. Die Zahl, welche 9mal in $66^3/_8$ enthalten ist, ist der 9. Theil von $66^3/_8$; $9 = 3 \times 3$; der 3. Theil von $66^3/_8 = 22^1/_8$; $22^1/_8 = 21 + 1^1/_8$; der 3. Theil von $21 = 7$, und der 3. Theil von $1^1/_8$ oder $^9/_8 = {}^3/_8$; $7 + {}^3/_8 = 7^3/_8$. Also heißt die Zahl, welche in $66^3/_8$ 9mal enthalten ist, $7^3/_8$.

3) $^1/_{24}$ von $253^5/_7$ =?

Ausr. $253^5/_7 = 240 + 13^5/_7$; $^1/_{24}$ von $240 = 10$; $13^5/_7 = {}^{96}/_7$; $^1/_{24}$ von $^{96}/_7 = {}^4/_7$; also ist $^1/_{24}$ von $253^5/_7 = 10^4/_7$.

24	$253^5/_7$	10
	24	
	$13^5/_7$	
24	96	$^4/_7$
	7	

Angewandt.

§. 182.

In $56^4/_{10}$ Kgr einer Waare theilen sich 12 Personen; wie viel erhält jede derselben? Antwort: Den 12. Theil von $56^4/_{10}$ Kgr; $12 = 3 \times 4$; der 4. Theil von $56^4/_{10} = 14^1/_{10}$; der 3. Theil von $12 = 4$, und der 3. Theil von $2^1/_{10}$ oder von $^{21}/_{10} = {}^7/_{10}$. Also erhält jede Person $4^7/_{10}$ Kgr.

Aufg. z. Kopf- und Zifferr.

Zweite Abtheilung.

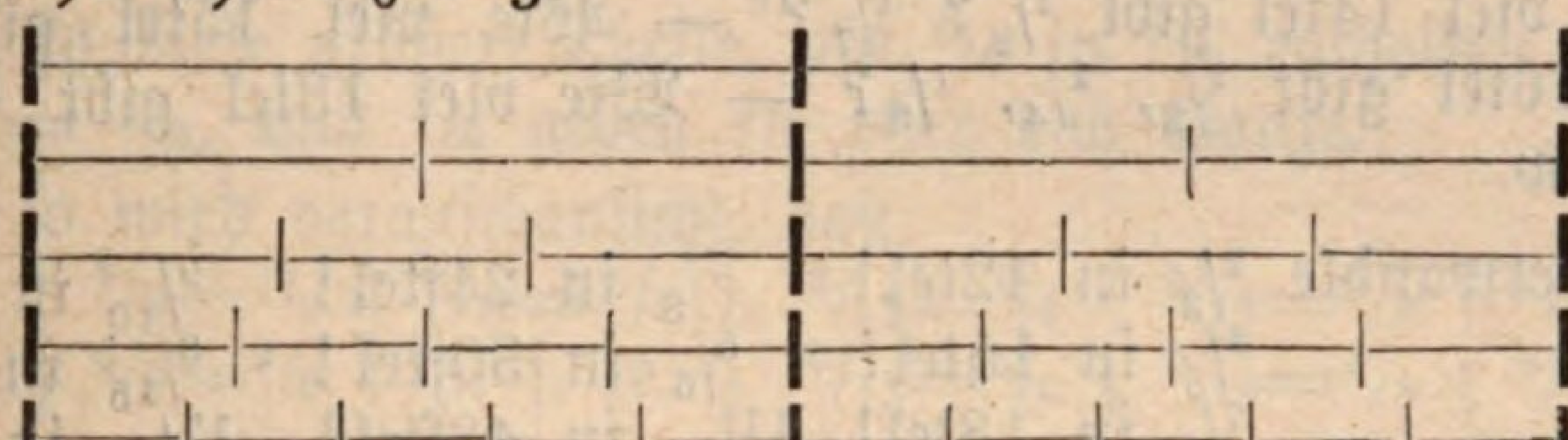
Vollständige Behandlung der gemeinen Brüche.

A. Das Erweitern und Kürzen der Brüche.

§. 183. Brüche zu erweitern.

Mündlich.

a. Was für Theile entstehen, wenn man 1 Ganzes in 2 oder mehrere gleiche Theile zerlegt? (Theilt man 1 Ganzes in 2 gleiche Theile, so entstehen Halbe; theilt man 1 G. in 3 gleiche Theile 2c.) Was für Theile entstehen aber, wenn man ein Halbes in 2 oder mehrere gleiche Theile zerlegt?



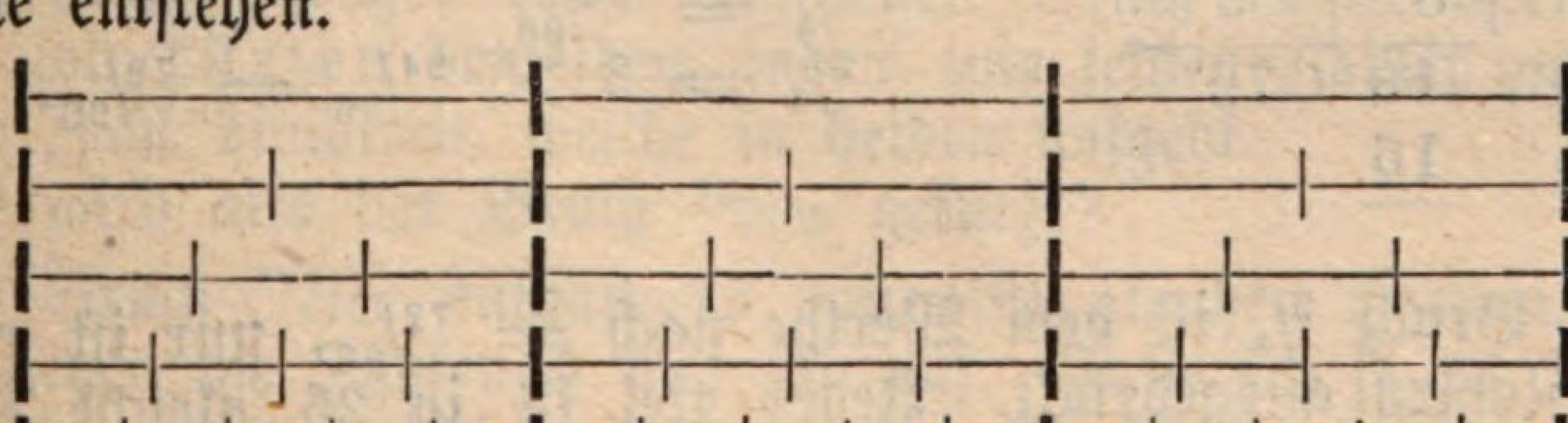
Theile ich $^1/_2$ in 2 gleiche Theile, so entstehen solche Theile, wie das Ganze deren 2 $\times$ 2 oder 4 hat, also 4tel; theile ich $^1/_2$ in 3 gleiche Theile, so entstehen solche Theile, wie das Ganze deren 2 $\times$ 3 oder 6 hat, also 6tel u. s. w. Demnach ist (an die Tafel geschrieben):

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{6}{6} = \frac{8}{8} = \frac{10}{10} = \frac{12}{12} = \frac{14}{14} = \frac{16}{16} = \frac{18}{18} = \frac{20}{20} \text{ 2c.}$$

$$\text{und } \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{8}{16} = \frac{9}{18} = \frac{10}{20} \text{ 2c.}$$

Die Nenner 4, 6, 8 2c. sind Vielfache oder Produktzahlen aus 2; Halbe lassen sich also in solche Theile verwandeln, deren Nenner Produktzahlen aus 2 sind.

Theilt nun $^1/_3$ in 2 und mehrere gleiche Theile und seht zu, was für Theile entstehen.



Theile ich $^1/_3$ in 2 gleiche Theile, so gibt das Ganze 3$\times$2 oder 6 Theile, also 6tel; theile ich $^1/_3$ in 3 gleiche Theile 2c. Demnach ist

$$1 = \frac{3}{3} = \frac{6}{6} = \frac{9}{9} = \frac{12}{12} = \frac{15}{15} = \frac{18}{18} = \frac{21}{21} = \frac{24}{24} = \frac{27}{27} = \frac{30}{30} \text{ 2c.}$$

$$\text{und } \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{7}{21} = \frac{8}{24} = \frac{9}{27} = \frac{10}{30} \text{ 2c.}$$

Die Nenner 6, 9, 12 ꝛc. sind Vielfache oder Produktzahlen aus 3; Drittel lassen sich also in solche Theile verwandeln, deren Nenner Produktzahlen aus 3 sind.

Sucht nun auch, in was für Theile sich 4tel, 5tel, 6tel ꝛc. verwandeln lassen. (4tel lassen sich in 8tel, 12tel, 16tel, 20stel ꝛc., also in solche Theile verwandeln, deren Nenner Produktzahlen aus 4 sind; 5tel lassen sich in 10tel, 15tel, 20stel ꝛc., also in solche Theile verwandeln, deren Nenner Produktzahlen aus 5 sind u. s. f.)

b. Von welchen Zahlen ist 12 die Produktzahl? (Von 2, 3, 4, 6.) Welche Theile lassen sich daher in 12tel verwandeln? (Halbe, 3tel, 4tel, und 6tel.) Von welchen Zahlen ist 14 die Produktzahl? Welche Theile lassen sich daher in 14tel verwandeln? u. s. w.

c. Wie viel 12tel gibt $^1/_2$ ($^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$)?

Das Ganze hat $^{12}/_{12}$; das Halbe hat also die Hälfte von $^{12}/_{12}$ oder $^6/_{12}$; $^1/_3$ hat den 3. Theil von $^{12}/_{12}$, nämlich $^4/_{12}$ ꝛc.

Wie viel 14tel gibt $^1/_2$? $^1/_7$? — Wie viel 15tel gibt $^1/_3$, $^1/_5$? Wie viel 16tel gibt $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$? — Wie viel 18tel gibt $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_6$, $^1/_9$? u. s. w.

d. Verwandle $^2/_3$ in 12tel! $^7/_8$ in 24stel! $^9/_{10}$ in 20stel!
$^4/_5$ in 15tel! $^5/_6$ in 30stel! $^8/_{15}$ in 75stel!
$^7/_9$ in 18tel! $^{11}/_{12}$ in 48stel! $^{17}/_{20}$ in 100tel!

(1 G. = $^{12}/_{12}$; $^1/_3$ = $^4/_{12}$; $^2/_3$ = 2 × $\frac{4}{}$ oder $^8/_{12}$)

Wie viel 24stel geben $^2/_3$? $^3/_4$? $^5/_6$? $^7/_8$? $^{11}/_{12}$?
Wie viel 30stel geben $^1/_2$? $^2/_3$? $^4/_5$? $^5/_6$? $^7/_{10}$? $^{13}/_{15}$?

Schriftlich.

$^3/_4$, wie viel 96stel?

1 Ganzes = $^{96}/_{96}$; $^1/_4$ gibt den 4. Theil von $^{96}/_{96}$, und $^3/_4$ geben den 4. Theil 3mal.

4	96	24
	8	3
	16	72
	16	

$1 = {}^{96}/_{96}$
$^1/_4 = {}^{24}/_{96}$
$^3/_4 = 3 \times {}^{24}/_{96} = {}^{72}/_{96}$.

Der Bruch $^3/_4$ ist dem Werthe nach = $^{72}/_{96}$, nur ist er jetzt in größeren Zahlen ausgedrückt. Jedes 4tel ist in 25 gleiche Theile getheilt. Zähler und Nenner von $^{72}/_{96}$ sind daher auch 24 mal so groß als Zähler und Nenner von $^3/_4$. Und eben deßhalb wird das Verwandeln eines Bruches in kleinere Theile „**das Erweitern**" desselben genannt.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 184. Brüche zu kürzen oder zu heben.



a. In wie viele gleiche Theile ist das Ganze hier getheilt und wie heißen dieselben? Nun verbinden wir je 2 dieser Theile zu 1 Theile. Steht:



Welchen Theil vom Ganzen bilden nun die beiden Theile links? (1 Halbes.) Und die beiden Theile rechts? (Auch 1 Halbes.) Also sind $^2/_4 = {}^1/_2$, und $^4/_4$ geben $^2/_2$ oder das Ganze.



Das Ganze ist hier in 6 gleiche Theile zerlegt. Von diesen 6 Sechsteln verbinden wir je 2 zu 1 Theile. Auf diese Weise bilden sich so viele größere Theile, als $^2/_6$ in $^6/_6$ enthalten sind, nämlich 3; $^2/_6 = {}^1/_3$; $^4/_6 = {}^2/_3$, und $^6/_6$ geben $^3/_3$ oder das Ganze. — Verbinden wir je $^3/_6$ zu 1 Theile, wie hier:



so entstehen so viele größere Theile, als $^3/_6$ in $^6/_6$ enthalten sind, nämlich 2; $^3/_6 = {}^1/_2$, und $^6/_6$ geben $^2/_2$ oder das Ganze.

Eben so wird veranschaulicht, daß

$^2/_8 = {}^1/_4$	$^3/_9 = {}^1/_3$	$^2/_{10} = {}^1/_5$	$^2/_{12} = {}^1/_6$	$^3/_{12} = {}^1/_4$	$^4/_{12} = {}^1/_3$
$^6/_8 = {}^3/_4$	$^6/_9 = {}^2/_3$	u. s. w.	$^{10}/_{12} = {}^5/_6$	$^9/_{12} = {}^3/_4$	$^6/_{12} = {}^1/_2$

b. Wie viele Theile von $^{18}/_{18}$ lassen sich, ohne daß ein Rest bleibt, zu 1 größeren Theil zusammenfassen? (2, 3, 6, 9.)

c. Was für Theile lassen sich also aus den 18 (oder 24, 30, 36, 48, 60, 100 ꝛc.) gleichen Theilen des Ganzen bilden?

(Von $^{18}/_{18}$ geben je 2 zusammen $^1/_9$, je 3 zusammen $^1/_6$ ꝛc.)

d. Welche Theile entstehen, wenn man von $^{15}/_{20}$ je 5 zusammenfaßt? Das Ganze ist in 20 gleiche Theile getheilt und 15 davon enthält der gegebene Bruch. Fasse ich von diesen 15 Theilen je 5 zusammen, so bilden sich so viele größere Theile, als 5 in 15 enthalten ist, nämlich 3, und fasse ich von den 20 Theilen des Ganzen je 5 Theile zusammen, so bilden sich so viele größere Theile, als 5 in 20 enthalten ist, nämlich 4; also sind $^{15}/_{20} = {}^3/_4$.

Wir drücken daher einen gegebenen Bruch in kleineren Zahlen aus, d. i. wir **kürzen** denselben, indem wir seinen Zähler und Nenner durch eine Zahl dividiren, welche in beiden aufgeht.

Wie wird also der Bruch $^{75}/_{100}$ gekürzt?

Der Bruch $^{75}/_{100}$ enthält 75 von 100 gleichen Theilen. In 75 und 100 gehen die Zahlen 5 und 25 auf. Fasse ich je 25 Theile in 1 Theil zusammen, so bilden sich aus den 75 Theilen so viele größere Theile, als 25 in 75, und aus den 100 Theilen so viele, als 25 in 100 enthalten ist.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{25} \\ 75 & 3 \\ \hline 100 & 4 \end{array} \qquad \text{Oder:} \qquad \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{5 \quad\;\; 5} \\ 75 & 15 & 3 \\ \hline 100 & 20 & 4 \end{array}$$

§. 185. Kennzeichen über die Theilbarkeit der Zahlen.

Tritt der Fall ein, daß die Hebezahl (der gemeinschaftliche Theiler, oder das gemeinschaftliche Maß), d. i. die Zahl, die in dem Zähler und dem Nenner eines Bruches aufgeht, nicht sogleich gefunden wird, dann ist es Zeit, die Schüler mit den Kennzeichen über die Theilbarkeit der Zahlen bekannt zu machen.

Durch **2** ist jede Zahl theilbar, in deren Einerstelle entweder eine Null, oder eine durch 2 theilbare Zahl steht. Z. B. 70, 430, 74, 596, 718, 1352.

Denn in den Zehnern, Hundertern ꝛc. geht 2 ohnehin auf. Sind daher auch die Einer durch 2 theilbar, so ist es die ganze Zahl.

Durch **4** ist jede Zahl theilbar, wo am Ende wenigstens zwei Nullen stehen, oder wo die Summe der Zehner und Einer durch 4 theilbar ist. Z. B. 7200, 7548, 236, 9308, 7860.

Denn in den Hundertern, Tausendern ꝛc. geht 4 in allen Fällen auf. Ist daher auch die Summe der Zehner und Einer durch 4 theilbar, so ist es die ganze Zahl.

Durch **8** ist jede Zahl theilbar, wo am Ende wenigstens drei Nullen stehen, oder wo 8 in den drei letzten Stellen aufgeht. Z. B. 9000, 75000, 5648, 3064, 5408, 98320.

Denn in den Tausendern und allen höheren Stellen geht 8 jedenfalls auf. Ist daher 8 auch in den drei letzten Stellen ohne Rest enthalten, so ist die ganze Zahl durch 8 theilbar.

Durch **5** ist jede Zahl theilbar, welche am Ende eine 5 oder eine 0 hat. (65; 170; 285; 3700; 7845.)

Grund: Alle Zehner, Hunderter ꝛc. sind durch 5 theilbar; steht nun in der Einerstelle eine 5 oder eine 0, so muß die ganze Zahl durch 5 theilbar sein.

Durch **10** ist jede Zahl theilbar, welche am Ende eine oder mehrere Nullen hat. (20; 450; 900; 7400.)

Durch **100** ist jede Zahl theilbar, welche am Ende zwei oder noch mehr Nullen hat. (800; 9000; 7800 ꝛc.)

Durch **25** ist jede Zahl theilbar, die in den beiden untersten Stellen entweder Nullen oder eine durch 25 theilbare Zahl hat. (3800; 43850; 29825; 47975 ꝛc. Grund!

Durch **9** ist eine Zahl theilbar, in deren Quersumme 9 aufgeht. Z. B. 7542. Man betrachtet nämlich die 7 Tausender 5 H. und 4 Z. auch als Einer und zählt sie mit den 2 Einern zusammen, als: 7 + 5 + 4 + 2 = 18; 18 ist durch 9 theilbar, also geht 9 auch in 7542 auf.

Grund: Theilt man mit 9, so bleibt von jedem Zehner (= 9 + 1), von jedem Hunderter (= 99 + 1), von jedem Tausender (= 999 + 1) 1 Einer als Rest.

Von 7 Tausendern bleiben also 7 Einer.
Von 5 Hundertern „ „ 5 „
Von 4 Zehnern „ „ 4 „
Fügt man hiezu auch die schon vorhandenen 2 „ ; so ergibt sich,
daß von 7542 die Summe aller Reste = 18 Einer ist.

In dem, was die Zahl 7542 mehr beträgt, als 18 Einer, geht 9 ohnehin auf. Ist nun 9 (wie hier) auch in der Summe aller Reste, als welche die Quersumme zu betrachten ist, ohne Rest enthalten, so ist die ganze Zahl durch 9 theilbar.

Durch 3 ist jede Zahl theilbar, deren Quersumme durch 3 theilbar ist, z. B. 87645.

8 + 7 + 6 + 4 + 5 = 30; 30 ist durch 3 theilbar, also auch die Zahl 87645. — Grund wie oben bei 9.

Durch 6 ist jede Zahl theilbar, welche theilbar ist durch 2 und durch 3; durch 12 jede Zahl, welche theilbar ist durch 3 und durch 4; durch 15 jede Zahl, welche theilbar ist durch 3 und durch 5 ꝛc. Die Gründe lassen sich leicht erkennen.

Durch 11 sind dreistellige Zahlen theilbar, wenn ihre mittlere Stelle als die Summe der beiden äußeren erscheint. (253; 297; 572.)

Der Grund wird erkannt, wenn man die Zahlen 23, 27, 52 durch 11 multiplicirt.

Weitere Regeln über die Theilbarkeit der Zahlen geben wir nicht, weil sie leichter vergessen, als gelernt und begriffen werden würden. Auch ist von dem nachstehenden Verfahren, wonach man bei zwei noch so großen Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß sicher finden kann, nur wenn es die Zeit wohl erlaubt, in der Schule Gebrauch zu machen.

§. 186. Das größte gemeinschaftliche Maß zu finden.

Man theilt mit dem Zähler in den Nenner. Geht es auf, so ist der Zähler selbst die verlangte Zahl. Bleibt ein Rest, so dividirt man mit demselben in den Zähler. Geht es auf, so ist der als Theiler gebrauchte Rest die Zahl zum Heben; bleibt aber wieder ein Rest, so theilt man mit diesem Reste wieder in den vorigen Theiler, und so fort. Der Theiler, wodurch es endlich aufgeht, ist als Hebezahl zu nehmen. Z. B. $^{111}/_{407} = ?$

```
111 | 407 | 3                         37
      333                           ‿
      ---                        111 |  3
       74 | 111 | 1              ----+----
             74                  407 | 11
             ---                     |
             37 | 74 | 2
                  74
```

Dieß Verfahren beruht zunächst auf den zwei Sätzen:

1) Wenn eine Zahl in zwei einzelnen Zahlen ohne Rest enthalten ist, so geht sie auch in deren Summe auf.

37 geht in sich selbst und in 74 auf; also ist 37 auch in der Summe von 37 und 74, d. i. in 111 ohne Rest enthalten. 37 liegt in 111 genau so oft, als in 37 und in 74 zusammengenommen.

2) Wenn eine Zahl in einer andern aufgeht, so geht sie auch in jedem Vielfachen derselben auf.

37 geht auf in 111; also liegt 37 auch in 3mal 111, d. i. in 333 ohne Rest. 37 liegt in 333 gerade 3mal so oft, als in 111.

Wir haben bereits gefunden, daß 37 in 74 und in 333 ohne Rest enthalten ist; mithin geht 37 (nach dem ersten Satze) auch in der Summe von 74 und 333, d. i. in 407 auf.

37 geht also im Zähler 111 und im Nenner 407 auf. Mithin kann der Bruch $^{111}/_{407}$ durch 37 gehoben werden.

(Ist der letzte Rest 1, so kann der Bruch, da 1 nicht theilt, nicht gehoben werden.)

Aufg. $^{89}/_{267}$, $^{4063}/_{4541}$, $^{7711}/_{9113}$, $^{1003}/_{2419}$, $^{1679}/_{1932}$, $^{533}/_{1189}$.

B. Das Gleichnamigmachen der Brüche.

A. Mündlich.

§. 187. **Die kleineren Nenner gehen in den größeren auf.**

a
b


In wie viele Theile ist das eine Ganze getheilt? Und das andere? Vergleiche die Theile des einen Ganzen mit denen des andern! Weil es ungleiche Theile von gleichen Ganzen sind, so haben sie auch verschiedene Namen. Wie heißen sie? Halbe und Viertel sind ungleichnamige Brüche. Wer verwandelt die ungleichen Theile in gleiche?

a
b


Da es jetzt gleiche Theile sind, so haben sie auch gleiche Namen. Jetzt sind es gleichnamige Theile. 4tel und 4tel sind gleichnamige Brüche.

Auf dieselbe Weise werden gleichnamig gemacht: Halbe und 6tel, 3tel und 6tel, Halbe und Achtel, 4tel und 8tel, 3tel und 9tel, 5tel und 10tel, 3tel und 12tel, 4tel und 12tel.

§. 188. **Die kleineren Nenner gehen nicht in den größeren auf.**

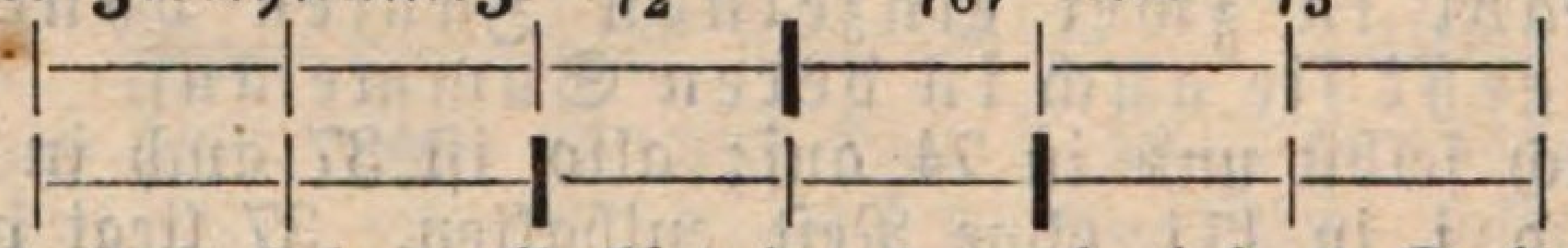
a. Die Nenner haben kein gemeinschaftliches Maß.

Beisp. 1. Halbe und Drittel gleichnamig zu machen.


Halbe.
3tel.

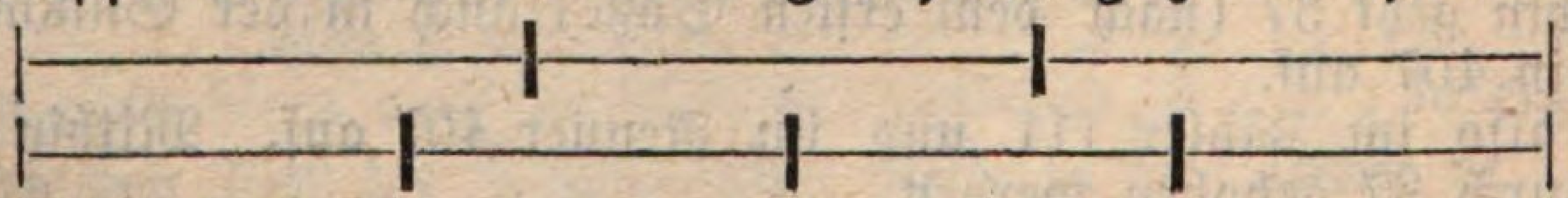
Läßt sich das Halbe in 3tel verwandeln? Nein. Oder das 3tel in Halbe? Noch weniger. Wir müssen also sowohl $1/2$, als $1/3$ in kleinere Theile theilen.

$1/2$ in 2 Theile getheilt $= 2/4$; $1/3$ in 2 Theile getheilt $= 2/6$.
$1/2$ in 3 „ „ $= 3/6$.
Nun sind sie gleichnamig. $1/2 = 3/6$, und $1/3 = 2/6$.


6tel.
6tel.

Wir haben jedes Halbe in 3 und jedes Drittel in 2 Theile zerlegt. So sind aus den 2 Halben 2×3 und aus den 3 Dritteln 3×2 Theile entstanden. Und da 2×3 wie $3 \times 2 = 6$, so sind jetzt die Halben und die Drittel in 6tel verwandelt.

Beisp. 2. 3tel und 4tel gleichnamig zu machen.


3tel.
4tel.

Daß ich die 3tel nicht in 4tel und die 4tel nicht in 3tel verwandeln kann, springt in die Augen. Ich muß daher sowohl die 3tel, als die 4tel in kleinere Theile zerfällen, nur fragt es sich, in welche oder

in wie viele, um gleiche und gleichnamige Theile zu erhalten. —3tel lassen sich verwandeln in 6tel, 9tel, 12tel ꝛc., also in eine solche Zahl von Theilen, in welcher 3 aufgeht; und 4tel lassen sich verwandeln in 8tel, 12tel, 16tel ꝛc., also in eine solche Zahl von Theilen, in welcher 4 aufgeht. Was für eine Zahl von Theilen wird es nun sein, in welche sich 3tel und 4tel zugleich verwandeln lassen? Eine solche, worin 3 und 4 zugleich ohne Rest enthalten sind. Und diese ergibt sich, wenn man 3 und 4 miteinander multiplicirt. $3 \times 4 = 12$. Ich verwandle also die 3tel und die 4tel in 12tel, und das geschieht, wenn ich jedes 3tel in 4 und jedes 4tel in 3 gleiche Theile zerlege.

|—|—|—|—**|**—|—|—|—**|**—|—|—|—| 12tel.
|—|—|—**|**—|—|—**|**—|—|—**|**—|—|—| 12tel.

Für die ungleichen und ungleichnamigen Theile haben wir jetzt gleiche und daher auch gleichnamige Theile. Ihr gemeinschaftlicher Name ist 12tel, ihr gemeinschaftlicher oder Hauptnenner ist 12.

Beisp. 3. $^4/_5$ und $^5/_6$ gleichnamig zu machen.

5tel und 6tel lassen sich, da $5 \times 6 = 30$, in 30stel verwandeln (kommen in 30stel zusammen). $^1/_5 = {}^6/_{30}$, und $^4/_5 = 4 \times 6$ oder $^{24}/_{30}$; $^1/_6 = {}^5/_{30}$, und $^5/_6 = 5 \times 5$ oder $^{25}/_{30}$. Also sind $^4/_5$ und $^5/_6 = {}^{24}/_{30}$ und $^{25}/_{30}$.

Ebenso:
$^1/_2$ u. $^2/_5$ $^3/_4$ u. $^4/_5$ $^2/_3$ u. $^3/_7$ $^4/_5$ u. $^6/_7$ $^2/_3$ u. $^7/_8$
$^2/_3$ u. $^3/_5$ $^1/_2$ u. $^3/_7$ $^3/_4$ u. $^4/_7$ $^5/_6$ u. $^6/_7$ $^2/_3$ u. $^9/_{10}$

b. Die Nenner haben ein gemeinschaftliches Maß.

Beisp. 1. $^9/_{10}$ und $^7/_{15}$ gleichnamig zu machen.

10tel und 15tel lassen sich, da $10 \times 15 = 150$, in 150stel verwandeln. Es gibt jedoch eine viel kleinere Zahl, in welcher 10 und 15 aufgehen. Sie heißt — 30. Diese Zahl ist genau $^1/_5$ von 150. Woher kommt es nun, daß hier ein Hauptnenner möglich ist, der nur $^1/_5$ von dem Produkte aus 10 und 15 beträgt? Um der Sache auf den Grund zu kommen, so zerlegen wir die beiden Nenner in ihre (Prim-) Faktoren. Notirt:

$10 = 2 \times 5$, und $15 = 3 \times 5$; also ist $10 \times 15 = 2 \times 5 \times 15 = 2 \times 5 \times 3 \times 5$.

Welche Zahlen gehen in dem Produkte aus 2×5 auf?

Antw: 2, 5 und 2×5 oder 10; in 2×5 oder 10 liegt 2 5mal, 5 2mal, und 10 einmal.

Welche Zahlen gehen in dem Produkte aus $2 \times 5 \times 3$ auf?

Antw.: Außer 2, 5 und 3 noch 2×5 oder 10, 5×3 oder 15, und 2×3 oder 6.

Wir brauchen daher auch, um ein durch 10 und 15 theilbares Produkt zu erhalten, nur die Zahlen 2, 5 und 3 miteinander zu mul-

tipliciren. Wie wir zu diesem gelangen, geht aus dem Bisherigen hervor.

$10 = 2 \times 5.$
$15 = 3 \times 5.$

Wir zerlegen 10 und 15 in ihre Grund-Faktoren und streichen die eine 5; $3 \times 2 \times 5 = 30$.

Woher kommt es also, daß bei 10teln und 15teln ein Hauptnenner möglich ist, der nur $^1/_5$ von 10×15 oder 150 beträgt? Weil 10 und 15 den gemeinschaftlichen Faktor 5 haben und weil derselbe nur einmal gesetzt zu werden braucht. Nun macht die beiden Brüche gleichnamig!

Beispiel 2. 21stel und 35stel.

$21 = 3 \times 7.$

$35 = 5 \times 7$. Von 5×7 behalten wir bloß die 5, weil der Faktor 7 schon da ist. $3 \times 7 \times 5$ gibt eine Zahl, in welcher die Nenner 21 und 35 ohne Rest enthalten sind. 21 liegt in $(3 \times 7) \times 5$ genau 5mal, und 35 liegt in $3 \times (7 \times 5)$ genau 3mal.

$5 \times (3 \times 7) = 5 \times 21 = 105$. Diese Zahl erhalte ich auf die kürzeste Weise, indem ich mit dem gemeinschaftlichen Maße 7 in 35 dividire, wodurch ich 5 erhalte, und mit dieser 5 den Nenner 21 multiplicire. Ich denke oder spreche: das gemeinschaftliche Maß von 21 und 35 ist 7; 7 liegt in 35 5mal, und $5 \times 21 = 105$.

Beisp. 3. 18tel und 24stel.

$18 = 2 \times 3 \times 3$ Bei 24 werden die Faktoren 2 u. 3 ge-
$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ strichen, weil sie sich schon bei 18 finden.

$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = (2 \times 2) \times (2 \times 3 \times 3) = 4 \times 18 = 72.$

Kurz: Das größte gemeinschaftliche Maß von 18 und 24 ist 6; 6 liegt in 24 4mal, und $4 \times 18 = 72$.

Welches ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner von

$^1/_4$ u. $^1/_6$? $^1/_4$ u. $^1/_{10}$? $^1/_8$ u. $^1/_{12}$? $^1/_{10}$ u. $^1/_{12}$? $^1/_{15}$ u. $^1/_{20}$?
$^1/_6$ u. $^1/_8$? $^1/_6$ u. $^1/_{10}$? $^1/_9$ u. $^1/_{15}$? $^1/_{12}$ u. $^1/_{18}$? $^1/_{20}$ u. $^1/_{30}$?
$^1/_9$ u. $^1/_6$? $^1/_8$ u. $^1/_{10}$? $^1/_6$ u. $^1/_{15}$? $^1/_{12}$ u. $^1/_{15}$? $^1/_{45}$ u. $^1/_{30}$?

Schriftlich.

§. 189. Die kleineren Nenner sind in dem größten Nenner der gegebenen Brüche ohne Rest enthalten.

Beisp. $^{11}/_{12}$, $^7/_{15}$, $^9/_{20}$, $^{23}/_{30}$, $^{47}/_{60}$ =?

Der größte Nenner dieser Brüche ist 60. Die Nenner 12, 15, 20 und 30 gehen darin auf. Die Brüche $^{11}/_{12}$, $^7/_{15}$, $^9/_{20}$ und $^{23}/_{30}$ lassen sich daher gleichfalls in 60stel verwandeln.

	60		$1 = {}^{60}/_{60}$.
$^{11}/_{12}$	5	55	$^1/_{12} = {}^5/_{60}$; $^{11}/_{12}$ = 11mal 5 oder $^{55}/_{60}$.
$^7/_{15}$	4	28	$^1/_{15} = {}^4/_{60}$; $^7/_{15}$ = 7mal 4 oder $^{28}/_{60}$.
$^9/_{20}$	3	27	$^1/_{20} = {}^3/_{60}$; $^9/_{20}$ = 9mal 3 oder $^{27}/_{60}$.
$^{23}/_{30}$	2	46	$^1/_{30} = {}^2/_{60}$; $^{23}/_{30}$ = 23mal 2 oder $^{46}/_{60}$.
$^{47}/_{60}$	1	47	$^{47}/_{60} = {}^{47}/_{60}$.

§. 190. Die Nenner der gegebenen Brüche sind Primzahlen unter sich.

Beisp. $^3/_4$, $^5/_7$, $^2/_3$.

Von 4, 7 und 3 geht weder eine Zahl in der andern auf, noch haben sie ein gemeinschaftliches Maß. (Sie sind Primzahlen unter sich.) Der möglichst kleinste Hauptnenner ist daher $4 \times 7 \times 3$ oder 84. Die Brüche werden daher in 84stel verwandelt. Steht so:

	84		
$^3/_4$	21	63	$^1/_4 = {}^{21}/_{84}$, $^3/_4 = {}^{63}/_{84}$.
$^5/_7$	12	60	$^1/_7 = {}^{12}/_{84}$, $^5/_7 = {}^{60}/_{84}$.
$^2/_3$	28	56	$^1/_3 = {}^{28}/_{84}$, $^2/_3 = {}^{56}/_{84}$.

Hauptn.: $4 \times 7 \times 3 = 84$

§. 191. Die Nenner der gegebenen Brüche haben ein gemeinschaftliches Maß.

Beispiel: Wie heißt der Hauptnenner für 12tel, 15tel und 18tel?

a. $12 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3$
$15 = 3 \,.\, 5$
$18 = 2 \,.\, 3 \,.\, 3$

$12 = 2 \times 2 \times 3$; $15 = 3 \times 5$. Der Faktor 3 findet sich schon bei 12 und wird daher gestrichen. Auch von 18 oder $2 \times 3 \times 3$ finden sich die Faktoren 2 und 3 bei 12; sie werden daher ebenfalls gestrichen. Es bleiben also noch die Faktoren

$2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 3$

Hierunter kommen die Grundfaktoren von jedem unserer Nenner vor; also müssen diese auch in dem Produkte aus $2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 3$ ohne Rest enthalten sein. Und so ist es.

12 oder $2 \,.\, 2 \,.\, 3$ liegt in $2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 3$ gerade $5 \,.\, 3$mal,
15 oder $3 \,.\, 5$ liegt in $2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 3$ gerade $2 \,.\, 2 \,.\, 3$mal,
18 oder $2 \,.\, 3 \,.\, 3$ liegt in $2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 3$ gerade $2 \,.\, 5$mal.

b.			
2	12.	15.	18
3	6.	15.	9
	2.	5.	3

12 ist hier zerlegt in die beiden Theiler 2. 3 und in den Quotienten 2; 15 ist zerlegt in den Theiler 3 und in den Quotienten 5, und 18 ist zerlegt in die beiden Theiler 2. 3 und in den Quotienten 3.

Der Hauptnenner ist also

nach a: $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 = 180$,
nach b: $2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 3 = 180$.

Die Faktoren stehen zwar das eine Mal nicht ganz in derselben Ordnung wie das andere Mal; es hat dieß aber, wie wir wissen und sehen, auf das Produkt nicht den geringsten Einfluß.

Beispiel 3. Wie heißt der Hauptnenner für 9tel, 20stel, 18tel, 16tel, 12tel, 15tel und 24stel?

a. 9
20 = 2×2×5
18 = 2×3×3
16 = 2×2×2×2
12
15 = 3×5.
24 = 2×2×3×3
2×2×5×3×3×2×2
= 720

Zuerst sehen wir zu, ob sich unter den gegebenen Nennern auch solche befinden, welche in einem der größeren Nenner aufgehen. Dieß ist bei 9 und 12 der Fall. 9 geht in 18, und 12 in 24 auf. Jede Zahl, welche durch 18 theilbar ist, ist es auch durch 9, und jede Zahl, welche theilbar ist durch 24, ist es auch durch 12. (Nachweis!) 9 und 12 werden daher gestrichen.

Die übrigen Nenner zerlegen wir in ihre Grundfaktoren.

Von den Faktoren der Zahl 18 wird 2 gestrichen, weil wir diesen Faktor schon bei 20 haben. — Von den Faktoren der Zahl 16 wird 2 × 2 gestrichen; denn die Faktoren 2 × 2, welche stehen bleiben, und die 2 × 2 bei 20 machen zusammen 2×2×2×2 und diese reichen hin, ein Produkt zu bilden, in welchem 16 aufgeht. — Bei der Zahl 15 streichen wir den Faktor 3, weil wir ihn schon bei 18 haben, und den Faktor 5, weil er sich schon bei 20 findet. — Da unter den Faktoren, welche wir bis jetzt behalten haben, der Faktor 2 schon viermal, der Faktor 3 schon zweimal vorkommt; so werden auch die Faktoren von 24 alle gestrichen. — Wir behalten also bloß die Faktoren 2×2×5×3×3×2×2. Unter denselben sind sämmtliche Faktoren der gegebenen Zahlen enthalten. Werden daher die behaltenen Faktoren mit einander multiplicirt, so ist das Produkt eine Zahl, in welcher die gegebenen Nenner sämmtlich aufgehen.

b.

2	9 .	20 .	18 .	16 .	12 .	15 .	24
2		10 .	9 .	8 .		15 .	12
3		5 .	9 .	4 .		15 .	6
2		5 .	3 .	4 .		5 .	2
5		5 .	3 .	2 .		5 .	1
		1 .	3 .	2 .		1 .	1

2×2×3×2×5×3×2 = 720.

Auch hier werden 9 u. 12 gestrichen und die übrigen Nenner, indem man sie durch ihre gemeinschaftlichen Grundfaktoren dividirt, in ihre Grundfaktoren zerlegt.

2 ist in 20 10mal (20 = 2 × 10), 2 ist in 18 9mal (18 = 2 . 9); 2 ist in 16 8mal (16 = 2 . 8); 2 in 15 geht nicht auf, 15 herunter; 2 ist in 24 12mal (24 = 2 . 12).

Der Divisor 2 vertritt also den Faktor 2 von 20, 18, 16 und 24, und dieser steht daher anstatt viermal nur einmal. Dreimal ist er bereits als überflüssig weggeschafft, gestrichen.

Die Theilung mit Grundfaktoren wird so lange als möglich fortgesetzt. Am Ende werden alle Theiler mit den Zahlen, welche zuletzt vorhanden sind, multiplicirt. Das Produkt ist der kleinste Hauptnenner.

Sucht den Hauptnenner (das kleinste gemeinschaftliche Vielfache) von

1) 21, 35, 7, 36
2) 70, 42, 30, 105
3) 32, 48, 45, 36, 80
4) 6, 25, 14, 15, 12
5) 18, 34, 5, 11, 8, 9, 33
6) 14, 8, 9, 3, 12, 15, 21
7) 25, 27, 36, 105, 45, 35
8) 15, 25, 8, 12, 9, 16, 24
9) 12, 65, 39, 34, 51, 52
10) 33, 21, 35, 12, 77, 44.

C. Addiren.

§. 194.

A. Mündlich.

1) $13^{11}/_{16} + 24^{9}/_{16} = ?$ $13 + 24 = 37$; $^{11}/_{16} + ^{9}/_{16} = ^{20}/_{16} = 1^{4}/_{16} = 1^{1}/_{4}$; $37 + 1^{1}/_{4} = 38^{1}/_{4}$; also ist $13^{11}/_{16} + 24^{9}/_{16} = 38^{1}/_{4}$.

2) $^{5}/_{6} + ^{7}/_{9} = ?$ 6tel und 9tel geben 18tel; $^{1}/_{6} = ^{3}/_{18}$, $^{5}/_{6} = 5 \times 3$ oder $^{15}/_{18}$; $^{1}/_{9} = ^{2}/_{18}$, $^{7}/_{9} = 7 \times 2$ oder $^{14}/_{18}$; $^{15}/_{18} + ^{14}/_{18} = 1^{11}/_{18}$; also sind $^{5}/_{6} + ^{7}/_{9} = 1^{11}/_{18}$.

3) $8^{4}/_{5} + ^{6}/_{7} = ?$ 5tel und 7tel kommen in 35stel zusammen; $^{4}/_{5} = 4 \times 7$ oder $^{28}/_{35}$, und $^{6}/_{7} = 6 \times 5$ oder $^{30}/_{35}$; $^{30}/_{35} + ^{28}/_{35} = ^{30}/_{35} + ^{5}/_{35} + ^{23}/_{35} = 1^{23}/_{35}$; $8 + 1^{23}/_{35} = 9^{23}/_{35}$; also ist $8^{4}/_{5} + ^{6}/_{7} = 9^{23}/_{35}$.

4) $4^{7}/_{8} + 5^{3}/_{4} = ?$ $4 + 5 = 9$; $^{3}/_{4} = ^{6}/_{8}$; $^{7}/_{8} + ^{6}/_{8} = 1^{5}/_{8}$; $9 + 1^{5}/_{8} = 10^{5}/_{8}$; also ist $4^{7}/_{8} + 5^{3}/_{4} = 10^{5}/_{8}$.

B. Schriftlich.

Aufg. $14^{7}/_{8} + 375^{11}/_{16} + 8^{7}/_{12} + 478^{23}/_{25} + 87^{14}/_{15}$?

Ausrechnung.

8
16 = 2 × 2 × 2 × 2
12 = 2 × 2 × 3
25 = 5 × 5
15 = 3 × 5
2×2×2×2×3×5×5

Oder:

2	8 . 16 . 12 . 25 . 15
2	8 . 6 . 25 . 15
5	4 . 3 . 25 . 15
3	4 . 3 . 5 . 3
	4 . 1 . 5 . 1

2×2×5×3×4×5

Hauptnenner = 1200.

	1200		
$14^{7}/_{8}$	150	1050	
$375^{11}/_{16}$	75	825	
$8^{7}/_{12}$	100	700	
$478^{23}/_{25}$	48	1104	
$87^{14}/_{15}$	80	1120	
962	1200	4799	3
$+ 3\frac{1199}{1200}$		3600	
$965\frac{1199}{1200}$		1199	

D. Subtrahiren.

§. 193.

Mündlich.

1) $^{11}/_{12} - ^{7}/_{12} = ?$ $^{11}/_{12} - ^{7}/_{12} = ^{4}/_{12} = ^{1}/_{3}$.

2) $^{14}/_{15} - ^{3}/_{5} = ?$ Die 5tel verwandle ich in 15tel. $^{1}/_{5} = ^{3}/_{15}$, $^{3}/_{5} = 3 \times 3$ oder $^{9}/_{15}$; $^{14}/_{15} - ^{9}/_{15} = ^{5}/_{15} = ^{1}/_{3}$.

3) $^6/_7 - ^3/_4 = ?$ 7tel und 4tel lassen sich in 28stel verwandeln; $^6/_7 = 6 \times 4$ oder $^{24}/_{28}$; $^3/_4 = 3 \times 7$ oder $^{21}/_{28}$; $^{24}/_{28} - ^{21}/_{28} = ^3/_{28}$.

4) $^7/_{12} - ^7/_{16} = ?$ 12 und 16 haben 4 als gemeinschaftliches Maß. 4 in 12 liegt 3mal; $3 \times 16 = 48$; $^7/_{12} = 7 \times 4$ oder $^{28}/_{48}$; $^7/_{16} = 7 \times 3$ oder $^{21}/_{48}$; $^{28}/_{48} - ^{21}/_{48} = ^7/_{48}$.

5) $3\,^7/_8 - ^2/_3 = ?$ 8tel und 3tel kommen in 24stel zusammen. $^7/_8 = 7 \times 3$ oder $^{21}/_{24}$; $^2/_3 = 2 \times 8$ oder $^{16}/_{24}$; $3\,^{21}/_{24} - ^{16}/_{24} = 3\,^5/_{24}$.

6) $8\,^3/_4 - 3\,^3/_8 = ?$ $^3/_4 = ^6/_8$; $^6/_8 - ^3/_8 = ^3/_8$; und $8 - 3 = 5$; $5 + ^3/_8 = 5\,^3/_8$.

7) $7\,^4/_9 - ^5/_6 = ?$

9tel und 6tel geben 18tel; $^4/_9 = ^8/_{18}$, und $^5/_6 = ^{15}/_{18}$; jetzt heißt es: $7\,^8/_{18} - ^{15}/_{18}$; $7\,^8/_{18} = 6\,^{26}/_{18}$; $6\,^{26}/_{18} - ^{15}/_{18} = 6\,^{11}/_{18}$.

8) $12\,^2/_3 - 7\,^7/_8 = ?$

$12\,^2/_3 - 7 = 5\,^2/_3$. Davon habe ich noch $^7/_8$ abzuziehen. $5\,^2/_3 - ^7/_8 = 4\,^1/_8 + ^2/_3 = 4\,^3/_{24} + ^{16}/_{24} = 4\,^{19}/_{34}$.

Schriftlich.

1) $^{47}/_{48} - ^{53}/_{84} = ?$ 2) $125\,^5/_9 - 84\,^{41}/_{45} = ?$

Ansatz und Ausrechnung.

1)

	336	
$^{47}/_{48}$	7	329
$^{53}/_{84}$	4	212
$^{39}/_{112}$		$\frac{117}{336} = ^{39}/_{112}$

2)

	45	45
$125\,^5/_9$	5	25
		70
$84\,^{41}/_{45}$	1	41
$40\,^{29}/_{45}$		29

E. Multipliciren.

§. 194. Uebersicht.

$2 \times ^7/_8$ $^3/_4 \times 5$ $^3/_4 \times ^2/_3$ $^3/_4 \times 5\,^1/_2$.

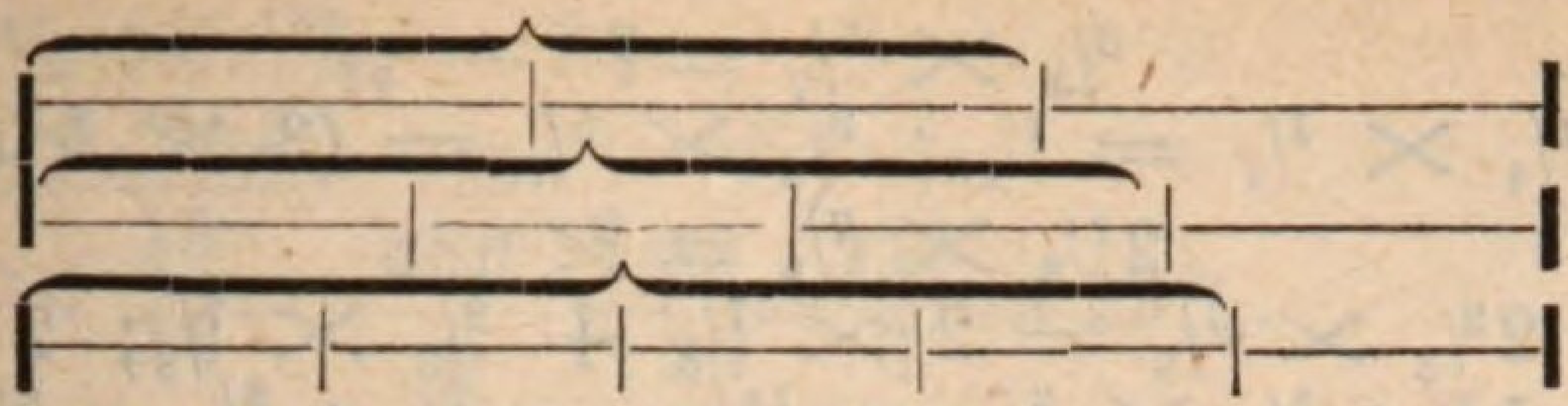
$4 \times 9\,^5/_6$ $6\,^4/_5 \times 8$ $4\,^4/_5 \times ^3/_8$ $5\,^1/_2 \times 3\,^3/_5$.

Von diesen acht verschiedenen Fällen sind die zwei ersten schon behandelt. Wir gehen daher sogleich zu den andern über.

a. Der Multiplikand eine ganze Zahl.



u. s. w.

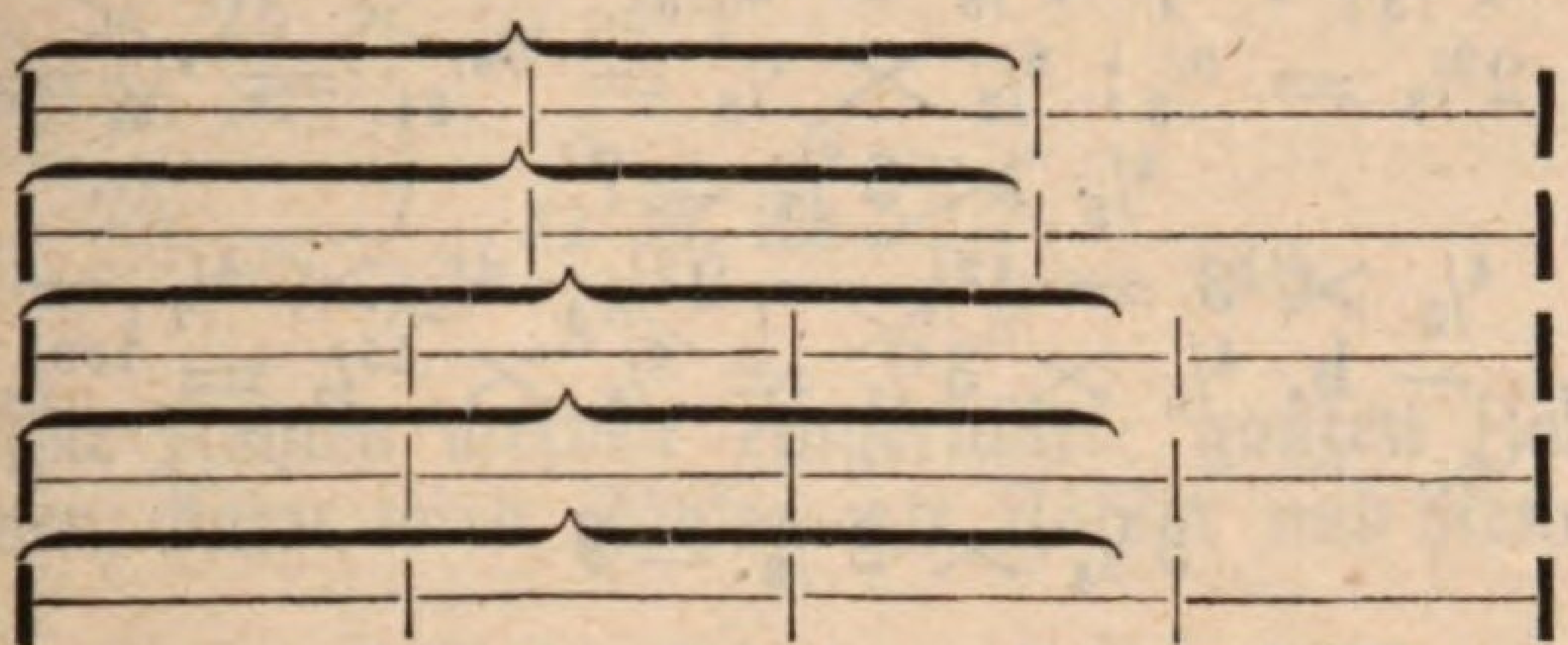


$\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$

$\frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$

$\frac{4}{5} \times 1 = \frac{4}{5}$

u. s. w.



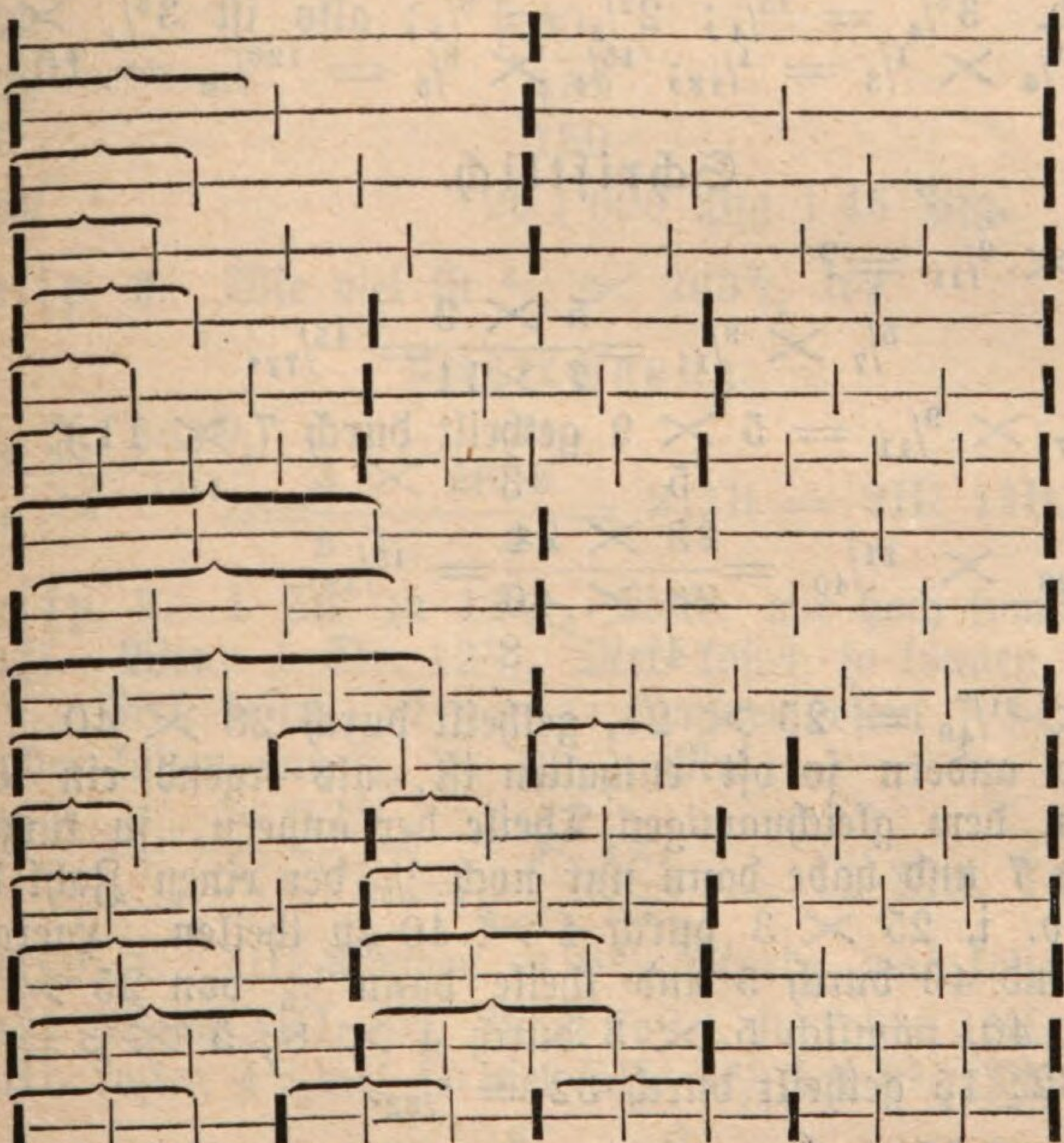
$\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

$\frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

1) $\frac{4}{5} \times 8 = ?$ $\frac{4}{5} \times 8$ (oder $8 \times \frac{4}{5}) = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$.

2) $5\frac{3}{4} \times 9 = ?$ $5 \times 9 = 45$; $\frac{3}{4} \times 9 = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$; $45 + 6\frac{3}{4} = 51\frac{3}{4}$.

b. Multiplikator und Multiplikand sind oder haben Brüche



$\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Aus dem Bisherigen werden die Schüler die Regel abstrahiren, daß man **Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt.**

$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = ?$

Ausr. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$; $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = (3 \times 5$ oder) $\frac{15}{28}$.

$2\frac{2}{3} \times \frac{7}{8} = ?$

Ausr. a. $2\frac{2}{3} \times \frac{7}{8} = 2 \times \frac{7}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{7}{8}$; $2 \times \frac{7}{8} = \frac{14}{8} = 1\frac{6}{8} = 1\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$; $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$; $\frac{9}{12} + \frac{7}{12} = \frac{16}{12} = 1\frac{1}{3}$; $1 + 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Ausr. b. $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$; $\frac{8}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{56}{24} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

$\frac{4}{5} \times 3\frac{4}{7} = ?$

Ausr. a. $\frac{4}{5} \times 3 = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$; $\frac{4}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{35}$; $2\frac{2}{5} + \frac{16}{35} = 2\frac{6}{7}$. — b. $\frac{4}{5} \times 3\frac{4}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{25}{7} = \frac{100}{35} = 2\frac{30}{35} = 2\frac{6}{7}$.

$3\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{3} = ?$

Mündlich und schriftlich.

Aufl. a. $3\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{3} = 3 \times 2\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times 2\frac{2}{3}$.

Ausr. $3 \times 2 = 6$.

$3 \times \frac{2}{3} = 2$; $6 + 2 = 8$.

$\frac{3}{4} \times 2 = 1\frac{1}{2}$; $8 + 1\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$.

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$; $9\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 10$.

$3\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{3} = 10$.

Aufl. b. $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$; $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$; also ist $3\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{3} = \frac{15}{4} \times \frac{8}{3}$; $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$; $\frac{15}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{120}{12} = 10$.

Schriftlich.

1) $\frac{5}{7} \times \frac{9}{11} = ?$

$$\frac{5}{7} \times \frac{9}{11} = \frac{5 \times 9}{7 \times 11} = \frac{45}{77}.$$

($\frac{5}{7} \times \frac{9}{11} = 5 \times 9$ getheilt durch 7×11.)

$$2)\ \frac{25}{28} \times \frac{21}{40} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \times \overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{4}{\cancel{28}} \times \underset{8}{\cancel{40}}} = \frac{15}{32}.$$

$\frac{25}{28} \times \frac{21}{40} = 25 \times 21$, getheilt durch 28×40. Da eine Zahl in einer andern so oft enthalten ist, als irgend ein Theil der einen Zahl in dem gleichnamigen Theile der andern, so kürze ich 28 und 21 durch 7 und habe dann nur noch $\frac{1}{7}$ der einen Zahl durch $\frac{1}{7}$ der andern, d. i. 25×3 durch 4×40 zu theilen. Hierauf kürze ich auch 25 und 40 durch 5 und theile dann $\frac{1}{5}$ von 25×3 durch $\frac{1}{5}$ von 4×40, nämlich 5×3 durch 4×8; $5 \times 3 = 15$, und $4 \times 8 = 32$; 15 getheilt durch $32 = \frac{15}{32}$.

3) $4\frac{4}{9} \times 15 = ?$

$$\frac{4\frac{4}{9} \times 15}{\frac{40}{9} \times \frac{15}{1}} = \frac{40 \times \overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \times 1} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}.$$

4) $31\frac{1}{9} \times \frac{15}{16} = ?$

$$31\tfrac{1}{9} \times \tfrac{15}{16}$$

$$\frac{280}{9} \times \frac{15}{16} = \frac{\overset{35}{\cancel{280}} \times \overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \quad \underset{2}{\cancel{16}}} = \frac{175}{6} = 29\tfrac{1}{6}.$$

5) $6\frac{2}{5} \times 25 \times \frac{7}{8} = ?$

$$6\tfrac{2}{5} \times 25 \times \tfrac{7}{8}$$

$$\frac{32}{5} \times \frac{25}{1} \times \frac{7}{8} = \frac{\overset{4}{\cancel{32}} \times \overset{5}{\cancel{25}} \times 7}{\cancel{5} \times 1 \times \cancel{8}} = 140.$$

Gemischte Zahlen werden eingerichtet; ganzen Zahlen gibt man 1 zum Nenner; dann wird Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt.

c. **Aufgaben mit der benannten und angewandten Zahl.**

Beispiel 1. $5\frac{3}{4} \times 8\frac{3}{5}$ Mark $= ?$

Ausr. $5\frac{3}{4} \times 8\frac{3}{5}$

$$\tfrac{23}{4} \times \tfrac{43}{5} = \frac{23 \times 43}{4 \times 5}$$

```
 43     4 × 5 = 20 | 989 | 49 Mark
 23                | 80  |
---                |-----
129                  189
 86                  180
---                  ---
989             20 | 900 Pfg. | 45 Pfg.
```

Beisp. 2. Wie viel ist $\frac{4}{5} \times 263\frac{3}{4}$ lt?

Ausrechnung.

$$\tfrac{4}{5} \times 263\tfrac{3}{4}$$

$$\tfrac{4}{5} \times \tfrac{1055}{4} = \frac{\cancel{4} \times \overset{211}{\cancel{1055}}}{\cancel{5} \times \cancel{4}} = 211\text{lt} = 2\text{Hl } 11\text{lt}.$$

Beisp. 3. 1 Ctr. zu $12\frac{7}{10}$ Mrk.; wie hoch kommen $\frac{7}{8}$ Ctr.?

Aufl. Wenn 1 Ctr. $12\frac{7}{10}$ Mrk. kostet, so können $\frac{7}{8}$ Ctr. nicht $1 \times 12\frac{7}{10}$ Mrk. kosten. 7 ganze Centner kosten $7 \times 12\frac{7}{10}$ Mrk; $\frac{7}{8}$ Ctr. aber kosten nur $\frac{7}{8} \times 12\frac{7}{10}$ Mrk.

Ausr. $\frac{7}{8} \times 12\frac{7}{10}$

$$\tfrac{7}{8} \times \tfrac{127}{10} = \frac{7 \times 127}{8 \times 10} = 11 \text{ Mrk. } 11\tfrac{1}{4} \text{ Pfg.}$$

Beisp. 4. 1Hl Roggen zu $8\frac{3}{4}$ Mark; was kosten $4\frac{4}{5}$ Hl?

Aufl. Wenn 1HL $8\frac{3}{4}$ Mark kostet, so kosten 4HL 4mal so viel, und $4\frac{4}{5}$HL kosten $4\frac{4}{5}$mal so viel, also $4\frac{4}{5}$mal $8\frac{3}{4}$ Mark.

Ausr. $4\frac{4}{5} \times 8\frac{3}{4}$

$$\tfrac{24}{5} \times \tfrac{35}{4} = \frac{\overset{6}{\cancel{24}} \times \overset{7}{\cancel{35}}}{\cancel{5} \times \cancel{4}} = 42 \text{ Mark.}$$

F. Dividiren.

A. Enthaltensein.

§. 195. Verfahren.

a. Mit der unbenannten Zahl.

1) Wie oft sind $^3/_{13}$ in $^{12}/_{13}$ enthalten? Antw. So oft, als man $^3/_{13}$ von $^{12}/_{13}$ wegnehmen kann, d. i. so oft als 3 in 12, nämlich 4mal.

2) Wie oft sind $^3/_4$ in $^4/_5$ enthalten? Antw. So oft, als man $^3/_4$ von $^4/_5$ wegnehmen kann. Kann man $^3/_4$ von $^4/_5$ ohne Weiteres wegnehmen? Nein; beide Brüche müssen erst gleichnamig gemacht werden. 4tel und 5tel kommen in 20stel zusammen. $^3/_4 = {}^{15}/_{20}$, und $^4/_5 = {}^{16}/_{20}$. Jetzt heißt die Aufgabe: Wie oft sind $^{15}/_{20}$ in $^{16}/_{20}$ enthalten? Antw. So oft, als 15 in 16, nämlich $1^1/_{15}$ mal. Also 2c.

Ungleichnamige Brüche werden gleichnamig gemacht und dann dividirt, wie ganze Zahlen.

3) Wie oft sind $^3/_4$ in $7^2/_3$ enthalten?

a. Ich mache beide Zahlen gleichnamig. 4tel und 3tel geben 12tel. $^3/_4 = {}^9/_{12}$; $7^2/_3 = {}^{23}/_3 = {}^{92}/_{12}$; $^9/_{12}$ sind in $^{92}/_{12}$ so oft enthalten, als 9 in 92, nämlich $10^2/_9$ mal. Also 2c.

b. Ich zerlege $7^2/_3$ in $6 + 1^2/_3$; 3 liegt in 6 2mal; $^3/_4$ liegt in 6 4mal so oft, 4×2 oder 8mal. Nun suche ich, wie oft $^3/_4$ auch noch in $1^2/_3$ enthalten sind. $^3/_4 = {}^9/_{12}$; $1^2/_3 = {}^{20}/_{12}$; $^9/_{12}$ sind in $^{20}/_{12}$, wie 9 in 20, nämlich $2^2/_9$mal enthalten. $8 + 2^2/_9 = 10^2/_9$; also 2c.

4) $16^1/_2$ ist das Wievielfache von $1^1/_3$?

Aufl. $16^1/_2$ ist das Sovielfache von $1^1/_3$, als $1^1/_3$ in $16^1/_2$ enthalten ist. $1^1/_3 = {}^4/_3$; 4 liegt in 16 4mal; $^4/_3$ liegen in 16 3mal so oft, 3×4 oder 12mal. Nun suche ich, wie oft $1^1/_3$ auch noch in $^1/_2$ liegt. $1^1/_3$ oder $^4/_3 = {}^8/_6$, und $^1/_2 = {}^3/_6$; $^8/_6$ sind in $^3/_6$, wie 8 in 3, $^3/_8$mal enthalten. $12 + {}^3/_8 = 12^3/_8$; $1^1/_3$ ist in $16^1/_2$ $12^3/_8$mal enthalten; also ist $16^1/_2$ das $12^3/_8$fache von $1^1/_3$.

5) Wie vielmal ist 2 in $17^3/_5$ enthalten?

a. 2 liegt in 17 $8^1/_2$mal; 2 liegt in $^3/_5$ so oft, als $^{10}/_5$ in $^3/_5$, nämlich $^3/_{10}$mal; $8^1/_2 + {}^3/_{10} = 8^8/_{10} = 8^4/_5$.

b. $2 = {}^{10}/_5$, und $17^3/_5 = {}^{88}/_5$; $^{10}/_5$ in $^{88}/_5 = 10$ in $88 = 8^4/_5$.

Schriftlich.

Erste Weise.

Beisp. 1. Wie oft ist $^5/_8$ in $^7/_9$ enthalten?

Ansatz und Ausrechnung.

5	7	
8	9	
9	8	
45	56	$1^{11}/_{45}$.

Ich mache beide Brüche gleichnamig, d. h. ich verwandle die 8tel und 9tel in gleiche Theile, und das geschieht, indem ich jedes 8tel in 9 und jedes 9tel in 8 gleiche Theile theile. Hierdurch entstehen aus den 5 Achteln 5×9 oder 45 und aus den 7 Neunteln 7×8 oder 56 Theile von gleicher Größe (72stel). Und nun suche ich, wie oft jene in diesen enthalten sind; ich dividire also mit 45 in 56.

Beisp. 2. Wie oft liegt $^{18}/_{19}$ in $27^3/_4$?

Ansatz und Berechnung.

$^{18}/_{19}$	$27^3/_4$
18	111
4	19
	999
	111
72	2109 | $29^7/_{24}$

$27^3/_4 = {}^{111}/_4$

Ich theile jedes 19tel in 4 und jedes 4tel in 19 gleiche Theile. Hierdurch entstehen aus den $^{18}/_{19}$ 4×18 oder 72 und aus den $^{111}/_4$ 19×111 oder 2109 Theile von gleicher Größe (76stel).

Zweite Weise. (Für Präparanden.)

Beisp. 1. $7 : {}^3/_4 = ?$ (7 dividirt durch $^3/_4$.)

Ausr. $7 = 7 \times 4$ Viertel; 3 Viertel sind in 7×4 Viertel so oft enthalten, als 3 in 7×4; also ist 7 div. durch $^3/_4 = 7 \times 4$, div. durch 3. Steht:

$$7 : {}^3/_4 = \frac{7 \times 4}{3} = {}^{28}/_3 = 9^1/_3.$$

Beisp. 2. $^4/_5 : {}^7/_8 = ?$ ($^4/_5$ dividirt durch $^7/_8$.)

Ausr. Ich theile von den 4 Fünfteln jedes in 8 und von den 7 Achteln jedes in 5 gleiche Theile, und dividire hiernach 4×8 durch 5×7. Mithin ist

$$^4/_5 : {}^7/_8 = \frac{4 \times 8}{5 \times 7} = {}^{32}/_{35}.$$

Man stürzt also den Divisor und multiplicirt dann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.

Beisp. 3. $$^{14}/_{15} : {}^{21}/_{25} = \frac{\overset{2}{\cancel{14}} \times \overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{3}{\cancel{15}} \times \underset{3}{\cancel{21}}} = {}^{10}/_9 = 1^1/_9$$

Beisp. 4. $4^4/_7 : 2^2/_{11}$

$$\frac{32}{7} : \frac{24}{11} = \frac{\overset{4}{\cancel{32}} \times 11}{7 \times \underset{3}{\cancel{24}}} = \frac{44}{21} = 2^2/_{21}.$$

b. Mit der benannten und angewandten Zahl.

Aufg. 1. Wie oft sind $3^3/_8$ lt in $197^3/_4$ lt enthalten?

Antwort: So oft, als $3^3/_8$ in $197^3/_4$ enthalten ist.

Ausrechnung.

a. $3\frac{3}{8}$ | $197\frac{3}{4}$

27	791	
4	8	
	2	
27	1582	$58\frac{16}{27}$

b. $197\frac{3}{4} : 3\frac{3}{8}$

$$\frac{791}{4} : \frac{27}{8} = \frac{791}{4} \times \frac{\overset{2}{8}}{27} = \frac{1582}{27}$$

$$= 58\frac{16}{27}\text{mal.}$$

Aufg. 2. Ein Oekonom rechnet für das Hektar $\frac{9}{10}$ Hektoliter Samengetreid. Wie viele Hektar kann er demnach mit $25\frac{3}{4}$ Hl besäen?

Aufl. Wenn man mit $\frac{9}{10}$ Hl 1 Hektar besäen kann, so kann man mit $25\frac{3}{4}$Hl so vielmal 1 Hektar besäen, als $\frac{9}{10}$Hl in $25\frac{3}{4}$Hl enthalten sind.

Ausr. $25\frac{3}{4} : \frac{9}{10}$

$$\frac{103}{4} : \frac{9}{10} = \frac{103 \times 10}{4 \times 9} = \frac{1030}{36} = 28\frac{11}{18} \text{ Hektar.}$$

B. Theilen.

§. 196. Verfahren.

a. Der Dividend eine reine Zahl.

Beisp. 1. Suche von $\frac{2}{3}$ a. die Hälfte! b. den 3. Theil!

a. Die Hälfte von $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. b. Der dritte Theil von $\frac{2}{3}$ ist nicht $\frac{1}{3}$; ich nehme mir daher von jedem der beiden Drittel den dritten Theil. $\frac{1}{3}$ in 3 gleiche Theile getheilt $= \frac{3}{9}$; also ist der dritte Theil von $\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, und der dritte Theil von $\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

Beisp. 2. Suche von $\frac{8}{9}$ die Hälfte! den 4. Theil!

Beisp. 3. Wie suchst du den dritten Theil von $\frac{8}{9}$?

a. $\frac{8}{9} = \frac{6}{9} + \frac{2}{9}$; der 3. Theil von $\frac{6}{9} = \frac{2}{9}$; der 3. Theil von $\frac{1}{9} = \frac{1}{27}$, und der 3. Theil von $\frac{2}{9} = \frac{2}{27}$; also ist der 3. Theil von $\frac{8}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27} + \frac{2}{27} = \frac{8}{27}$.

b. Der 3. Theil von $\frac{1}{9} = \frac{1}{27}$; der 3. Theil von $\frac{8}{9} = \frac{8}{27}$. Welche Weise ist die bessere?

Darum machen wir es uns zur Regel: **Wenn der Theiler in dem Zähler des Bruches nicht aufgeht, so nehmen wir den verlangten Theil von jedem einzelnen der gegebenen Theile.**

Beisp. 4. Wie viel beträgt der 14. Theil von $\frac{7}{8}$?

a. Der 14. Theil von $\frac{1}{8} = \frac{1}{112}$, von $\frac{7}{8} = \frac{7}{112} = \frac{1}{16}$.

b. $14 = 7 \times 2$; der 7. Theil von $\frac{7}{8} = \frac{1}{8}$, und der halbe Theil von $\frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

Ist der Divisor eine Produktzahl, so zerlegt man ihn (wo möglich) in solche Faktoren, deren einer in dem Zähler des Bruches aufgeht.

Beisp. 5. Wie viel beträgt der 5. Theil von $3\frac{3}{4}$?

Ausr. a. Der 5. Theil von $3 = \frac{3}{5}$, von $\frac{3}{4} = \frac{3}{20}$; $\frac{3}{5} + \frac{3}{20} = \frac{12}{20} + \frac{3}{20} = \frac{15}{20}$ oder $\frac{3}{4}$.

Ausr. b. Der 5. Theil von $3 + {}^3/_4$ ist kein Ganzes. Ich verwandle daher $3^3/_4$ in lauter 4tel. $3^3/_4 = {}^{15}/_4$. Der 5. Theil von ${}^{15}/_4 = {}^3/_4$. Also ist der 5. Theil von $3^3/_4 = {}^3/_4$.

Beisp. 6. $27^3/_5$ durch 8 getheilt, wie viel?

Aufl. Auf den 8. Theil von $27^3/_5$ kommen Ganze. Diese ziehe ich zuerst heraus. $27^3/_5 = 24 + 3^3/_5$. Der 8. Theil von $24 = 3$. $3^3/_5 = {}^{18}/_5$; der 8. Theil von ${}^{18}/_5 = {}^{18}/_{40}$ oder ${}^9/_{20}$. Also ist $27^3/_5$ durch 8 getheilt $= 3^9/_{20}$.

Oder: $27^3/_5 = {}^{138}/_5$; der 8te Theil von ${}^1/_5 = {}^1/_{40}$, von ${}^{138}/_5 = {}^{138}/_{40} = {}^{120}/_{40} + {}^{18}/_{40} = 3^9/_{20}$.

Schriftlich.

Beisp. 1. Wie viel beträgt ${}^1/_4$ von ${}^5/_6$?

Ausrechnung.

4	5
6	6
24	$5 = {}^5/_{24}$

Wenn sich 4 Personen in ${}^5/_6$ fl. zu theilen haben, so beträgt 1 Theil eben so viel, als wenn sich 2×4 Pers. in $2 \times {}^5/_6$ fl., 3×4 Pers. in $3 \times {}^5/_6$ fl., 6×4 Pers. in $6 \times {}^5/_6$ fl. zu theilen haben. Also ist der 4. Theil von ${}^5/_6$ = dem 6×4 oder 24. Theil von $6 \times {}^5/_6$ oder 5; der 24. Theil von $5 = {}^5/_{24}$.

Beisp. 2. Wie groß ist der 12. Theil von $357^5/_6$?

a.

12	$357^5/_6$	
6	6	
72	2147	$29^{59}/_{72}$
	144	
	707	
	648	
	59	

b.

12	$357^5/_6$	29
	24	
	117	
	108	
12	$9^5/_6$	
6	6	
72	59	${}^{59}/_{72}$

Die mit a. bezeichnete Ausrechnung ist an sich klar. Bei b wurde der 12. Theil zuerst von der ganzen Zahl und hernach von dem Reste gesucht. Der 12. Theil von $357 = 29$, Rest 9; hiezu die ${}^5/_6$, gibt $9^5/_6 = {}^{59}/_6$; der 12. Theil von ${}^{59}/_6$ = dem 72. Theil von 59 Ganzen $= {}^{59}/_{72}$.

b. Der Dividend eine benannte Zahl.

Beispiel. Suche ${}^1/_8$ von $724^4/_5$ Pfd.!

Ausrechnung.

8	$724^4/_5$ Pfd.	
5	5	
40	3624 Pfd.	90 Pfd.
	360	
	24	
	50	
40	1200Dgr	30Dgr
	120	
	0	

c. Die angewandte Zahl.

Beispiel. 13 Meter Tuch kosten $87\frac{1}{10}$ Mark; wie viel kostet 1 Meter?

Ausr.	13	$87\frac{1}{10}$ M.	
	10		
	130	871 M.	6 Mark
		780	
	130	9100 Pfg.	70 Pfg.
		91	
		0	

G. Resolviren und Reduciren.

§. 197. Resolviren.

a. Der Nenner des Bruches geht in der Reduktionszahl auf.

Es werden Halbe, 4tel, 5tel, 10tel, 20stel, 25stel, 50stel, 100tel-Mark in Pfennige, -Meter in Centimeter, -Ar in □Meter, -Hektar in Ar, -Hektoliter in Liter, -Kilogramm in Dekagramm, -Centner in Pfund, dann Halbe, 3tel, 4tel, 5tel, 6tel, 10tel, 12tel Gulden in Kreuzer aufgelöst. Z. B.

1 Mark = 100 Pfg. Also ist $\frac{1}{2}$ Mark = $\frac{1}{2}$ von 100 Pfg. = 50 Pfg.; $\frac{1}{4}$ Mark = $\frac{1}{4}$ von 100 Pfg. = 25 Pfg.; $\frac{3}{4}$ Mark = 3×25 Pfg. = 75 Pfg. u. s. w.

b. Der Nenner des Bruches geht in der Reduktionszahl nicht auf.

$\frac{7}{8}$ Mark =? Pfennige.

a. 1 Mark = 100 Pfg.; $\frac{1}{8}$ Mark = $\frac{1}{8}$ von 100 Pfg. = $12\frac{1}{2}$ Pfg.; $\frac{7}{8}$ Mark = $7 \times 12\frac{1}{2}$ Pfg. = $87\frac{1}{2}$ Pfg.

b. 1 Mark = 100 Pfg.; $\frac{7}{8}$ Mark = $\frac{7}{8} \times 100$ Pfg., also 7×100 Pfg. getheilt durch 8; 7×100 Pfg. = 700 Pfg.; $\frac{1}{8}$ von 700 Pfg. = $87\frac{1}{2}$ Pfg.

Eben so schriftlich.

$$\frac{7}{8}\text{ Mark} = \frac{7}{8} \times 100\text{ Pfg.} = \frac{7 \times 100\text{ Pfg.}}{8} = \frac{700}{8}\text{ Pfg.} = 87\frac{1}{2}\text{ Pfg.}$$

§. 198. Reduciren.

Aufg. 1. 75 Pfennige, wie viele Mark?

Aufl. 100 Pfg. = 1 Mark; 1 Pfg. = $\frac{1}{100}$ Mark, 75 Pfg. = $\frac{75}{100}$ = $\frac{3}{4}$ Mark.

In dieser Weise werden innerhalb des Zahlenkreises von 1 bis 100 Pfennige auf Mark, Centimeter auf Meter, Ar auf Hektar, Liter auf Hektoliter, Dekagramm auf Kilogramm, Pfund auf Centner, die Kreuzer von 1 bis 60 auf Gulden, die Monate von 1 bis 12 auf Jahre theils mündlich, theils schriftlich zurückgeführt.

Aufg. 2. $7\frac{4}{5}$ Monate, wie viele Jahre?

Aufl. 12 Monate = 1 Jahr. Monate werden daher in Jahren ausgedrückt, indem man sie durch 12 dividirt.

Ausr.

12	$7^4/_5$
5	
16	39 = $^{39}/_{60}$ = $^{13}/_{20}$ Jahre.

§. 199. Die Rechnungsarten mit mehrfach benannten Zahlen.

Aufg. 1. Von 18 Ctr. $42^1/_2$ Pfd. + 36 Ctr. $87^3/_4$ Pfd. + 27 Ctr. $47^4/_5$ Pfd. sind 48 Ctr. $96^7/_{10}$ Pfd. abzuziehen.

Ausrechnung.

a.

Ctr.	Pfd.	20
18	$42^1/_2$	10
36	$87^3/_4$	15
27	$47^4/_5$	16
82	$78^1/_{20}$	$^{41}/_{20}$ = $2^1/_{20}$. ($^7/_{20}$ Pfd. = $^7/_{20}$ × 50Dgr = 17Dgr 5 gr.)

b.

Ctr.	Pfd.	20
82	78.$^1/_{20}$	21
— 48	$96^7/_{10}$	14
33	$81^7/_{20}$	7

Aufgabe 2. 8 Hektar $25^3/_4$ Ar + 12 Hektar 84 Ar 70 □ Mtr. + 9 Hektar $45^4/_5$ Ar — 15 Hektar 88 Ar 55 □Mtr. =?

Ausrechnung mit Anwendung der Reduktion.

a.

Hektar	Ar	20
8	$25^3/_4$	15
12	$84^7/_{10}$	14
9	$45^4/_5$	16
1	2	
30	$56^1/_4$	$^{45}/_{20}$ = $2^1/_4$.

b.

Hektar	Ar	20
3.0.	5.6.$^1/_4$	5
— 1 5	8 8 $^{11}/_{20}$	11
1 4	6 7 $^7/_{10}$	$^{14}/_{20}$ = $^7/_{10}$.

Ausrechnung mit Anwendung der Resolution.

a.

Hektar	Ar	□^{m}
8	25	75
12	84	70
9	45	80
1	2	
30	56	25

b.

Hektar	Ar	□^{m}
3.0.	5.6.	25
— 1 5	8 8	55
1 4	6 7	70

Aufg. 3. A kauft ein Stück Vieh, füttert dasselbe eine Zeit lang, was er auf $42^4/_5$ Mark berechnet, und verkauft es dann mit einem reinen Gewinn von $36^3/_4$ Mark um $185^1/_2$ Mark. Wie hat er es eingekauft?

Aufl. Was soll berechnet werden? Wie viel mußte er mehr lösen, um nur keinen Verlust zu haben? (Das Futtergeld von $42^4/_5$ Mark.) Wie viel, um noch $36^3/_4$ Mark zu gewinnen? ($42^4/_5$ Mark + $36^3/_4$ Mark.) Wie hat er das Stück verkauft? (Um $185^1/_2$ Mark.) Wie also eingekauft? (Um $185^1/_2$ Mark — $36^3/_4$ Mark — $42^4/_5$ Mark.)

Ich ziehe also von $185^1/_2$ Mark ab $36^3/_4$ Mark und vom Reste wieder $42^4/_5$ Mark. Oder ich zähle $42^4/_5$ Mark und $36^3/_4$ Mark zusammen und ziehe die Summe von $185^1/_2$ Mark ab.

Aufg. 4. B, dessen Baarschaft $15^2/_{15}$ fl. beträgt, bekommt von

seinem Pathen ein Geldstück und kauft sich dann einen Reißzeug für $5\frac{4}{5}$ fl. Nachdem er dieß bezahlt hat, besitzt er noch $14\frac{5}{6}$ fl. Was für ein Geldstück erhielt er geschenkt?

Aufl. Wie viel Geld hatte B, bevor er den Reißzeug bezahlte? ($14\frac{5}{6}$ fl. + $5\frac{4}{5}$ fl.) Wie viel besaß er, ehe ihm sein Pathe ein Geldstück schenkte? ($15\frac{2}{15}$ fl.) Wie viel muß daher das geschenkte Geldstück betragen haben? ($14\frac{5}{6}$ fl. + $5\frac{4}{5}$ — $15\frac{2}{15}$ fl.)

Suche eine andere Lösung dieser Aufgabe!

Aufgabe 5. $8\frac{3}{4} \times 24$ Mark 30 Pfg. = ?

Ausrechnung.

24 Mark 30 Pfg. = 2430 Pfg. = $24\frac{3}{10}$ Mark.

a.

$8\frac{3}{4} \times 2430$ Pfg. =

$\frac{35}{4} \times 2430$ Pfg. $= \frac{35 \times 2430 \text{ Pfg.}}{4 \times 1}$

b.

$8\frac{3}{4} \times 24\frac{3}{10}$ Mark =

$\frac{35 \times 243}{4 \times 10}$ Mark.

Resultat 212 Mark 62,5 Pfg.

Aufgabe 6. $10\frac{1}{2} \times 8$ Rs. $12\frac{3}{4}$ Bch. = ?

Auflösung.

8 Rs. $12\frac{3}{4}$ Bch. = $172\frac{3}{4}$ Bch.

$10\frac{1}{2} \times 172\frac{3}{4}$ Bch. =

$\frac{21 \times 691}{2 \times 4}$ Bch. =

90 Rs. 12 Bch. 21 Bg.

Aufgabe 7. Wie oft sind 3 Mon. 20 Tg. in 4 J. $8\frac{4}{5}$ Mon. enthalten?

Auflösung.

3 Mon. 20 Tg. = $3\frac{2}{3}$ Mon. und 3 J. $8\frac{4}{5}$ M. = $56\frac{4}{5}$ M.

a.

$3\frac{2}{3}$	$56\frac{4}{5}$
11	284
5	3
55	852 = $15\frac{27}{55}$.

b.

$56\frac{4}{5} : 3\frac{2}{3} =$

$\frac{284 \times 3}{5 \times 11} = \frac{852}{55}$

Aufgabe 8. Wie viel ist $\frac{1}{5}$ von 8 Ctr. $78\frac{1}{4}$ Pfd.?

Ausrechnung.

8 Ctr. $78\frac{1}{4}$ Pfd. = $878\frac{1}{4}$ Pfd.

5	$878\frac{1}{4}$ Pfd.	
4	4	
20	3513 Pfd.	175 Pfd.
	20	
	151	
	140	
	113	
	100	
	13	
	50	
20	650 Dgr	32 Dgr 5 gr.

§. 200 a. Schlußrechnung.

Aufg. 1. $^1/_{10}$ Ctr. zu 3 Mark 90 Pfg.; wie hoch kommen $^9/_{10}$ Ctr.

Mündlich. $^9/_{10}$ Ctr. $= 9 \times {}^1/_{10}$ Ctr.; daher kosten $^9/_{10}$ Ctr. auch 9×3 Mark 90 Pfg. $= 9 \times 4$ M. $- 9 \times 10$ Pfg. $=$ 35 M. 10 Pfg.

Schriftlich. $9 \times 3^9/_{10}$ Mark $=$

$$\frac{9 \times 39}{1 \times 10} = \frac{351}{10} = 35^1/_{10} \text{ Mark} = 35 \text{ M. } 10 \text{ Pfg.}$$

Aufg. 2. In 1 Stunde ergießen sich aus einer Röhre $15^3/_{10}$Hl Wasser; wie viel in $^1/_{12}$ Stunde?

Mündlich. Wenn in 1 Stunde $15^3/_{10}$ Hl aus der Röhre fließen, so fließt in $^1/_{12}$ Std. der 12. Theil von $15^3/_{10}$ Hltr. aus derselben. $12 = 3 \times 4$. Der 3. Theil von $15^3/_{10}$ Hl $= 5^1/_{10}$ Hl, und der 4. Theil von $5^1/_{10}$ Hl $= 1^1/_4 + {}^1/_{40}$ Hl $=$ 1 Hl 25 $+$ $2^1/_2$ lt $=$ 1 lt $27^1/_2$ lt.

Schriftlich.

12	$15^3/_{10}$ Hl	
10		
120	153	1 Hl
	120	
120	3300	$27^1/_2$ lt.

Aufg. 3. $^1/_2$ Hektar Wiese wurde um 560 Mark verkauft, welchen Werth haben hiernach $3^1/_2$ Hektar?

Aufl. 3. $^1/_2$ Hektar kostet 560 Mark; $^2/_2$ Hektar kosten 2mal so viel, $^3/_2$ Hektar 3mal so viel ꝛc. Wie vielmal so viel als $^1/_2$ Hektar werden nun aber $3^1/_2$ Hektar kosten? Was muß ich mit $3^1/_2$ Hektar thun, um das zu erkennen? (Ich muß $3^1/_2$ Hektar in lauter Halbe verwandeln.) $3^1/_2$ H. $= {}^7/_2$ Hektar $= 7 \times {}^1/_2$ Hektar. Wenn also $^1/_2$ Hektar 560 Mark kostet, so kosten $3^1/_2$ oder $^7/_2$ Hektar 7×560 Mark $=$ 3920 Mark.

Aufg. 4. $6^1/_4$ Kgr zu 7 Mark 50 Pfg.; was kostet $^1/_4$ Kgr?

Aufl. Der wievielte Theil von $6^1/_4$ Kgr ist $^1/_4$ Kgr? Um das zu erkennen, so mache ich die $6^1/_4$ Kgr zu Viertel-Kgr; $6^1/_4 = {}^{25}/_4$; $^1/_4$ ist hievon der 25. Theil. Wenn also $6^1/_4$ oder $^{25}/_4$ Kgr 7 Mark 50 Pfg. kosten, so kostet $^1/_4$ Kgr den 25. Theil von 7 Mark 50 Pfg.; der 25. Theil von 7 Mark 50 Pfg. $=$ 30 Pfg.

Aufg. 5. $^3/_4$ Liter zu 54 Pfg.; was kosten $11^1/_4$ Liter?

Aufl. $11^1/_4$ lt $= {}^{45}/_4$ lt $= 15 \times {}^3/_4$ lt; also kosten $11^1/_4$ lt 15×54 Pfg. $=$ 810 Pfg. $=$ 8 Mark 10 Pfg.

Aufg. 6. $5^1/_{10}$ Mtr. Tuch zu 18 Mark 70 Pfg.; was kosten $^3/_{10}$ Mtr.

Aufl. $5^1/_{10} = {}^{51}/_{10} = 17 \times {}^3/_{10}$. Also sind $^3/_{10}$ Mtr. $^1/_{17}$ von $5^1/_{10}$ Mtr. und kosten daher auch $^1/_{17}$ von 18 Mark 70 Pfg.; $^1/_{17}$ von 18 Mark $=$ 1 Mark, Rest 1 Mark; 1 Mark $+$ 70 Pfg.

= 170 Pfg.: $^1/_{17}$ von 170 Pfg. = 10 Pfg. Also kosten $^3/_{10}$ Mtr. 1 Mark 10 Pfg.

Aufg. 7. In 3 Tg. verdient A $5^1/_4$ Mark; wie viel in 8 Tg.?

Aufl. Ich suche zuerst, wie viel A in 1 Tag verdient, und dann, wie viel in 8 Tagen?

Ausrechnung.

Mündlich. Wenn A in 3 Tg. $5^1/_4$ Mark verdient, so verdient er in 1 Tag den 3. Theil von $5^1/_4$ Mark. $5^1/_4 = 3 + 2^1/_4$. Der 3. Theil von 3 Mark = 1 Mark, und der 3. Theil von $2^1/_4$ oder $^9/_4$ Mark = $^3/_4$ Mark. Also verdient A in 1 Tag $1^3/_4$ Mark. In 8 Tg. verdient er 8mal so viel, nämlich $8 \times 1^3/_4$ Mark = 14 Mark.

Schriftl. In 3 Tg. = $5^1/_4$ Mark.

$$1 \text{ Tg.} = {}^1/_3 \times 5^1/_4 \text{ M.} = \frac{1 \times \overset{7}{\cancel{21}}}{\cancel{3} \times 4} = {}^7/_4 \text{ Mark.}$$

$$8 \text{ Tg.} = 8 \times {}^7/_4 \text{ M.} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}} \times 7}{\cancel{4}} = 14 \text{ Mark.}$$

Aufg. 8. Mit $^3/_8$ Ctr. Mehl reicht eine Hausfrau 2 Mon. 18 Tg., wie lange hiernach mit $^5/_8$ Ctr.?

Mündlich. Ich gehe von $^3/_8$ Ctr. auf $^1/_8$ Ctr. und von $^1/_8$ Ctr. auf $^5/_8$ Ctr. Wenn $^3/_8$ Ctr. Mehl auf 2 Mon. 18 Tg. ausreichen, so reicht $^1/_8$ Ctr. den 3. Theil so lange. Der 3. Theil von 1 Mon. = 10 Tg., von 2 Mon. = 2 × 10 oder 20 Tg., und von 18. Tg. = 6 Tg.; 20 + 6 = 26; $^1/_8$ Ctr. reicht also auf 26 Tage; mithin reichen $^5/_8$ oder $5 \times {}^1/_8$ Ctr. 5mal so lange, nämlich 5 × 26 oder 130 Tg. = 4 Mon. 10 Tage.

Schriftlich. $^3/_8$ Ctr. = 78 Tg.
$^1/_8$ Ctr. = $^1/_3 \times 78$ Tg. = $^{78}/_3$ = 26 Tg.
$^5/_8$ Ctr. = 5 × 26 Tg. = 130 Tg. = 4 M. 10 Tg.

Die Operationen werden auch bei dem schriftlichen Rechnen so viel als möglich frei im Kopfe vollzogen. Natürlich ist dabei auf die Befähigung der Schüler Rücksicht zu nehmen. Was der begabte Schüler noch im Kopfe ausführt, das bringt der gering befähigte nur mit dem Stifte in der Hand zu Stande.

§. 200b. Fragen und Aufgaben für Präparanden.

1) Was versteht man unter einem Bruche? 2) Auf welche zweifache Weise kann der Bruch $^9/_{16}$ entstehen? 3) Warum sind zur Bezeichnung eines Bruches zwei Zahlen erforderlich? 4) Was ist mehr: $^7/_{11}$ oder $^7/_{12}$ und warum? 5) Warum ist der Bruch $^8/_{13}$ größer, als $^7/_{12}$? 6) Was sind echte Brüche und was unechte? 7) Wie viel echte Brüche gibt es, deren Nenner 43 ist? 8) Wie heißen die 3 unechten Brüche, welche 8 Ganze und 4 Theile enthalten, und deren Nenner 5, 7, 13 heißen? 9) Worin besteht das Erweitern und das Kürzen oder Heben der Brüche? 10) Warum wäre es unrichtig, dasselbe durch die Ausdrücke „Vergrößern und Verkleinern" zu bezeichnen? 11) Drücke den Bruch $^7/_8$ auf zehnfache Weise aus! 12) Mache

an einer Linie anschaulich, daß $^3/_4 = ^9/_{12}$! Eben so, daß $^{12}/_{16} = ^3/_4$! 13) Verwandle $^{18}/_{23}$ in 161stel! 14) Wie viel Hebezahlen hat der Bruch $^{72}/_{96}$? 15) Wie heißt das größte gemeinschaftliche Maß von 87 und 203? 16) Welches ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 14, 18, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 35 und 36? 17) Welche Zahl ist um $^4/_5$ größer, als die Summe von $^2/_3$ und $^5/_7$? 18) Suche den Unterschied von $1050^{17}/_{21}$ und $864^{53}/_{56}$! 19) Welche Zahl wurde um $42^{13}/_{15}$ vermindert, wenn $37^{17}/_{40}$ übrig blieb? 20) Wie viel hat man zu $48^5/_8$ gelegt, wenn $75^2/_9$ herauskommt? 21) Von welcher Zahl sind $5^9/_{11}$, $8^7/_{10}$ und $6^3/_4$ die drei ungleichen Theile? 22) Wie groß ist der Unterschied zwischen der Summe und Differenz der Brüche $^7/_{12}$ und $^9/_{13}$? 23) Die Zahl $25^{13}/_{20}$ ist um $8^7/_{16}$ kleiner und um $12^{11}/_{15}$ größer, als welche zwei Zahlen? 24) Welche Zahl ist um 127 kleiner, als ihre Hälfte, ihr 4tel, ihr 6tel und ihr 8tel zusammengenommen? 25) Multiplicire $9^{11}/_{15}$ mit $8^5/_6$ auf zweierlei Weise! 26) Dividire a. $^{27}/_{28}$ durch 5, b. 25 durch $^7/_8$, c. $18^3/_7$ durch $2^3/_4$ in dem Sinne, wie es die gegebenen Zahlen gestatten! 27) Von welcher Zahl ist der Bruch $^8/_{11}$ der 18. Theil? 28) $57^5/_6$ ist 14mal so groß, als welche Zahl? 29) Wie viel betragen $^8/_9$ von $30^3/_4$? 30) Um wie viel verrechnet sich der, der vorstehende Aufgabe als eine Subtractionsaufgabe betrachtet? 31) Von welcher Zahl ist $53^5/_7$ das 9fache? 32) Die Zahl $14^2/_3$ ist in welcher andern $7^3/_8$mal enthalten? 33) Welche Zahl liegt $8^1/_5$mal in $104^1/_2$? 34) Wie groß ist der Unterschied zwischen der Summe und dem Produkte von $23^1/_4$ und $16^9/_{10}$? 35) Wie heißt die Zahl, wovon $^7/_8 = 35$? 36) $^7/_{10} \times x = ^3/_4$; wie heißt die durch x bezeichnete Zahl? 37) Was ist mehr: $^9/_{10} + ^{11}/_{15}$, oder $^9/_{10} \times ^{11}/_{15}$, und wie groß ist die Differenz? 38) $2^1/_3 \times 8$ ist eben so viel, als $^1/_{16}$ von welcher Zahl? 39) Wovon ist $21^1/_2$ das $4^3/_5$fache?

40) Drei Personen theilen eine Geldsumme so, das A $^4/_7$, B $^3/_8$ und C die noch übrigen 81 Mrk. erhält; wie groß war die Summe? 41) A gibt an B $^1/_6$ seiner Baarschaft; dieser will aber nur $^1/_8$ derselben haben und gibt daher 3 Mark wieder zurück; wie viel behält er? 42) Von zwei Röhren, welche in einen Brunnentrog gehen, füllt die eine denselben in 9, die andere in 12 Stunden; in welcher Zeit füllen beide zusammen den Trog? 43) In wie viel Stunden wird dieser Trog gefüllt werden, wenn derselbe eine stets offene Abflußröhre hat, die ihn in 6 Stunden leert? 44) A sagte: Wenn ich 2mal so viel Geld hätte, als ich habe, und noch $^1/_2$mal, $^1/_3$mal und $^1/_4$mal so viel, so würden mir nur noch 2 fl. an 150 fl. fehlen. Wie viel Geld hatte er? 45) $^5/_8$ Zehnmarkstück, wie viel Gulden und Kreuzer? (1 Stück $= 5^5/_6$ fl.; $^5/_8$ St. $= ^5/_8 \times 5^5/_6 = ^5/_6 \times ^{35}/_6 = ^{175}/_{48}$ fl. $= 175$ fl., getheilt durch $48 = 3$ fl. $38^3/_4$ kr.) 46) Wie viel Mark und Pfg. sind a. $^{13}/_{15}$ Dukaten à 9 Mark 60 Pfg.? b. $^{23}/_{25}$ Vereinsthaler à 3 Mark? c. $^{65}/_{72}$ Friedrichsd'or à 16 Mark 96 Pfg.? 47) $33^1/_4$ Kreuzer sind welcher Theil einer Mark? 48) Welche Theile von einem Ctr. bilden 42 Pfd. 20 Dgr? 49) A verkauft in $3^1/_2$ auf einander folgenden Monaten 8 Ctr. $44^1/_2$ Pfd., 11 Ctr. $73^2/_5$ Pfd., 7 Ctr. $24^3/_4$ Pfd. und 3 Ctr. $87^1/_8$ Pfd. Kaffee; wie viel beträgt im Durchschnitt sein

monatlicher Absatz? 50) Rechne $8\frac{7}{8} \times 3$ Hl $54\frac{3}{4}$ lt auf 4fache Weise! 51) Verkauft Jemand eine Partie Tuch zu $3\frac{4}{5}$ Mark per Meter, so gewinnt er im Ganzen $13\frac{1}{8}$ Mark; verkauft er sie zu $3\frac{1}{2}$ Mark per Meter, so verliert er $6\frac{3}{8}$ Mark; wie viel Meter sind es? 52) A gibt $\frac{5}{12}$ seines Geldes und B $\frac{3}{4}$ des seinigen an C; wie groß ist eines jeden Baarschaft, wenn beide gleichviel an C gaben und dieser zusammen 100 fl. erhielt?

53) $47\frac{29}{68}+28\frac{41}{153}-36\frac{19}{34}$. 54) $57\frac{17}{57}-49\frac{23}{76}+23\frac{5}{6}$.

55) $25\frac{37}{44}-38\frac{27}{55}+16\frac{17}{20}$. 56) $84\frac{23}{48}-37\frac{29}{36}-28\frac{27}{32}$.

57) $38\frac{5}{9}+21\frac{3}{4}-18\frac{7}{12}-27\frac{8}{15}$. 58) $23\frac{4}{7} \cdot 36 : 39\frac{3}{8}$.

59) $8\frac{8}{35} \cdot 2\frac{2}{27} : 36$. 60) $21\frac{7}{9} \cdot 9\frac{3}{5} : 3\frac{23}{35}$.

61) $\dfrac{35\frac{1}{10}}{11\frac{13}{16}}$ 62) $\dfrac{13\frac{7}{13} \cdot 14\frac{4}{9}}{29\frac{13}{15}}$ 63) $\dfrac{109\frac{3}{5}}{11\frac{2}{3} : 3\frac{3}{4}}$

64) $\dfrac{5\frac{1}{2} \cdot 7\frac{1}{7} \cdot 4\frac{8}{9} \cdot 4\frac{1}{6}}{9\frac{1}{3} \cdot 6\frac{7}{8} \cdot 3\frac{1}{11}}$ 65) $\dfrac{10\frac{2}{7} \cdot 4\frac{1}{4} \cdot 9\frac{1}{3} \cdot 5\frac{5}{6}}{5\frac{3}{5} \cdot 6\frac{7}{8} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 3\frac{3}{11}}$

66) $\dfrac{(5\frac{3}{4} \cdot 8\frac{1}{2})\ 19\frac{2}{3}}{7\frac{1}{6} : 3\frac{2}{5}}$ 67) $\dfrac{37\frac{1}{3} : (1\frac{9}{16} \cdot 14)}{(50\frac{2}{7} : 1\frac{13}{16}) : 8}$

68) $(8\frac{2}{3}-5\frac{5}{9}+2\frac{7}{9} : 1\frac{17}{18}) \cdot (4\frac{3}{4}+1\frac{5}{8} \cdot 3\frac{1}{3}-9\frac{7}{8})+2\frac{73}{108}$.

69) $(33\frac{3}{4} : 40\frac{1}{2}+\frac{2}{7}) : (3\frac{1}{15} : 7\frac{2}{3}-\frac{11}{28} : 2\frac{3}{4})+95\frac{35}{54}$.

70) $(2\frac{4}{7}+151\frac{7}{8} : 20\frac{1}{4}) : (2\frac{26}{35} \cdot 1\frac{5}{16}-3\frac{15}{28} : 2\frac{3}{4})+9\frac{1}{6} : 3\frac{6}{13}$.

71) $(34\frac{2}{9} : 5\frac{5}{6}-7\frac{2}{9}+3\frac{6}{35}) \cdot (1\frac{7}{8}+3\frac{3}{20} : 1\frac{11}{25}+1\frac{1}{24})-\frac{35}{108}$.

72) $(8\frac{17}{24}+10\frac{1}{4}-15\frac{8}{27} : 1\frac{13}{15}) : (8-1\frac{7}{16}-1\frac{7}{8} \cdot 1\frac{5}{9})+17\frac{1}{21}$.

73) $(1\frac{1}{27} \cdot 7\frac{1}{14}-4\frac{1}{8}) : (54\frac{1}{6} : 6\frac{4}{21}-3\frac{1}{9} \cdot 2\frac{7}{10})+61\frac{1}{9} : 10\frac{10}{21}$.

74) $(19\frac{5}{12}+11\frac{1}{4} \cdot 1\frac{11}{15}-17\frac{7}{18}) : (14-6\frac{7}{18} : 1\frac{2}{3}-2\frac{7}{8})-1\frac{20}{21}$.

75) $(48\frac{5}{7}-12\frac{1}{14} \cdot 1\frac{11}{52}-30\frac{3}{4}) : (33\frac{2}{5}-7\frac{13}{14} \cdot 3\frac{8}{9})+13\frac{3}{14} : 7\frac{7}{9}$.

Die Ergebnisse zu den Aufgaben Nr. 53 bis 75.

53) $39\frac{83}{612}$	58) $21\frac{27}{49}$	63) $35\frac{8}{35}$
54) $31\frac{189}{228}$	59) $\frac{64}{135}$	64) $4\frac{262}{7497}$
55) $4\frac{1}{5}$	60) $57\frac{1}{6}$	65) $5\frac{1}{3}$
56) $17\frac{239}{288}$	61) $2\frac{34}{35}$	66) $6\frac{67}{215}$
57) $14\frac{17}{90}$	62) $6\frac{23}{42}$	67) $\frac{406}{825}$

68) 4.	70) 7.	72) 20.	74) 1.
69) 100.	71) 1.	73) 15.	75) 3.

Fünfter Cursus.

Die Decimalbrüche.

Begriff, Lesen und Schreiben der Decimalbrüche.

§. 201. Begriff.

Der Lehrer schreibt an die Wandtafel die Ziffer 1. Was gilt dieselbe? (1 Einer.) Dann setzt er an deren Seite gegen die linke Hand eine zweite 1. Was gilt diese? (1 Zehner.) Vergleicht den Werth der 1 in der zweiten Stelle mit dem Werthe der 1 in der ersten Stelle! (Die 1 in der ersten Stelle gilt 1 Einer; die 1 in der zweiten Stelle gilt 1 Zehner; 1 Zehner ist 10mal so viel, als 1 Einer; also gilt die 1 in der zweiten Stelle 10mal so viel als die 1 in der ersten Stelle). — Hierauf kommt wieder eine 1 in die dritte Stelle. Was gilt diese? (1 Hunderter.) Vergleicht nun auch den Werth der Ziffer 1 in der dritten Stelle mit dem Werthe der 1 in der zweiten Stelle! (Die 1 in der zweiten Stelle gilt 1 Zehner; die 1 in der dritten Stelle gilt 1 Hunderter; 1 H. ist 10mal so groß, als 1 Z.; also gilt die 1 in der dritten Stelle 10mal so viel, als die 1 in der zweiten Stelle.) So fort, bis steht:

1 1 1 1 1 1 1

Hindeutend: Die 1 in der 2. Stelle gilt zehnmal so viel als die 1 in der ersten; die 1 in der 3. Stelle gilt 10mal so viel als die 1 in der zweiten u. s. w.

Jede Eins um eine Stelle weiter links gilt also zehnmal so viel als die zu ihrer Rechten.

Nun machen wir denselben Weg auch rückwärts. Vergleicht einmal den Werth der 1 in der sechsten Stelle mit dem Werthe der 1 in der siebenten Stelle! (Die 1 in der 7. Stelle gilt eine Million; die 1 in der 6. Stelle gilt 1 Hunderttausender; 1 Ht. ist $^1/_{10}$ von 1 Million; also gilt die 1 in der 6. Stelle nur $^1/_{10}$ dessen, was die 1 in der 7. Stelle gilt.) — Vergleiche die Werthe der 1 in der 6. und 5. Stelle miteinander! (Die 1 in der 6. Stelle gibt 1 Ht.; die 1 in der

5. Stelle gilt ein Zehntausender; 1 Zt. ist $^1/_{10}$ von 1 Ht.; also gilt die 1 in der 5. Stelle wieder nur $^1/_{10}$ dessen, was die 1 in der 6. Stelle gilt.) u. s. w.

Die Ziffer 1 gilt also in der 6. Stelle $^1/_{10}$ dessen, was sie in der 7. gilt, in der 5. Stelle $^1/_{10}$ dessen, was sie in der 6. gilt 2c.

Jede 1 um eine Stelle weiter rechts gilt also immer nur den 10. Theil so viel, als ihre Nachbarin zur Linken.

Mithin wird die 1, welche wir nun, (in etwas kleinerer Form) um eine Stelle nach dem Einer setzen,

1 1 1 1 1 1 1 1

wieder nur den 10. Theil von einem Einer, d. i. 1 Zehntel gelten. Eben so wird die 1, die wir um 1 Stelle nach dem Zehntel setzen,

1 1 1 1 1 1 1 1 1

wieder nur den 10. Theil von 1 Zehntel, nämlich 1 Hundertel bedeuten. Und die 1, welche um eine Stelle nach dem Hundertel zu stehen kommt, wie hier,

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

wird wieder $^1/_{10}$ von $^1/_{100}$, d. i. $^1/_{1000}$ bezeichnen.

So fort bis zu Milliontel.

Damit jedoch die Theile nicht leicht für Ganze angesehen werden, so setzen wir zwischen beide als Grenze einen Strich, wie hier:

1 1 1 1 1 1 1,1 1 1 1 1 1

Das Komma trennt die Ganzen und die Theile von einander. Links stehen die Ganzen, rechts die Brüche.

Welche 1 gilt 1 Einer? welche 1 Zehner? welche $^1/_{10}$? welche 1 Hunderter? welche $^1/_{100}$ 2c.

In gleicher Weise werde auch mit den Ziffern 2, 3, 4 2c. verfahren.

a. Sowie man (also) die Zahlenreihe von den Einern an aufwärts (gegen die Linke) bis ins Unendliche fortführen kann; so läßt sich dieselbe von den Einern an auch abwärts (gegen die Rechte) bis ins Unendliche fortsetzen.

b. Gleichwie man den Werth der Ziffern auf der linken Seite des Komma, wo sie Ganze bedeuten, aus ihrer Stelle erkennt; so läßt sich auch der Werth der Ziffern auf der rechten Seite desselben, wo sie Theile bezeichnen, aus ihrer Stelle entnehmen. Eine besondere Bezeichnung ihrer Geltung ist nicht nöthig. Die Ziffer in der ersten Stelle **vor** dem Komma gilt Einer, in der 2. Stelle Zehner u. s. f.; in der ersten Stelle **nach** dem Komma gilt sie 10tel, in der zweiten Stelle 100tel, in der dritten Stelle 1000tel 2c.

c. Zehntel entstehen, wenn man 1 Ganzes in 10 gleiche Theile theilt; 100tel, wenn man $^1/_{10}$ wieder in 10 gleiche Theile zerlegt; 1000tel, wenn man aus $^1/_{100}$ wieder 10 gleiche Theile macht 2c. Deß-

halb nennt man Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000 u. s. f. zehntheilige oder Decimalbrüche, kurz: Decimale.

Fragen: Was gelten die Ziffern in der ersten Decimalstelle? in der 3ten? in der 2ten? ꝛc. — Wo stehen die 100tel? die 10tel? die 1000tel? ꝛc.

§ 202 Das Lesen der Decimalbrüche.

a. Nach den einzelnen Stellen.

1,4 = 1 Ganzes und 4 Zehntel
0,8 = 0 Ganze und 8 Zehntel
29,45 = 29 Ganze, $^4/_{10}$ und $^5/_{100}$
6,543 = 6 Ganze, $^5/_{10}$, $^4/_{100}$ und $^3/_{1000}$.

Die Schüler nehmen das Aufgabenheft (Aufg. z. Zifferr. III Heft) zur Hand und lesen in vorstehender Weise die Decimalbrüche der Additionsaufgaben.

b. Im Zusammenhange.

43

Diese (an die Wandtafel geschriebene) Zahl läßt sich auf zweierlei Weise lesen. a. 43 = 4 Zehner + 3 Einer. b. Ich löse die 4 Zehner in Einer auf und vereinige diese mit den 3 Einern. 4 Z. = 4 × 10 oder 40 E.; 40 E. + 3 E. = 43 Einer. — Eben so läßt sich der Decimalbruch

0,43

auf zweierlei Weise aussprechen. a. 0,43 = 4 Zehntel und 3 Hundertel. b. Ich verwandle die $^4/_{10}$ in 100tel und nehme die $^3/_{100}$ dazu.

$^1/_{10} = {}^{10}/_{100}$; $^4/_{10} = 4 \times 10$ oder $^{40}/_{100}$; $^{40}/_{100} + {}^3/_{100} = {}^{43}/_{100}$

$0{,}43 = {}^4/_{10} + {}^3/_{100} = {}^{43}/_{100}$.

0,738

a. $0{,}783 = {}^7/_{10} + {}^8/_{100} + {}^3/_{1000}$.

b. Ich verwandle die 10tel und 100tel auch in 1000tel.

$^1/_{10} = {}^{10}/_{100}$; $^7/_{10} = 7 \times 10$ oder $^{70}/_{100}$; $^{70}/_{100} + {}^8/_{100} = {}^{78}/_{100}$.

$^1/_{100} = {}^{10}/_{1000}$; $^{78}/_{100} = 78 \times 10$ od. $^{780}/_{1000}$, $+ {}^3/_{1000} = {}^{783}/_{1000}$.

$0{,}783 = {}^7/_{10} + {}^8/_{100} + {}^3/_{1000} = {}^{783}/_{1000}$.

0,65897 = ?

a. $0{,}65897 = {}^6/_{10} + {}^5/_{100} + {}^8/_{1000} + {}^9/_{10000} + {}^7/_{100000}$.

b. Ich verwandle die 10tel, 100tel ꝛc. auch in 10000tel.

$^6/_{10} + {}^5/_{100} = {}^{65}/_{100}$;
$^{65}/_{100} + {}^8/_{1000} = {}^{658}/_{1000}$;
$^{658}/_{1000} + {}^9/_{10000} = {}^{6589}/_{10000}$;
$^{6589}/_{10000} + {}^7/_{100000} = {}^{65897}/_{100000}$. Also

$0{,}65897 = {}^6/_{10} + {}^5/_{100} + {}^8/_{1000} + {}^9/_{10000} + {}^7/_{100000} = {}^{65897}/_{100000}$.

Decimalbrüche des Aufgabenheftes werden nun auch in dieser Weise gelesen. Die Schüler finden sich bald zurecht. Sie lesen den Decimalbruch wie eine ganze Zahl und nehmen den Nenner der letzten Stelle zum Nenner des ganzen Bruches. (So viele Stellen der Zähler hat, so viele Nullen hat der Nenner.)

§. 203. Das Schreiben der Decimalbrüche.

a. Nach den einzelnen Stellen.

Ein Schüler tritt an die Wandtafel; die andern nehmen ihre Schiefertafeln zur Hand. Der Lehrer diktirt nun z. B.

4 G. + $^{5}/_{10}$, geschr. = 4,5	$^{6}/_{1000}$ = 0,006
0 G. + $^{8}/_{10}$, " = 0,8	$^{4}/_{100}$ + $^{6}/_{1000}$ = 0,046
3 G. + $^{6}/_{10}$ + $^{7}/_{100}$ = 3,67	$^{3}/_{10}$ + $^{4}/_{100}$ + $^{6}/_{1000}$ = 0,346
5 G. + $^{8}/_{100}$ = 5,08	$^{7}/_{10}$ + $^{8}/_{1000}$ = 0,708

Stoff hiezu und zu der nachfolgenden Uebung bietet wieder das Aufgabenheft.

b. Im Zusammenhange.

Die 10tel stehen in der ersten Decimalstelle; heißt also der Nenner 10, so ist der Decimalbruch einstellig. Die 100tel stehen in der 2. Stelle; heißt also der Nenner 100, so ist der Decimalbruch zweistellig u. s. w. So viele Nullen der Nenner hat, so viele Stellen hat der Zähler.

$4^{52}/_{100}$ = 4,52	$15^{7}/_{1000}$ = 15,0007
$9^{6}/_{1000}$ = 9,006	$23^{25}/_{10000}$ = 23,0025
$5^{37}/_{1000}$ = 5 037	$^{237}/_{10000}$ = 0,0237
$^{456}/_{1000}$ = 0,456	$^{9867}/_{10000}$ = 0,9867

u. s. w.

Decimalbrüche zu addiren.

§. 204. Das Addiren der Decimalbrüche an sich.

Aufgabe: Wie viel betragen folgende Zahlen zusammen: 3,84 + 68,075 + 0,4 + 24,6987?

Ausrechnung.

Man setzt die Zahlen so unter einander, daß auf der linken Seite des Decimalkomma Einer unter Einer, Zehner unter Zehner rc. und auf der rechten Seite desselben Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. f. zu stehen kommen.

```
 3,84
68,075
 0,4
24,6987
-------
97,0137
```

Die 7 steht allein. Da ist nichts weiter zu addiren. Ich setze also 7 unter den Strich, und zwar in die Stelle der Zehntausendtel, d. i. gerade unter die 7.

8 + 5 = 13, nämlich 13 Tausendtel; 13 Tausendtel = 10 Tausendtel oder 1 Hundertel + 3 Tausendtel. Die 3 Tausendtel unter den Strich, genau unter die Tausendtel; das 1 Hundertel hinüber zu den Hunderteln.

1 + 9 ist 10, und 7 ist 17, und 4 ist 21. Das sind 21 Hundertel oder 2 Zehntel und 1 Hundertel. Das 1 Hundertel unter den Strich, gerade unter die Hundertel; die 2 Zehntel hinüber zu den andern Zehnteln.

2 und 6 ist 8, und 4 ist 12, und 8 ist 20, nämlich 20 Zehntel. 20 Zehntel sind 2 Ganze und 0 Zehntel. 0 Zehntel unter den Strich in die Reihe der Zehntel; die 2 Ganzen hinüber zu den Ganzen.

Bevor ich weiter rechne, setze ich ein Komma, damit die Theile von den Ganzen sogleich geschieden werden.

2 + 4 + 8 + 3 = 17; 17 Einer = 1 Zehner + 7 Einer 2c.

Summa: 9 Zehner, 7 Einer, 0 Zehntel, 1 Hundertel, 3 Tausendtel und 7 Zehntausendtel, zusammen: 97 Ganze und 137 Zehntausendtel.

Sowie 10 Einer = 1 Zehner, 10 Z. = 1 Hunderter 2c.; so sind 10 Milliontel = 1 Hunderttausendtel, 10 Htausendtel = 1 Zehntausendtel, 10 Zehntausendtel = 1 Tausendtel u. s. w. Sowie also 10 Einheiten einer niederen Ordnung 1 Einheit der nächsthöheren machen, ebenso machen 10 Theile einer niederen Benennung 1 Theil der nächst höheren. Die Decimalbrüche werden daher addirt, wie ganze Zahlen.

7 ist 7; 8 + 5 = 13, ich schreibe 3 und behalte 1; 1 + 9 = 10, + 7 = 17, + 4 = 21, ich schreibe 1 und behalte 2 u. s. w.

§. 205. Auf die Münzen, Maße und Gewichte angewendet.

A. Die Zahl mit der niederen Benennung wird als zweistelliger Decimalbruch ausgedrückt.

1 Mark = 100 Pfennige, und 100 Pfennige = 1 Mark.

Also ist 1 Pfg.	= $^1/_{100}$ M. (an die Wandtafel geschr.)	= 0,01	Mark.
2 "	= $^2/_{100}$ "	= 0,02	"
3 "	= $^3/_{100}$ "	= 0,03	"
10 Pfg.	= $^{10}/_{100}$ (= $^1/_{10}$ + $^0/_{100}$) Mark	= 0,10	Mark.
20 "	= $^{20}/_{100}$ (= $^2/_{10}$ + $^0/_{100}$) "	= 0,20	"
30 "	= $^{30}/_{100}$ (= $^3/_{10}$ + $^0/_{100}$) "	= 0,30	"
12 Pfg.	= $^{12}/_{100}$ (= $^1/_{10}$ + $^2/_{100}$) Mark	= 0,12	Mark.
25 "	= $^{25}/_{100}$ (= $^2/_{10}$ + $^5/_{100}$) "	= 0,25	"
36 "	= $^{36}/_{100}$ (= $^3/_{10}$ + $^6/_{100}$) "	= 0,36	"
4 Mark 54 Pfg.	= 4 + $^{54}/_{100}$ Mark	= 4,54	Mark.
8 " 6 "	= 8 + $^6/_{100}$ "	= 8,06	"
7 " 80 "	= 7 + $^{80}/_{100}$ "	= 7,80	"

Die Mark ist die Einheit oder das Ganze. Ihre Anzahl wird daher durch eine ganze Zahl bezeichnet. Nach dieser wird das Komma gesetzt. Die Pfennige sind Hundertels-Mark und nehmen als solche die zwei ersten Stellen nach dem Komma ein.

Ist dieß von den Schülern aus der an der Wandtafel ausgeführten schriftlichen Darstellung begriffen, so diktirt ihnen der Lehrer ein- und mehrfach benannte Zahlen dieser Art in vermischter Aufeinanderfolge auf die Schiefertafel. Das Geschriebene wird addirt, die Summe gelesen und resolvirt. Z. B.

a.		b.		c.
9 Mark 36 Pfg.	=	$9+{}^{36}/_{100}$ M.	=	9,36 Mark
24 " 8 "	=	$24+{}^{8}/_{100}$ "	=	24,08 "
75 "	=	0G.$+{}^{75}/_{100}$ "	=	0,75 "
375 " 90 "	=	$357+{}^{90}/_{100}$ "	=	357,90 "
84 "	=	0G.$+{}^{84}/_{100}$ "	=	0,84 "
				392,93 M. = 392 M. 93 pf.

Das unter a Stehende wird vom Lehrer diktirt; das unter a und b wird von den Schülern gesprochen, c von ihnen geschrieben und dieß bis zur Sicherheit geübt.

Wie 1 Mark = 100 Pfennigen, so ist auch
1 Meter = 100 Centimeter,
1 Hektar = 100 Ar,
1 Hektoliter = 100 Liter,
1 Centner = 100 Pfund,
1 Kilogr. = 100 Dekagramm od. Neuloth und
1 Tagwerk = 100 Decimale.

Die Schreibweise der Mark und Pfennige in Decimalbruchform ist daher auch die Schreibweise der Meter und Centimeter, der Hektar und Ar, der Hektoliter und Liter, der Centner und Pfund, der Kilogramm und Dekagramm, der Tagwerk und Decimale. Mithin kann bei diesen Maßen und Gewichten, um die Schüler in die Schreibweise derselben einzuführen, auch eben so wie bei der Mark und den Pfennigen verfahren werden. Die Zahlen bleiben, die Namen wechseln. Wir weisen darauf hin, und geben in dem Folgenden zu jeder Art der angeführten Maße und Gewichte nur noch ein Beispiel zum Diktiren.

1)
3^{m} 45^{cm} = $3,45^{m}$
18^{m} 72^{cm} = $18,72^{m}$
84^{cm} = $0,84^{m}$
5^{m} 8^{cm} = $5,08^{m}$
66^{cm} = $0,66^{m}$
7^{m} 90^{cm} = $7,90^{m}$
$36,65^{m}$
= 36^{m} 65^{cm}.

2)
4 Hektar 15 Ar = 4,15 Hektar
96 Ar = 0,96 Hektar
25 Hektar 40 Ar = 25 40 Hektar
8 Hektar 9 Ar = 8,09 Hektar
75 Ar = 0,75 Hektar
6 Hektar 57 Ar = 6,57 Hektar
45,92 Hektar
= 45 Hektar 92 Ar.

3)
3lt = 0,03Hl
5Hl 8lt = 5,08Hl
25lt = 0,25Hl
6Hl 40lt = 6,40Hl
11,76Hl
= 11Hl 76lt.

4)
3 Ctr. 27 Pfd. = 3,27 Ctr.
72 Pfd. = 0,72 Ctr.
8 Ctr. 9 Pfd. = 8,09 Ctr.
12 Ctr. 60 Pfd. = 12,60 Ctr.
24,68 Ctr.
= 24 Ctr. 68 Pfd.

5)
5Dgr = 0,05Kgr
90Dgr = 0,90Kgr
8 Kgr 4Dgr = 8,04Kgr
25Dgr = 0,25Kgr
37Kgr 72Dgr = 37,72Kgr
46,96Kgr
= 46Kgr 96Dgr.

6)
8 Tgw. 54 Dec. = 8,54 Tgw.
70 Dec. = 0,70 Tgw.
5 Tgw. 6 Dec. = 5,06 Tgw.
84 Dec. = 0,84 Tgw.
14 Tgw. = 14,00 Tgw.
29,14 Tgw.
= 29 Tgw. 14 Decimale.

B. Die Zahl mit der niederen Benennung wird als drei- oder vierstelliger Decimalbruch ausgedrückt.

1) 1 Centimeter = 10 Millimeter; 1 Meter = 100 × 10 = 1000 Millimeter.

1 Millimeter ist also $^1/_{10}$ Centimeter und zugleich $^1/_{1000}$ Meter. Die Millimeter werden als 10tels Centimeter in die nächste Stelle nach den Centimetern gesetzt und kommen sonach als 1000tels-Meter in die dritte Decimalstelle.

8^{mm}	$= {}^8/_{1000}{}^m$	$= 0{,}008^m$
3^{mm}	$= {}^3/_{1000}{}^m$	$= 0{,}003^m$
$4^{cm}\ 7^{mm}$	$= {}^4/_{100} + {}^7/_{1000}{}^m$ . .	$= 0{,}047^m$
$56^{cm}\ 9^{mm}$	$= {}^{56}/_{100} + {}^9/_{1000}{}^m$ . .	$= 0{,}569^m$
$6^m\ 78^{cm}\ 5^{mm}$	$= 6 + {}^{78}/_{100} + {}^5/_{1000}{}^m$	$= 6{,}785^m$
$9^m\ 7^{cm}\ 4^{mm}$	$= 9 + {}^7/_{100} + {}^4/_{1000}{}^m$	$= 9{,}074^m$
$4^m\ 30^{cm}\ 6^{mm}$	$= 4 + {}^{30}/_{100} + {}^6/_{1000}{}^m$	$= 4{,}306^m$
		$20{,}792^m$

= 20 Meter 79 Centim. 2 Millim. = $20^m\ 792^{mm}$.

2) 1 Dgr = 10 gr; 1 Kgr = 100 × 10 gr = 1000 gr.

1 Gramm ist also $^1/_{10}$-Dekagramm und zugleich $^1/_{1000}$-Kilogramm. Die Gramm kommen daher als 10tels-Dekagramm in die nächste Stelle nach den Dekagrammen, mithin als 1000tels-Kilogramm in die dritte Stelle. Es ist hier also ganz so, wie bei den Längenmaßen. Wie dort die Centimeter, so werden hier die Dekagramm in die erste und zweite Decimalstelle geschrieben, und wie dort die Millimeter, so kommen hier die Gramm in die dritte Stelle.

Der Lehrer diktirt zuerst 3, 7, 9, 5, 8 2c. Gramm; dann 26Dgr 4gr, 75Dgr 7 gr, 8Dgr 6gr, 3Dgr 8gr; dann 2Kgr 54Dgr 2gr, 9Kgr 27Dgr 5gr. 2c.

a.	b.	c.
7gr	$= {}^7/_{1000}$Kgr . . .	= 0,007Kgr
34Dgr 5gr	$= {}^{34}/_{100} + {}^5/_{1000}$Kgr .	= 0,345 „
40 „ 6 „	$= {}^{40}/_{100} + {}^6/_{1000}$ „ .	= 0,406 „
9Kgr 3 „ 8 „	$= 9 + {}^3/_{100} + {}^8/_{1000}$Kgr	= 9,038 „
8 „ 75 „ 4 „	$= 8 + {}^{75}/_{100} + {}^4/_{1000}$ „	= 8,754 „
		18,550 Kgr

= 18Kgr 55Dgr = 18Kgr 55Dgr 0gr = 18Kgr 550gr.

3) 1 Ar = 100□m; 1 Hektar = 100 × 100□m = 10000□m.

Mithin ist 1□m oder Centiar = $^1/_{100}$-Ar = $^1/_{10000}$-Hektar. Ist daher die Zahl der □Meter eine einstellige Zahl (1, 2, 3 2c.), so kommt sie in die vierte Decimalstelle, und ist sie eine zweistellige Zahl (10, 15, 20, 24 2c.), so kommt sie in die dritte und vierte. Die Zahl der Ar nimmt also die ersten zwei und die Zahl der Centiar die andern zwei Stellen nach dem Komma ein.

a.		b.		c.
4□m	=	$^4/_{10000}$ Hektar	=	0,0004 Hektar
38□m	=	$^{38}/_{10000}$ Hektar . . .	=	0,0038 „
7 Ar 56□m	=	$^7/_{100}+^{56}/_{10000}$ Hektar .	=	0,0756 „
45 Ar 75□m	=	$^{45}/_{100}+^{75}/_{10000}$ „ .	=	0,4575 „
3 Hektar 63 Ar 47□m	=	$3+^{63}/_{100}+^{47}/_{10000}$ Hektar	=	3,6347 „
9 „ 50 Ar 8□m	=	$9+^{50}/_{100}+^{8}/_{10000}$ „	=	7,5008 „
				11,6728 Hektar

= 11 Hektar 67 Ar 28 Centiar.

Decimalbrüche zu subtrahiren.

§. 206. Das Subtrahiren der Decimalbrüche an sich.

Aufgabe 1. Um wie viel ist die Zahl 91,2831 kleiner als 173,4284?

Ausrechnung.

```
173,4284
 91,2831
--------
 82,1453
```

1 Zehntausendtel von 4 Zehntaus. bleiben 3 Zehntausendtel.

3 Tausendtel von 8 Tausendteln bleiben 5 Tausendtel.

8 Hundertel von 2 H. wegzunehmen, geht nicht. Ich borge 1 Zehntel; 1 Zehntel und 2 Hundertel = 12 Hundertel; 8 Hundertel von 12 Hunderteln bleiben 4 Hundertel.

2 Zehntel von 3 Zehnteln bleibt 1 Zehntel. Und so fort.

Rest: 8 Zehner, 2 Einer, 1 Zehntel, 4 Hundertel, 5 Tausendtel und 3 Zehntausendtel; zusammen: 82 Ganze und 1453 Zehntausendtel.

Aufgabe 2. Von 25,37854 soll die Zahl 9,482 abgezogen werden.

Ausrechnung.

```
25,37854 = 25,37854
 9,482   =  9,48200
-------------------
15,89654 = 15,89654
```

Zehntausendtel sind nicht abzuziehen, daher setzt man unter die 5 Zehntausendtel eine Null. Ebenso unter die 4 Hunderttausendtel.

Nun subtrahirt man wie vorhin. Rest: 15 Ganze und 89654 Hunderttausendel.

Frage: Dem gegebenen Subtrahenden haben wir zwei Nullen beigefügt. Wurde der Werth desselben hierdurch nicht verändert? Nein; denn die Ziffern 4, 8 und 2 wurden durch die beigefügten Nullen nicht verrückt. Sie gelten nach wie vor 4 Zehntel, 8 Hundertel, 2 Tausendtel. Nur erweitert wird der Decimalbruch durch die beigefügten Nullen. 0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,4000 u. s. w. Streicht man die Nullen am Ende eines solchen, so wird er hierdurch gekürzt. 0,5000 = 0,500 = 0,50 = 0,5.

Aufgabe 3. Wie groß ist der Unterschied zwischen 42,007 und 17,653?

Ausrechnung.

4 2.,0 0 7
1 7,6 5 3
―――――――
2 4,3 5 4

3 Tausendtel von 7 Tausendeln bleiben 4 Tausendtel.

5 Hundertel von 0 Hunderteln geht nicht. 1 Zehntel kann ich nicht entlehnen, denn dergleichen sind nicht da Ich gehe daher über das Komma weg und borge 1 Einer. Diesen Einer trage ich auf die nächste, d. h. auf die Zehntelstelle über. Allda macht er 10 Zehntel. Von den 10 Zehnteln nehme ich 1 Zehntel und führe dieses auf die Hundertelstelle. 1 Zehntel = 10 Hundertel. Das geborgte Ganze ist jetzt in 9 Zehntel und 10 Hundertel verwandelt. Nun ziehe ich ab. 5 Hundertel von 10 Hundertel bleiben 5 Hundertel.

6 Zehntel von 9 Zehnteln bleiben 3 Zehntel.

7 Einer von 11 Einer bleiben 4 Einer. Und 1 Zehner von 3 Zehnern bleiben 2 Zehner. Rest 24 G. 354 Tausendtel.

Aufgabe 4. Um wie viel ist die Zahl 543 größer als die Zahl 123,527?

Ausrechnung.

543 = 5 4 3.,0.0.0
123,527 = 1 2 3,5 2 7
―――――――
419,473 = 4 1 9,4 7 3

Man setzt hinter die Vollzahl 543 ein Komma und ergänzt die fehlenden Decimalstellen durch Nullen. Im Uebrigen ist die Ausrechnung der im vorigen Beispiele gleich.

§. 207. **Auf die Münzen, Maße und Gewichte angewendet.**

1) 357 Mark 35 Pfg. = 357,35 Mark
— 185 „ 72 „ = 185,72 „
―――――――
171,63 Mark
= 171 Mark 63 Pfennige.

2) 28^m 8^{cm} = $28{,}080^m$
— 12^m 48^{cm} 3^{mm} = $12{,}483^m$
―――――――
$15{,}597^m$
= 15^m 59^{cm} 7^{mm}.

3) 13 Hektar 5 Ar 54 $\square^m$ = 13,0554 Hektar
— 8 „ 36 „ 8 „ = 8,3608 „
―――――――
4,6946 Hektar
= 4 Hektar 69 Ar 46 Quadratmeter oder Centiar.

4) 125 Hl = 125,00 Hl
— 78 Hl 84lt = 78,84 „
―――――――
46,16 Hl
= 46 Hektoliter 16 Liter.

5) 32 Ctr. 45 Pfd. = 32,45 Ctr.
— 17 „ — „ = 17,00 „
―――――――
15,45 Ctr.
= 15 Centner 45 Pfd.

6) 5 Kgr 7 Dgr = 5,070 Kgr
— 2 Kgr 38 Dgr 5 gr = 2,385 Kgr
―――――――
2,685 Kgr
= 2 Kgr 68 Dgr 5 gr.

7) 14 Tgw. 43 Dcm. = 14,43 Tgw.
— 7 „ 64 „ = 7,64 „
―――――――
6,79 Tgw.
= 6 Tgw. 79 Decimalen.

Versetzung des Komma.

§. 208. Verfahren.

10 × 0,000001
10 × 0,00001
10 × 0,0001
10 × 0,001
10 × 0,01
10 × 0,1

In welcher Stelle nach dem Komma steht hier die Ziffer 1? (In der 6.) Was gilt sie da? (1 Milliontel.) Wie viel ist 10 × 1 Mt.? (10 × 1 Mt. = 10 Mt. = 1 Htausendtel). Wohin müssen wir die 1 versetzen, damit sie 1 Htausendtel gilt? (In die 5. Stelle.) Und wie thun wir dies am einfachsten? (Wir rücken das Komma um eine Stelle weiter rechts.) — Wo steht jetzt die 1? Was gilt sie? Wie viel ist 10 × 1 Htausendtel? 2c.

Ein Decimalbruch wird also mit 10 **multiplicirt**, wenn man das Komma um 1 Stelle, — mit 10 × 10 oder 100, wenn man das Komma um 2 Stellen, — mit 10 × 10 × 10 oder 1000, wenn man das Komma um 3 Stellen **nach rechts** rückt 2c.

10 × 9,376 = 93,76
100 × 9,376 = 937,6
1000 × 9,376 = 9376
10000 × 9,376 = 93760

Ist das Komma um mehr Stellen zurückzusetzen, als Ziffern da sind, so werden für die fehlenden Ziffern Nullen **angehängt**.

$^{1}/_{10}$ von 1 = 0,1
$^{1}/_{10}$ von 0,1 = 0,01
$^{1}/_{10}$ von 0,01 = 0,001
u. s. w.

Der 10. Theil von 1 = $^{1}/_{10}$; $^{1}/_{10}$ gilt die Ziffer 1 in der **ersten** Stelle **nach** dem Komma; also muß ich das Komma **vor** sie setzen. — Der 10. Theil von $^{1}/_{10}$ = $^{1}/_{100}$; $^{1}/_{100}$ gilt die 1 in der **zweiten** Stelle **nach** dem Komma; dahin kommt sie zu stehen, indem ich das Komma um eine Stelle gegen die Linke rücke u. s. w.

Ein Decimalbruch wird also durch 10 **dividirt**, wenn man das Komma um 1 Stelle, — durch 10 × 10 oder 100, wenn man das Komma um 2 Stellen, — durch 10 × 10 × 10 oder 1000, wenn man das Komma um 3 Stellen **nach links** rückt 2c.

$^{1}/_{10}$ von 345,6 = 34,56
$^{1}/_{100}$ von 345,6 = 3,456
$^{1}/_{1000}$ von 345,6 = 0,3456
$^{1}/_{10000}$ von 345,6 = 0,03456

Ist das Komma um **mehr** Stellen vorzurücken, als Ziffern da sind, so wird die erforderliche Anzahl Nullen **vorgesetzt**.

Decimalbrüche zu multipliciren.

§. 209. Das Multipliciren der Decimalbrüche an sich.

Beispiel 1. Wie viel beträgt das 6fache von 5,7?

Ausrechnung.

```
 5,7
   6
----
34,2
```

a. 6 × 7 Zehntel × 42 Zehntel; 42 Zehntel = 4 Ganze und 2 Zehntel. Die 2 Zehntel unter die 7 Zehntel; die 4 Ganzen hinüber zu den Ganzen — Decimalzeichen! 6 × 5 ist 30; 30 + 4 ist 34. Also ist 6 × 5,7 = 34,2. — **Besser:**

b. 5,7 = 57 Zehntel; 6 × 57 = 342; 6 × 57 Zehntel = 342 Zehntel. Zehntel werden in Ganze verwandelt, wenn man sie durch 10 dividirt, und durch 10 wird dividirt, indem man rechts eine Stelle abtrennt. 342 Zehntel = 34,2. Also: 6 × 5,7 = 6 × $^{57}/_{10}$ = $^{342}/_{10}$ = 34,2.

Beispiel 2. Wie viel ist 36 × 0,075?

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 0{,}075 \\ 36 \\ \hline 450 \\ 225 \\ \hline 2{,}700 = 2{,}7 \end{array}$$

36 × 75 = 2700; 36 × 75 Tausendtel = 2700 Tausendtel. Um diese in Ganze zu verwandeln, so muß man sie durch 1000 dividiren, und dieß geschieht, indem rechts 3 Stellen abgeschnitten werden.

Beisp. 3. Wie viel ist 26, multiplicirt durch 0,18?

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 26 \\ 0{,}18 \\ \hline 208 \\ 26 \\ \hline 4{,}68 \end{array}$$

Ich rechne 18 × 26; 18 × 26 = 468; $^{18}/_{100}$mal 26 = 468 Hundertel. Um Ganze zu erhalten, so muß ich 468 durch 100 dividiren. 468 durch 100 dividirt = 4,68.

Beisp. 4. Wie viel ist 0,7 mal 0,8?

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 0{,}8 \\ 0{,}7 \\ \hline 0{,}56 \end{array}$$

7 × 8 = 56; $^{7}/_{10}$ × $^{8}/_{10}$ = $^{56}/_{100}$. Mithin ist vor 56 das Komma und vor dasselbe, weil keine Ganzen vorhanden sind, eine Null zu setzen.

Beisp. 5. Wie viel ist 4,8mal 0,72?

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 0{,}72 \\ 4{,}8 \\ \hline 576 \\ 288 \\ \hline 3{,}456 \end{array}$$

$$48 \times 72 = 3456.$$

$$48 \times \frac{72}{100} = \frac{3456}{100} = 34{,}56.$$

$$\frac{48}{10} \times \frac{72}{100} = \frac{3456}{1000} = 3{,}456.$$

Der Multiplikand besteht, da er 2 Decimalstellen enthält, aus 100teln. 100tel mit einer ganzen Zahl multiplicirt, gibt wieder 100tel. Darum sind in dem Produkte zunächst 2 Stellen abzuschneiden. Hier aber besteht der Multiplikator nicht aus einer ganzen Zahl, sondern aus 10teln. Mithin ist das Produkt auch nur $^{1}/_{10}$mal so groß; 100tel durch 10tel multiplicirt, gibt 1000tel. Darum müssen im Ganzen 2 + 1 oder 3 Stellen abgeschnitten werden.

Beisp. 6. Die Zahl 6,348 mit 0,35 multiplicirt, wie viel?

Ausrechnung.

```
   6,348
    0,35
 -------
   31740
  19044
 -------
 2,22180
```

$$35 \times 6348 = 222180.$$

$$35 \times \frac{6348}{1000} = \frac{222180}{1000} = 222{,}180.$$

$$\frac{35}{100} \times \frac{6348}{1000} = \frac{222180}{100000} = 2{,}22180 = 2{,}2218.$$

Hier sind von dem Produkte 3 Stellen wegen der 1000tel des Multiplikanden und 2 Stellen wegen der 100tel des Multiplikators abzuschneiden. Also müssen im Ganzen 3 + 2 oder 5 Stellen abgeschnitten werden.

Man multiplicirt demnach die Decimalbrüche wie ganze Zahlen, dann aber streicht man von dem Produkte so viele Stellen rechts ab, als die beiden Faktoren Decimalstellen zusammen haben.

Mit 20 oder 2 × 10, mit 30 oder 3 × 10, mit 230 oder 23 × 10 wird multiplicirt, wenn man das Komma um eine Stelle nach rechts rückt und dann noch mit 2, 3, 23 multiplicirt. Ist mit 200 oder 2 × 100, mit 300 oder 3 × 100, mit 3400 oder 34 × 100 zu multipliciren, so wird das Komma um zwei Stellen nach rechts gerückt und dann noch mit 2, 3 und 34 multiplicirt. Z. B.

```
1) 30 × 347,8 = ?   a.    347,8
                          × 30
                      ---------
                      10434,0 = 10434.
                    b. 10 × 347,8 = 3478
                                     × 3
                                   -----
                                   10434

2) 400 × 0,849 = ?  a.    0,849
                          × 400
                      ---------
                        339,600 = 339,6
                    b. 100 × 0,849 = 84,9
                                      × 4
                                    -----
                                    339,6
```

§. 210. Auf die Münzen, Maße und Gewichte angewendet.

Beisp. 1. 384 Mark 72 Pfg., mit 23 multiplicirt = ?

Ausrechnung.

```
384 Mark 72 Pfg. = a.  38472 Pfg.        b.  484,72 Mark
                         × 23                  × 23
                      ----------            -----------
                       115416                115416
                       76944                 76944
                      ----------            -----------
                       884856 Pfg.           8848,56 Mark
                        = 8848 Mark 56 Pfennige.
```

Beisp. 2. Wie viel ist 7,64 × 35 Kgr 72 Dgr?

Ausrechnung.

35 Kgr 72 Dgr =	a.	b.
	3522 Dgr	35,72 Kgr
	7,64	7,64
	14288	14288
	21432	21432
	25004	25004
	272|90,08 Dgr	272,9008 Kgr

= 272 Kgr 90 Dgr 0,8 gr

Man löst also die höheren Sorten in die niederste der gegebenen auf, oder man drückt die niederen Sorten durch einen Decimalbruch in der als Einheit angenommenen höheren Sorte aus. Man verwandelt also die mehrfach benannte Zahl in eine einfach benannte.

3) 36 Meter 54 Centimeter × 8,5 (mult. mit 8,5) = ?

Ausrechnung.

36^{m} 54^{cm} =	a.	b.
	3 6 5 4 ^{cm}	3 6,5 4 ^{m}
	× 8,5	× 8,5
	1 8 2 7 0	1 8 2 7 0
	2 9 2 3 2	2 9 2 3 2
	3 1 0|5 9 0 ^{cm}	3 1 0,5 9 0 ^{m}

= 310 Meter 59 Centimeter.

4) 7 Hektar 34 Ar 68 Centiar × 4 =

a.	b.
73468 Centiar ($\square^{m}$)	7,3468 Hektar
× 4	× 4
29|38|72 Centiar	29,3872

= 29 Hektar 38 Ar 72 Centiar.

5) 24 Centner 85 Pfd × 7,5 =

a.	b.
2485 Pfd.	24,85 Ctr.
× 7,5	× 7,5
12425	12425
17395	17495
186|37,5 Pfd.	186,375 Ctr.

= 186 Ctr. 37,5 Pfd.

6) 87 Kgr 74 Dgr × 3,2 =

a.	b.
8774 Dgr	87,74 Kgr
× 3,2	× 3,2
17548	17548
26322	26322
280|76,8 Dgr	280,768 Kgr

= 280 Kgr 76 Dgr 8 gr.

7) 15 Tagwerk 88 Decimale × 20 =

a. 1588 Decimale
× 20
31 7|60 Decimale
= 317 Tagw. 60 Decimale.

b. 15,88 Tagw.
× 20
317,60 Tagw.

Um die Decimalbrüche auch auf die bisherigen süddeutschen Münzen anwenden zu können, so lassen wir nun die Kreuzerzahlen, welche sich in Decimaltheile des Gulden verwandeln lassen, in Decimalbruchform ausdrücken.

6 Kreuzer oder 1 Sechser = $^1/_{10}$ fl. = 0,1 fl. So viele Sechser, so viele Zehntels-Gulden. 3 Kreuzer oder 1 Groschen = $^1/_2$ Sechser; da 1 Sechser = $^1/_{10}$ = $^{10}/_{100}$ fl., so ist 1 Groschen = $^5/_{100}$ = 0,05 fl. Also sind

6 kr. = 0,1 fl.	3 kr. = 0,05 fl.	1 fl. 48 kr. = 1,8 fl.
12 kr. = 0,2 fl.	9 kr. = 0,15 fl.	3 fl. 21 kr. = 3,35 fl.
18 kr. = 0,3 fl.	15 kr. = 0,25 fl.	8 fl. 42 kr. = 8,7 fl.
24 kr. = 0,4 fl.	21 kr. = 0,35 fl.	4 fl. 15 kr. = 4,25 fl.
30 kr. = 0,5 fl.	27 kr. = 0,45 fl.	6 fl. 24 kr. = 6,4 fl.
36 kr. = 0,6 fl.	33 kr. = 0,55 fl.	2 fl. 9 kr. = 2,15 fl.
42 kr. = 0,7 fl.	39 kr. = 0,65 fl.	7 fl. 30 kr. = 7,5 fl.
48 kr. = 0,8 fl.	45 kr. = 0,75 fl.	9 fl. 45 kr. = 9,75 fl.
54 kr. = 0,9 fl.	51 kr. = 0,85 fl.	5 fl. 54 kr. = 5,9 fl.
	57 kr. = 0,95 fl.	7 fl. 27 kr. = 7,45 fl.

Die Ziffer in der ersten Stelle nach dem Komma bezeichnet die Anzahl der Zehntels-Gulden oder Sechser; die Ziffer 5 in der zweiten Stelle bedeutet $^5/_{100}$ = $^1/_{20}$ fl. oder 1 Groschen; 0,85 fl. = kein Gulden, 8 Sechser und 1 Groschen = 48 + 3 oder 51 kr.

8) 24 fl. 48 kr. × 46 = 24,8 fl.
× 36
1488
744
892,8 fl. = 892 fl. 48 kr.

9) 148 fl. 45 kr. × 83 = 148,75 fl.
× 83
44625
119000
12346,25 fl. = 12346 fl. 15 kr.

10) 65 fl. 18 kr. × 6,5 = 65,3 fl.
× 6,5
3265
3917
424,45 = 427 fl. 37 kr.

§. 211. Benannte Decimalbrüche zu resolviren.

Die Schüler erinnern sich, daß die Pfennige, die Centimeter, die Ar, die Liter, die Pfund, die Dekagramm, wenn sie durch einen Decimalbruch ausgedrückt sind, die zwei ersten Stellen nach dem Komma einnehmen; daß die Millimeter und Gramm in der dritten, die □ Meter in der dritten und vierten Stelle stehen. Die benannten

Decimalbrüche werden daher vom **Komma aus** in das Auge gefaßt und abgetheilt.

1) 0,756 Mark, wie viel Pfennige?

Aufl. 0,756 Mark = $^{75}/_{100}$ + $^{6}/_{1000}$ Mark; $^{75}/_{100}$ Mark = 75 Pfg.; $^{1}/_{1000}$ ist $^{1}/_{10}$ von $^{1}/_{100}$; also ist $^{1}/_{1000}$ Mark = $^{1}/_{10}$ Pfg., und $^{6}/_{1000}$ Mark = $^{6}/_{10}$ Pfg. Mithin sind 0,756 Mark = 75,6 Pfg.

Da es Münzen im Werthe von $^{1}/_{10}$ bis $^{9}/_{10}$ Pfg. nicht gibt, so lassen sich Zehntels-Pfennige auch nicht bezahlen. Noch weniger kann dieß mit 100tels- oder 1000tels-Pfennigen geschehen. Ich sehe daher zu, wie sich die Theile der niedersten Sorte zu einem Ganzen derselben verhalten. Betragen sie $^{1}/_{2}$ oder über $^{1}/_{2}$, so setze ich 1 Ganzes dafür; betragen sie weniger als $^{1}/_{2}$, so lasse ich sie unberücksichtigt. Für 75,6 Pfennige bezahlt man daher 75 + 1 = 76 Pfennige. Man setzt also für den Bruch oder die gemischte Zahl diejenige höhere oder niedere ganze Zahl, welche ihr dem Werthe nach am nächsten steht und daher ihr Näherungswerth heißt.

2) 0,943 Mark = 94,3 Pfg. (Näherungswerth 94 Pfg.)
3) 4,2385 Mark = 4 Mark 23,85 (= 24) Pfg.
4) 0,75136 Meter = 75^{cm} 2,36^{mm} (= 2^{mm}).
5) 0,84579 Hektar = 84 Ar 57,9 (= 58) Centiar.
6) 9,3725 Hektoliter = 9 Hl 37,25 (=37$^{1}/_{4}$) Liter.
7) 5,86465 Kgr = 5 Kgr 86 Dgr 4,65 (= 5) Gramm.
(Genau: 5 Kgr 86 Dgr 4 gr 6 dgr 5 cgr.)
8) 0,745 fl. = 0,7 + 0,045 fl.; 0,7 fl. = 42 kr.; 0,050 fl. = 3 kr.; 0,045 fl. ist etwas weniger. Also macht es nicht ganz 42 + 3 oder 45 kr. Um es genau zu bestimmen, so wendet man das **schriftliche** Verfahren an.

Wir denken uns den Bruch $^{745}/_{1000}$ fl. als 745 fl., getheilt durch 1000. Es ist daher zu suchen, wie viel der 1000ste Theil von 750 fl. in Kreuzern und Pfennigen beträgt.

```
0,745 fl. = 44 kr. 2,8 pf., nahe 44 kr. 3 pf.
   60
44|700 kr.
  |  4
 2|800 pf.
```

Der 1000. Theil von 745 fl. ist kein ganzer Gulden. Ich verwandle sie daher in Kreuzer. 745 fl. = 44700 kr. Der 1000. Theil von 44700 kr. = 44 kr. Rest 700 kr.; 700 kr. = 2800 pf.; der 1000. Theil von 2800 pf.. = 2,800 oder 2,8 pf., welche für 3 Pfennige gerechnet werden.

```
9) 9,364 Pfd. = 9 Pfd.
    × 50
   18,2ØØ Neuloth = 18 Neuloth 2 Gramm.
```

10) a. 0,73896 Ctr., wie viele Pfund und Neuloth?

```
Ausr. 0,73896 Ctr. = 73,896 Pfund = 73 Pfd.
                        × 50
                       44,8ØØ = 44 Neuloth 8 Gramm.
```

b. 0,73896 Ctr., wie viele Kilogramm?

Ausr. 0,73896 Ctr.
$\times$ 50
36,94800 Kgr = 36 Kgr 94 Dgr 8 gr.

36 Kgr = 36 $\times$ 2 = 72 Pfd., und 94 Dgr = 50 + 44 Dgr = 1 Pfd. 44 Dgr; 72 Pfd. + 1 Pfd. 44 Dgr = 73 Pfd. 44 Dgr. Also sind 36 Kgr 94 Dgr 8 gr = 73 Pfd. 44 Dgr 8 gr. Es kommt also, wie es auch nicht nicht anders sein kann, auf Eins heraus, ob die Centnertheile zunächst in Pfund oder in Kilogramm aufgelöst werden.

§. 212. Multiplikations-Aufgaben mit der angewandten Zahl.

1) Kostet 1 Meter 84 Pfennige, so kosten 32 Meter 32 $\times$ 84 Pfg. oder 32 $\times$ 0,84 Mark.

a. 84 Pfg.
$\times$ 32
168
252
2688 Pfg. =

b. 0,84 Mark
$\times$ 32
168
252
26,88 M. = 26 M. 88 Pfg.

2) Kostet 1 Meter 3 Mark 65 Pfg., so kosten 4^m^ 60^cm^ (= 4,6^m^) 4,6 $\times$ 3,65 Mark = 3,65 Mark
$\times$ 4,6
2190
1460
16,790 Mark = 16 Mark 79 Pfg.

3) Erträgt 1 Hektar 12 Hl 48 lt Körner, so ertragen 8 Hektaren 84 Ar (= 8,84 Hektar) 8,84 $\times$ 12,48 Hl =
12,48 Hl
$\times$ 8,84
4992
9984
9984
110,3232 Hl = 110 Hl 32,32 lt.

4) Kostet 1 □Meter Bauplatz 7 Mark 25 Pfg., so kosten 47,5 □Meter 47,5 $\times$ 7,25 Mark =
344,375 Mark = 344 Mark 37,5 Pfg.

5) Kostet 1 Kgr 2 fl. 51 kr. (= 2,85 fl.), so kosten 8 Kgr 32 Dgr 5 gr (= 8,325 Kgr) 8,325 $\times$ 2,85 fl. oder umgekehrt
8,325 fl.
$\times$ 2,85
41625
66600
16650
23,72625 fl. = 23 fl. und nahe 43½ kr.
60
43,57500 kr.

Decimalbrüche zu dividiren.

§. 213. Das Dividiren der Decimalbrüche an sich.

a. Der Divisor eine ganze Zahl.

Beisp. 1. Wie viel ist $^1/_8$ von 294?

Ausrechnung.

```
8 | 294 | 36,75
    24
    --
    54
    48
    --
    6,0
    56
    --
     40
     40
     --
```

2 Hunderter + 9 Zehner = 29 Zehner.
Der 8. Th. v. 29 Z. = 3 Z.; Rest 5 Z.;
5 Z. + 4 E. = 54 Einer.
Der 8. Th. v. 54 E. = 6 E., Rest 6 E.
6 E. = 60 Zehntel. Komma.
Der 8. Th. v. 60 Zehnteln = 7 Zehntel,
Rest 4 Zehntel = 40 Hundertel.
Der 8. Th. v. 40 H. = 5 H.
Also ist $^1/_8$ von 294 = 3 Z. + 6 E. + $^7/_{10}$ + $^5/_{100}$ = 36,75.

Beisp. 2. Wie viel beträgt der 4. Theil von 31,8?

Ausrechnung.

```
4 | 31,8 | 7,95
    28
    --
     3,8
     3 6
     ---
      20
      20
      --
```

Der 4. Theil von 31 = 7, nämlich 7 Ganze. Decimalzeichen! Rest 3; 3 G. + 8 Zehntel = 38 Zehntel; der 4te Theil von 38 Z. = 9 Z., Rest 2 Zehntel; 2 Z. = 20 Hundertel; der 4. Theil von 20 H. = 5 H. Also ist $^1/_4$ von 31,8 = 7,95.

Beisp. 3. Wie viel ist 0,648 dividirt durch 17?

Ausrechnung.

```
17 | 0,648 | 0,0381 . . .
      51
      ---
      138
      136
      ---
        20
        17
        --
```

Daß sich Ganze nicht ergeben, ist leicht zu erkennen. Ich setze daher an deren Stelle eine Null und daneben gleich das Komma. 6 Zehntel durch 17 getheilt = 0 Zehntel. 6 Zehntel + 4 Hundertel = 64 Hundertel. 64 Hundertel, durch 17 getheilt = 3 Hundertel, Rest 13 Hundertel; 13 Hundertel + 8 Tausendtel = 138 Tausendtel; 138 Tausendtel durch 17 dividirt = 8 Tausendtel, Rest 2 Tausendtel. 2 Tausendtel = 20 Zehntausendtel; 20 Zehntausendtel, durch 17 getheilt = 1 Zehntausendtel, Rest 3 Zehntausendtel.

Wir brechen die Division jetzt ab und zeigen die Nichtvollendung derselben durch 3 Punkte hinter dem Quotienten an. Daß dieser an Genauigkeit zunimmt, je länger die Division fortgesetzt wird, versteht sich von selbst. Ein Quotient mit 3 oder 4 Decimalstellen ist übrigens für die gewöhnlichen Fälle genau genug.

Mit 20 oder 2×10 wird dividirt, indem man das Komma um 1 Stelle nach links rückt und dann durch 2 theilt. Wie wird man nun durch 30 oder 4 × 10, durch 200 oder 2 × 100, durch 350 oder 35 × 10, durch 4500 oder 45 × 100 dividiren?

```
4500 | 759,6 |
---------------
4500 | 7,596 | 0,1688
```

Der 100. Theil von 759,6 = 7,596, und der 45. Theil von 7,596 = 0,1688; also 2c.

b. Der Divisor ein Bruch.

aa. Beide Zahlen haben gleichviel Decimalstellen.

Hier erinnern wir uns erstens wieder an das §. 176 Bemerkte. So oft irgend eine Zahl in einer andern enthalten ist, eben so oft ist irgend ein Vielfaches der ersteren Zahl in dem gleichen Vielfachen der andern enthalten. 0,3 sind z. B. in 0,9 so oft enthalten, als 10 × 3 Zehntel in 10 × 9 Zehnteln, d. i. so oft, als 3 in 9, nämlich 3mal, und 0,24 liegen in 0,96 eben so oft, als 100 × 24 Hundertel in 100 × 96 Hunderteln, d. i. so oft als 24 in 96, nämlich 4mal. Hierdurch wird es uns möglich, alle Aufgaben, bei welchen der Divisor ein Decimalbruch ist, in solche zu verwandeln, bei denen der Divisor eine ganze Zahl ist. — Zweitens erinnern wir uns daran, daß ein Decimalbruch 10mal so groß wird, wenn man das Komma um eine Stelle zurück (weiter rechts) setzt; 100mal so groß, wenn man das Komma um 2 Stellen, 1000mal so groß, wenn man das Komma um 3 Stellen zurücksetzt 2c.

1)

4,7	347,8	
47	347 8	74
	329	
	188	
	188	

Ich setze das Komma bei 4,7 um eine Stelle zurück, oder, da es hinter der Zahl doch ohne Bedeutung ist, ich streiche es. Hierdurch werden aus den 4 Einern 4 Zehner und aus den 7 Zehnteln 7 Einer. Der Divisor ist also jetzt 10mal so groß, als zuvor. Um den richtigen Quotienten zu erhalten, so muß ich nun auch den Dividenden 10mal so groß machen. Das geschieht, wenn ich auch bei ihm das Komma um 1 Stelle zurücksetze, es also gleichfalls streiche.

Ich dividire nun mit dem 10fachen des gegebenen Divisors in das 10fache des gegebenen Dividenden, d. i. mit 47 in 3478. So oft 4,7 oder 47 Zehntel in 347,8 oder 3478 Zehnteln enthalten sind, eben so oft ist 47 in 3487 enthalten?

2)

0,75	0,87	
75	87	1,16
	75	
	120	
	75	
	450	
	450	

Ich setze das Komma sowohl bei dem Divisor, als bei dem Dividenden um 2 Stellen zurück, oder was gleichviel ist, ich streiche es. Hierdurch verwandeln sich die 75 Hundertel in 75 Ganze und die 87 Hundertel in 87 Ganze. Ich dividire nun also das 100fache des gegebenen Dividenden durch das 100fache des gegebenen Divisors. So oft 75 Hundertel in 87 Hunderteln enthalten sind, eben so oft sind 75 Ganze in 87 Ganzen enthalten.

3)

3,307	95,903	
3307	95903	29

Haben die gegebenen Zahlen gleichviele Decimalstellen, so sind sie gleichnamig und werden dividirt wie ganze Zahlen.

bb. Die gegebenen Zahlen haben nicht gleichviele Decimalstellen.

Erste Weise.

1) 7 dividirt durch 0,8, wie viel?

0,8	7,0	
8	70	8,75
	64	
	60	
	59	
	40	

Um zu finden, wie oft 8 Zehntel in 7 Ganzen enthalten sind, so verwandeln wir diese auch in Zehntel. 7 Ganze = 70 Zehntel. Nun ist die Frage: Wie oft sind 8 Zehntel in 70 Zehnteln enthalten? Antwort: So oft, als 8 in 70.

2) Wie viel ist 3,672, dividirt durch 0,48?

0,480	3,672	
480	367,2	7,65

Der Divisor 0,48 hat zwei Decimalstellen; er besteht also aus 100teln. Der Dividend hat deren drei; er besteht aus 3 Ganzen und 672 Tausendteln = 3672 Tausendteln. Um den Divisor auf dieselbe Anzahl von Decimalstellen zu bringen, welche der Dividend enthält, d. h. um seine 48 Hundertel auch in Tausendtel zu verwandeln, so darf ich ihm nur eine Null beifügen. Dann heißt es: 480 Tausendtel sind in 3672 Tausendteln so oft enthalten, als 480 in 3672.

Hierauf streicht man die 0 und schneidet von 3672 eine Stelle ab.

Haben die gegebenen Zahlen nicht gleichviele Decimalstellen, so sind sie ungleichnamig und werden erst gleichnamig gemacht, indem man die fehlenden Stellen durch Nullen ersetzt.

Zweite Weise.

1)

8,3	135,29	
83	1352,9	16,3
	83	
	522	
	498	
	24,9	
	249	

Der Divisor hat eine Decimalstelle, der Dividend hat deren 2. Ich rücke das Komma bei beiden Zahlen um 1 Stelle weiter rechts. Hierdurch fällt es bei dem Divisor weg und werden beide Zahlen zugleich 10mal so groß.

2)

0,48	3,672	
48	367,2	7,65
	336	
	31,2	
	288	
	240	

Der Divisor hat 2 Decimalstellen. Er besteht aus 48 Hunderteln. Um ihn auf eine ganze Zahl zu erheben, so streiche ich bei ihm das Komma; bei dem Dividenden aber setze ich es um 2 Stellen zurück. Ich theile dann mit dem 100fachen in das 100fache der gegebenen Zahlen.

3)

8,3129	3,4664793	
83129	34664,793	0,417

4) Wie oft ist 55,7 in 9469 enthalten?

55,7	9469,0	
557	94690	170
	557	
	3899	
	3899	
	0	

Wenn ich bei dem Divisor das Komma streiche, für 557 Zehntel 557 Ganze setze, so wird derselbe hierdurch 10mal so groß.

Mithin ist, um das ursprüngliche Verhältniß zwischen Divisor und Dividend wieder herzustellen, auch der Dividend 10mal so groß zu machen. Dieß geschieht, indem ich ihm eine Null anhänge. Ich dividire dann also mit dem 10fachen in das 10fache der gegebenen Zahlen.

5) Wie oft ist 0,35 in 16,1 enthalten?

0,35	16,10	
35	1610	46
	140	
	210	
	210	

Um den Divisor auf eine ganze Zahl zu erheben, so setze ich das Komma um 2 Stellen zurück, d. h. ich streiche es. Hierdurch wird diese Zahl 100mal so groß. Es ist daher auch der Dividend auf sein 100faches zu bringen. Dieß geschieht, indem ich auch bei ihm das Komma um 2 Stellen zurücksetze. Da er aber nur eine Decimalstelle hat, so muß ich ihm zuvor eine Null anhängen. $^{35}/_{100}$ sind in $^{1610}/_{100}$ so oft enthalten, als 35 in 1610.

6) Wie oft ist 0,02784 in 21,576 enthalten?

Ausrechnung.

```
0,02784 | 21,57600 |
   2784 | 2157600  | 775
          19488
          20880
          19488
           13920
           13920
```

Hiernach rückt man das Komma bei den zwei gegebenen Zahlen um gleich viele Stellen so weit rechts, bis es bei dem Divisor wegfällt und derselbe als ganze Zahl erscheint. Für die dem Dividenden etwa fehlenden Stellen werden diesem Nullen angehängt.

§. 214. Auf die Münzen, Maße und Gewichte angewendet.

1) $^1/_4$ von 1375 Mark = ?

```
4 | 1 3 7 5 Mark | 343,75 Mark
    1 7 :   = 343 M. 75 Pfg.
      1 5
        3,0
         20
```

2) $^1/_{15}$ von 9872,48 Mark = ?

```
15 | 9872,48 M. | 658,165 M.
      87 : : :   = 658 M. 16,5 Pfg
      122 : :
        2,4 :
         98·
          80
```

3) $^1/_6$ von 725 m = ?

```
6 | 725m | 120,833 ... Mtr.
  | 72   |
     5,0   = 120 m 83 cm 3 mm
      20
      20
```

4) $^1/_8$ von 75 m 90 cm = ?

```
8 | 75,90m | 9,4875m
  | 72 : : |
     3,9 :   = 9 m 48 cm 7,5 mm
      70
       60
        40
```

5) $^1/_{24}$ von 3758 Hektar = ?

24 | 3758 Hektar | 156,5833 .. Hektar =
156 Hektar 58 Ar 33 Centiar.

6) $^1/_9$ von 375 Hl = ?

```
9 | 375 Hl | 41,666 .. Hl
  |  15    |
     6,0    = 41 Hl 66,6 lt
      60
      60
```

7) $^1/_5$ von 17,84 Hl 84 lt = ?

```
5 | 17,84 Hl | 3,568 Hl
  |  2,8 :   |
      34
      40
```

= 3 Hl 56,8 lt.

8) $^1/_{36}$ von 15 Kgr 78 Dgr 4 gr = ?

Ausr. 36 | 15,784 Kgr | 0,438 . . Kgr
| 144 | = 43 Dgr 8 gr.
138
108
304
288
16

9) Wie oft sind 3 Mark 42 Pfg. in 876 Mark enthalten?

Ausr. 3,42 | 876,00 |
3 42 | 876 00 | 556,14 . . mal.

10) Wie oft sind 48 cm 9 mm in 73 m 35 cm enthalten?

Ausrechnung.

48 cm 9 mm = 0,489 m
73 m 35 cm = 73,35 m
0,489 | 73,350 |
489 | 73350 | 150mal.

11) Wie vielmal lassen sich 2 Hl 54 lt von 53 Hl 34 lt wegnehmen?

2 Hl 54 lt = 2,54 Hl   2,54 | 53,34 |
53 Hl 34 lt = 53,34 Hl   254 | 5334 | 21 mal.
508
254
254

12) Dividire 668 Kgr 86 Dgr 5 gr durch 1 Kgr 83 Dgr!

Ausrechnung.

1 Kgr 83 Dgr = 1,83 Kgr   1,83 | 668,865 |
668 Kgr 86 Dgr 5 gr = 668,865 Kgr   183 | 66886,5 | 365,5

§. 215. Niedere Sorten von nicht zehntheiligen Münzen, Maßen und Gewichten durch Decimalbrüche in höheren auszudrücken.

(Reduciren.)

Nachdem unsere Schüler diejenigen Kreuzerzahlen, welche sich in Decimaltheile der Gulden leicht verwandeln lassen, bereits unter § 210 in Decimalbruchform auszudrücken gelernt haben, so beschränken wir uns hier auf solche Fälle, welche sich ausschließlich für das Zifferrechnen eignen.

Man verwandelt Kreuzer in Gulden, indem man sie durch 60, Tage in Jahre, indem man sie durch 365, Kilogramm in Centner, indem man sie durch 50 dividirt u. s. w.

Um also eine Sorte in einen Decimalbruch der nächst höheren zu verwandeln, so dividirt man dieselbe durch die treffende Reduktionszahl.

1) 219 Tage sind so viel Jahre, als 365 Tage darin enthalten sind.

365	2 1 9,0	0,6 Jahre.
	2 1 9 0	

2) $41\frac{1}{2}$ kr. sind so viel Gulden, als 60 kr. darin enthalten sind.

60	$41\frac{1}{2}$	Oder:	60	$41\frac{1}{2}$	
2	2		2	2	
120	83,0	0,69166 ... fl.	12~~0~~	8,3	0,69166 ... fl.
	720			72	
	1100	Nahezu 0,69 fl.		110	
	1080			108	
	200			20	
	120			12	

3) Um 37 Wochen 5 Tg. 18 Std. durch einen Decimalbruch in Jahren auszudrücken, so verwandelt man sowohl die 18 Stunden, als die 37 Wch. in Tage. 18 Stunden = $\frac{3}{4}$ Tage.

Ausr. 37 Wch. $5\frac{3}{4}$ Tg.
$\times$ 7

365	$264\frac{3}{4}$ Tg.	
4	4	
1460	1059	0,725... Jahre.

4) 46,75 Kilogramm sind so viel Centner, als 50 Kilogramm darin enthalten sind.

50	46,75	0,935 Ctr.	Oder:	50	46,75	
	45 0			5	4,675	0,935 Ctr.
	1 75					
	1 50					
	250					
	250					

§. 216. Divisionsaufgaben mit der angewandten Zahl.

1) Kosten 10 Hektoliter 378 Mark, so kostet 1 Hektoliter $\frac{1}{10}$ von 378 Mark = 37,8 Mark = 37 Mark 80 Pfg.

2) Kostet das Hektar Wiesen 1585 Mark, so kostet das Ar $\frac{1}{100}$ von 1585 Mark = 15,85 Mark = 15 Mark 85 Pfg.

3) Kostet 1 Kilogramm feines Gold 2790 Mark, so kostet 1 Gramm $\frac{1}{1000}$ von 2790 Mark = 2,790 Mark = 2 Mark 79 Pfg.

4) Kostet das Hektar Bauplatz 12500 Mark, so kostet 1 □ᵐ $\frac{1}{10000}$ von 12500 Mark = 1,2500 Mark = 1 Mark 25 Pfg.

5) Theilen 8 Erben 1756 Mark 60 Pfg. unter sich, so erhält einer derselben $\frac{1}{8}$ davon.

a.

8 | 1756 M. 60 Pfg. | 219 M.
15
76
8 | 460 Pfg. | 57,5 Pfg.
60
4,0

b.

8 | 1756,60 M. | 219,575 M.
15 = 219 M. 57,5 Pfg.
76
4,6
60
40

6) Kostet 1 Hektoliter 48 fl., so kostet 1 Liter $^1/_{100}$ von 48 fl. = 0,48 fl.
60
28,80 kr. = 28 kr. 3 pf. (Nw.)

7) Wenn 3 m 75 cm Tuch ein Kleidungsstück geben, so geben 100 m desselben so viele solcher Kleidungsstücke, als 3 m 75 cm darin enthalten sind.

a.

375 cm | 10000 cm | 26 Kl.
750:
2500
2250
250 cm Rest

b.

3,75 m | 100,00 m | 26 Kl.
75 0:
25 00
22 50
2,50 m Rest.

8) Zur Heizung einer Dampfmaschine gehen täglich 8 Ctr. 50 Pfd. Steinkohlen auf; wie lange reichen 360 Ctr.?

a.

85Ø Pfd. | 3600Ø Pfd. | $42^6/_{17}$ Tg.
340:
200
170
30 = 6/17
85

b.

8,50 Ctr. | 360,00 Ctr. |
85Ø | 360 0Ø | $42^6/_{17}$ Tg

§. 217. Gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln.

Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, heißt: ihn in 10teln, in 100teln, in 1000teln u. s. w. ausdrücken. In 10tel lassen sich solche gemeine Brüche verwandeln, deren Nenner in 10 aufgeht, also Halbe und Fünftel; in 100tel solche, deren Nenner in 100 aufgeht, also Halbe, 4tel, 5tel, 10tel, 20stel, 25stel, 50stel; in 1000tel solche, deren Nenner in 1000 aufgeht, also Halbe, 4tel, 5tel, 8tel u. s. w.

Folgende gemeine Brüche werden nun frei im Kopfe in Decimalbrüchen ausgedrückt: $^1/_2$, $^1/_4$, $^3/_4$; $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$, $^4/_5$; $^1/_8$, $^3/_8$, $^5/_8$, $^7/_8$; $^1/_{10}$, $^3/_{10}$, $^7/_{10}$, $^9/_{10}$; $^1/_{20}$, $^7/_{20}$, $^{13}/_{20}$, $^{19}/_{20}$; $^1/_{25}$ u. s. w.

1 Ganzes = $^{10}/_{10}$ = $^{100}/_{100}$ = $^{1000}/_{1000}$; also ist $^1/_2$ = 0,5 = 0,50 = 0,500; $^1/_4$ = 0,25 = 0,250; $^3/_4$ = 0,75 = 0,750; $^1/_5$ = 0,2 = 0,20 = 0,200; $^2/_5$ 2c.

Es kommt jedoch auch vor, daß man gemeine Brüche in Decimalbrüchen auszudrücken hat, deren Nenner in 10, oder 100, oder 1000 **nicht** aufgehen, z. B. $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_6$, $^5/_6$, $^1/_7$, $^2/_7$ ꝛc. Wie wird nun in diesem Falle verfahren? **Antwort:** Bei $^1/_3$ eben so, wie man $^1/_3$ Meter in Decimeter, Centimeter und Millimeter verwandelt. $1^{m} = 10^{dm}$; $^1/_3{}^{m} = 3^{dm}$, Rest $1^{dm} = 10^{cm}$; $^1/_3$ von $10^{cm} = 3^{cm}$, Rest $1^{cm} = 10^{mm}$; $^1/_3$ von $10^{mm} = 3^{mm}$, Rest 1^{mm}. Der 3. Theil von 1^{mm} ist so unbedeutend, daß er unberücksichtigt bleiben kann. Also ist $^1/_3{}^{m}$ oder der 3. Theil von $1^{m} = 3^{dm}\ 3^{cm}\ 3^{mm}$. Wie wirst du also den Bruch $^1/_3$ in einen Decimalbruch verwandeln? ($1 = {}^{10}/_{10}$; $^1/_3 = {}^3/_{10}$, Rest $^1/_{10} = {}^{10}/_{100}$; $^1/_3$ von $^{10}/_{100} = {}^3/_{100}$, Rest $^1/_{100} = {}^{10}/_{1000}$; $^1/_3$ von $^{10}/_{1000} = {}^3/_{1000}$, Rest $^1/_{1000}$. Also ist $^1/_3$ nahezu $= {}^3/_{10} + {}^3/_{100} + {}^3/_{1000} = 0{,}333$.

Bei $^2/_3$ heißt es: $^1/_3$ oder der 3. Theil von 2 Ganzen ist **kein** Ganzes; 2 G. $= {}^{20}/_{10}$; $^1/_3$ von $^{20}/_{10} = {}^6/_{10}$, Rest $^2/_{10} = {}^{20}/_{100}$; $^1/_3$ von $^{20}/_{100} = {}^6/_{100}$, Rest $^2/_{100} = {}^{20}/_{1000}$ u. s. f.

Um einen gemeinen Bruch, z. B. $^7/_8$, **schriftlich** in einen Decimalbruch zu verwandeln, so verfährt man wie folgt:

$^7/_8 = 7$, getheilt durch 8. Ich suche also den 8. Theil von 7.

```
8 | 7,0 | 0,875
  | 64  |
    60
    56
    40
    40
```

Der 8te Theil von 7 **Ganzen** = 0 Ganze; Decimalkomma! 7 Ganze = 70 **Zehntel**; der 8te Theil von 70 Zehnteln = 8 Zehntel, Rest 6 Zehntel; 6 Z. = 60 **Hundertel**; der 8te Theil von 60 H. = 7 H., Rest 4 H.; 4 Hundertel = 40 **Tausendtel**; der 8te Theil von 40 T. = 5 Tausendtel. $^7/_8$ oder der 8te Theil von 7 = 0,875.

$^5/_9 = ?$

```
9 | 5,0 | 0,555...
  | 45  |
    50
    45
    50
    45
     5
```

Der 9te Th. von 5 G. = 0 G.; Komma! 5 G. = 50 Zehntel; der 9te Th. von 50 Zehnteln = 5 Z., Rest 5 Z.; 5 Zehntel = 50 Hundertel; der 9te Th. von 50 H. = 5 H. u. s. f. Bei fortgesetzter Theilung würde sich immer 5 als Rest, im Quotienten also auch immer die Ziffer 5 ergeben. Der Bruch $^5/_9$ läßt sich daher **nicht vollständig** als Decimalbruch ausdrücken. Darum setzt man $^5/_9 = 0{,}555\ldots$

Verwandelt man $^7/_8$ in einen Decimalbruch, so geht die Division zuletzt auf; $^7/_8$ ist genau 0,875. Bei $^5/_9$ geht die Division nicht auf; $^5/_9$ ist also nicht genau 0,555. Der gemeine Bruch wird aber um so genauer durch einen Decimalbruch ausgedrückt, je länger man die Division fortsetzt. Für gewöhnlich genügen drei Decimalstellen.

Wenn die Division aufgeht, so nennt man den Decimalbruch, welcher sich ergibt, einen **endlichen**; geht die Division **nicht** auf, so heißt der Decimalbruch ein **unendlicher**. Den **unendlichen** Decimalbrüchen werden als Kennzeichen einige Punkte beigefügt.

Endliche Decimalbrüche erhält man von solchen gemeinen Brüchen, deren Nenner entweder Primfaktoren, oder Produkte aus Prim-

Faktoren von 10, oder von 100, oder von 1000 ꝛc. sind. Da nun 10 = 2.5, 100 = 2.2.5.5, 1000 = 2.2.2.5.5.5 ꝛc., so folgt, daß nur solche gemeine Brüche endliche Decimalbrüche geben, deren Nenner keine anderen Primfaktoren als 2 oder 5, oder als 2 und 5 haben. Die Anzahl der erhaltenen Decimalstellen ist gleich der höchsten Anzahl der Faktoren 2 oder 5.

$4 = 2.2$, $^3/_4 = 0{,}75$; $8 = 2.2.2$, $^3/_8 = 0{,}375$ u. s. w.
$25 = 5.5$, $^{17}/_{25} = 0{,}68$; $125 = 5.5.5$, $^{17}/_{125} = 0{,}136$ u. s. w.
$80 = 2.2.2.2.5$; $^{49}/_{80} = 0{,}6125$.

Unendliche Decimalbrüche dagegen erhält man von solchen gemeinen Brüchen, welche die Zahl 3 oder Produktzahlen von 3, also 6, 9, 12, 15 ꝛc., oder eine der Primzahlen 7, 11, 13, 17, 19, 23 ꝛc. zum Nenner haben.

§. 218. Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln.

a. Endliche Decimalbrüche.

$0{,}5 = ^1/_2$; $0{,}6 = ^3/_5$; $0{,}25 = ^1/_4$; $3{,}75 = 3^3/_4$; $0{,}85 = ^{17}/_{20}$.

Es ist dieß also nichts Anderes als ein Kürzen. Um einen endlichen Decimalbruch schriftlich in einen gemeinen zu verwandeln, so gibt man demselben den ihm zukommenden Nenner und bringt ihn dann durch Kürzung auf den kleinsten Ausdruck. Z. B.

$$0{,}25 = ^{25}/_{100} = ^1/_4;\ 0{,}875 = ^{875}/_{1000} = ^7/_8.$$

b. Unendliche Decimalbrüche.

Um das Verfahren, unendliche Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln, kennen zu lernen, sehen wir zu, wie jene aus diesen entstehen. Wir lassen zu diesem Zwecke die gemeinen Brüche $^1/_9$, $^2/_9$, $^3/_9$ ꝛc. in Decimalbrüchen ausdrücken. Dabei ergibt sich, daß

$^1/_9 = 0{,}111\ldots$ Hier wiederholt sich bei jedem Decimalbruche
$^2/_9 = 0{,}222\ldots$ eine und dieselbe Ziffer. Es sind dieß Decimal-
$^3/_9 = 0{,}333\ldots$ brüche mit einstelligen Perioden (1), (2),
u. s. w. (3). Die Ziffer der Periode und der Zähler des entsprechenden gemeinen Bruches sind gleich. Ein derartiger Decimalbruch muß daher einem gemeinen Bruche gleich sein, der die Ziffer der Periode zum Zähler und 9 zum Nenner hat. Der Decimalbruch $0{,}3333\ldots = ^3/_9 = ^1/_3$, $0{,}666\ldots = ^6/_9 = ^2/_3$; $0{,}888\ldots = ^8/_9$.

Hierauf lassen wir die Brüche $^1/_{99}$, $^2/_{99}$, $^3/_{99}$, $^{27}/_{99}$ in Decimalbrüche verwandeln. Als Resultat ergibt sich, daß

$^1/_{99} = 0{,}(01)0101\ldots$ Hier wiederholen sich bei jedem Decimal-
$^2/_{99} = 0{,}(02)0202\ldots$ bruche zwei Ziffern. Es sind also Decimal-
$^3/_{99} = 0{,}(03)0303\ldots$ brüche mit zweistelligen Perioden.
$^{27}/_{99} = 0{,}(27)2727\ldots$ Die geltenden Ziffern der Periode und der Zähler des gemeinen Bruches sind auch hier wieder gleich. Ein Decimalbruch mit einer zweistelligen Periode muß daher einem gemeinen Bruche gleich sein, der die Ziffern der Periode zum Zähler

und 99 zum Nenner hat. 0,(01)01 = $^1/_{99}$; 0,(03)03 = $^3/_{99}$ = $^1/_{33}$; 0,(27)27 = $^{27}/_{99}$ = $^3/_{11}$; 0,6363 = $^{63}/_{99}$ = $^7/_{11}$; 0,2323 = $^{23}/_{99}$.

Endlich lassen wir auch Brüche mit dem Nenner 999 in Decimalbrüche verwandeln.

$^1/_{999}$ = 0,(001)001. . .
$^2/_{999}$ = 0,002002 . . .
$^3/_{999}$ = 0,003003 . . .
$^{27}/_{999}$ = 0,027027 . . .
$^{756}/_{999}$ = 0,756756 . . .

Hier bilden sich Decimalbrüche mit dreistelligen Perioden. So viel 999stel der gemeine Bruch enthält, eben so viele 1000tel enthält die erste Periode des Decimalbruches. Soll daher ein Decimalbruch mit einer dreistelligen Periode auf einen gemeinen Bruch zurückgeführt werden, so ist für die 1000tel eine gleiche Anzahl 999stel zu setzen. 0,001001 = $^1/_{999}$; 0,003,003 = $^3/_{999}$ = $^1/_{333}$; 0,756756 = $^{756}/_{999}$ = $^{28}/_{37}$.

Um also überhaupt einen periodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, so setzt man die Periode selbst als Zähler und als Nenner so viele 9, als die Periode Stellen hat. 0,33443344... = $^{3344}/_{9999}$ = $^{304}/_{909}$.

Decimalbrüche, die nicht gleich mit den ersten Stellen periodisch werden, nennt man unrein periodisch.

Geht der Periode eine Null vorher, wie bei 0,0555 . . .; so rückt man das Komma um eine Stelle weiter rechts, wodurch der Bruch 10mal so groß und rein periodisch wird, verwandelt ihn dann in einen gemeinen Bruch und theilt diesen wieder durch 10. Statt 0,0555 . . . setzt man also 0,555 . . .; 0,555 . . . = $^5/_9$; $^1/_{10}$ × $^5/_9$ = $^5/_{90}$ = $^1/_{18}$. Bei 0,008181 . . ., wo 2 Nullen vorhergehen, setzt man 0,8181 . . . = $^{81}/_{99}$; $^1/_{100}$ × $^{81}/_{99}$ = $^{81}/_{9900}$ = $^9/_{1100}$.

Gehen statt der Nullen Ziffern voraus, so wird der Decimalbruch zerlegt. 0,3111 . . = 0,3 + 0,0111; 0,3 = $^3/_{10}$; 0,0111 = $^1/_{90}$; $^3/_{10}$ + $^1/_{90}$ = $^{14}/_{45}$. Noch ein Beispiel: 0,9166 . . . = 0,91 + 0,00666; 0,91 = $^{91}/_{100}$; 0,0066 . . . = $^6/_{900}$ = $^2/_{300}$; $^{91}/_{100}$ + $^2/_{300}$ = $^{275}/_{300}$ = $^{11}/_{12}$.

Aufgaben.

1) 0,333 . . .	5) 0,2424 . . .	9) 0,9333 . . .	13) 0,77272 . . .
2) 0,666 . . .	6) 0,549549 . . .	10) 0,0954954 .	14) 0,40909 . . .
3) 0,3636 . . .	7) 0,711711 . . .	11) 0,91666 . . .	15) 0,851851 . .
4) 0,9393 . . .	8) 0,296296 . . .	12) 0,564545 . .	16) 0,0909 . . .

§. 219. Gewöhnliche Brüche und Decimalbrüche in Verbindung.

Wenn in einer Rechnung gewöhnliche Brüche neben Decimalbrüchen vorkommen, so werden sie bei Additions- und Subtraktions-Aufgaben zuerst in Decimalbrüche verwandelt; bei Multiplikations- und Divisionsaufgaben empfiehlt sich das Verfahren, welches angewendet wird, wenn die eine Zahl ein gemeiner Bruch und die andere eine ganze Zahl ist.

Beisp. 1. $73{,}3788 + 19^3/_8 + 0{,}5982 + 25^3/_4 = ?$

Ausr.

$$\begin{array}{r} 73{,}3788 \\ 19{,}375 \\ 0{,}5982 \\ 25{,}75 \\ \hline 119{,}102 \end{array}$$

Beisp. 2. $46{,}7386 - 17^5/_6 = ?$

Ausr.
$$\begin{array}{r} 46{,}7386 \\ 17{,}8333 \\ \hline 28{,}9053 \end{array}$$
Genauer:
$$\begin{array}{r} 46{,}73860 \\ 17{,}83333 \\ \hline 28{,}90527 \end{array}$$

Beisp. 3. $74{,}427$, multiplicirt durch $^7/_{12} = ?$

Ausr.
$$\frac{\overset{24{,}809}{\cancel{74{,}427}} \times 7}{1 \times \underset{4}{\cancel{12}}} = \frac{173{,}663}{4} = 43{,}41575$$

Beisp. 4. Wie viel ist $3^3/_4 \times 5{,}23$?

Ausr.
$$\frac{15 \times 5{,}23}{4 \times 1} = \frac{78{,}45}{4} = 19{,}6125$$

Beisp. 5. Wie oft ist $1^1/_4$ in $2{,}75$ enthalten?

$$\begin{array}{r|r|l} 1^1/_4 & 2{,}75 & \\ & 4 & \\ \hline 5 & 11{,}00 & 2{,}2 \end{array}$$

Oder:
$$\frac{2{,}75 : 1^1/_4}{2{,}75 : {}^5/_4} \quad \overset{0{,}55}{=} \frac{\cancel{2{,}75} \times 4}{1 \times \cancel{5}} = 2{,}2$$

Beisp. 6. Dividire $198^1/_3$ durch $4{,}9$!

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r|r|l} 4{,}9 & 198^1/_3 & \\ 3 & 3 & \\ \hline 14{,}7 & 595{,}0 & \\ \hline 147 & 5950 & 40^{10}/_{21} \end{array}$$

Oder:
$$\frac{198^1/_3 : 4{,}9}{\frac{595}{3} : \frac{4{,}9}{1}} = \frac{\overset{85}{\cancel{595}} \times 1}{3 \times \underset{0{,}7}{\cancel{4{,}9}}} = \frac{85}{2{,}1}$$
$$= 40{,}476 \ldots$$

§. 220. Vermischte Aufgaben über die Grundrechnungsarten mit der angewandten Zahl.

Aufgabe 1. Die Schrannenpreise waren per Hektoliter 12 Mark 45 Pfg., 13 Mark 80 Pfg., 14 Mark 25 Pfg. und 15 Mark. Wie hoch berechnet sich der Durchschnitts- oder Mittelpreis per Hektoliter?

Ausr. a.

	Mark	Pfg.	
	12	45	
	13	80	
	14	25	
	15	00	
4	55	50	13 M. 87,5 pf.

b.

	12,45 Mark	
	13,80 „	
	14,25 „	
	15,00 „	
4	55,50 Mark	13,875 M.

Aufgabe 2. Aus drei Ballen Tuch von $28\frac{3}{5}$ Meter, 31,55 Meter und 33,57 Meter wurden 24 Waffenröcke verfertigt, und 1 Meter 32 Centimeter blieben übrig. — Wie viel Tuch ist zu Einem Rocke verwendet worden?

Aufl. Zuerst addire ich die 3 Ballen. Diese wurden aber nicht vollständig verwendet, sondern es blieb ein Rest von 1 Meter 32 Centimtr. Um zu finden, wie viel Tuch zu den 24 Röcken wirklich verwendet worden ist, so ziehe ich 1 Meter 32 Centimeter von der Summe ab. Von dem, was sich nun ergibt, kommt auf einen Rock der 24. Theil.

Dieß läßt sich in folgender Weise ausdrücken:

$$\frac{28\frac{3}{5}^{m} + 31{,}55^{m} + 33{,}57^{m} - 1^{m}\ 32^{cm}}{24} = x.$$

Der Buchstabe x bezeichnet die Zahl der Meter und Centimeter, welche wir suchen.

a.
$$\begin{array}{r} 28{,}60^{m} \\ 31{,}55 \\ 33{,}57 \\ \hline 93{,}72^{m} \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 93{,}72^{m} \\ -\ 1{,}32 \\ \hline 92{,}40^{m} \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r|l|l} 24 & 92{,}40^{m} & 3{,}85^{m} \\ & 72 & \\ & \overline{20{,}4} & \\ & 192 & \\ & \overline{\ 120} & \\ & \ 120 & \end{array}$$

$$x = 3{,}85^{m} = 3^{m}\ 85^{cm}.$$

Als Probe für die Richtigkeit dieser Ausrechnung folgt nun

Aufgabe 3. Aus 3 Ballen Tuch wurden 24 Waffenröcke verfertigt. Zu jedem derselben wurden $3{,}85^{m}$ verwendet, und ein Stück von $1{,}32^{m}$ blieb übrig. Wenn nun der eine Ballen Tuch $28{,}60^{m}$ und der andere $31{,}55^{m}$ hatte, wie groß war der dritte?

a. Zu den 24 Waffenröcken wurden $24 \times 3{,}85^{m}$ verwendet.

$$\begin{array}{r} 3{,}85^{m} \\ \times\ 24 \\ \hline 1540 \\ 770\ \\ \hline 92{,}40^{m} \end{array}$$

b. Die 3 Ballen enthielten also mit dem Reste $92{,}40^{m} + 1{,}32^{m}$.

$$\begin{array}{r} 92{,}40^{m} \\ +\ 1{,}32 \\ \hline 93{,}72^{m} \end{array}$$

c. Der erste und zweite Ballen betrugen $28{,}60^{m} + 31{,}55^{m}$.

$$\begin{array}{r} 28{,}60^{m} \\ +\ 31{,}55 \\ \hline 60{,}15^{m} \end{array}$$

d. Folglich hatte der dritte Ballen $93{,}72^{m} - 60{,}15^{m}$.

$$\begin{array}{r} 93{,}72^{m} \\ -\ 60{,}15 \\ \hline 33{,}57^{m} \end{array}$$

§. 221. Schlußrechnung.

Aufgabe 1. Ein Hektoliter Wein zu 45 Mark 65 Pfg.; wie berechnen sich 17 Hektoliter?

Aufl. Wenn 1 Hl Wein 45 Mark 65 Pfg. kostet, so kosten 17 Hl 17 × 45 Mark 65 Pfg =

a.	b.
4 5 6 5 Pfg.	45,65 Mark
× 1 7	× 17
3 1 9 5 5	31955
4 5 6 5	4565
7 7 6|0 5 Pfg.	776,05 Mark

= 776 Mark 5 Pfg.

Aufgabe 2. Von 48 Hektar Hopfengarten betrug die Ernte 167 Ctr. 40 Pfd.; welches ist der durchschnittliche Ertrag von 1 Hektar?

Aufl. Wenn 48 Hektar 167 Ctr. 40 Pfd. Hopfen ertrugen, so ertrug 1 Hektar den 48. Theil von 167 Ctr. 40 Pfd.

Ausr. a. b.

48 | 16740 Pfd. | 348,75 Pfd. 48 | 167,40 Ctr. | 3,4875 Ctr.

= 3 Ctr. 48,75 Pfd. = 3 Ctr. $48^3/_4$ Pfd

Aufgabe 3. 100 Mark geben jährlich $5^1/_2$ Mark Zins; wie viel Zins geben 1250 Mark jährlich?

Aufl. 1250 = $12^1/_2$ × 100 = 12,5 × 100. Wenn also 100 Mark $5^1/_2$ Mark Zins geben, so geben 1250 Mark $12^1/_2$ × $5^1/_2$ oder 12,5 × 5,5 Mark Zins.

Ausr. a. $\dfrac{12^1/_2 \times 5^1/_2}{^{25}/_2 \times {}^{11}/_2} = \dfrac{25 \times 11}{2 \times 2} = \dfrac{275 \text{ M.}}{4} = 68$ Mark 75 Pfg.

Ausr. b. 12,5 × 5,5 Mark = 68,75 Mark = 68 Mark 75 Pfg.

Aufgabe 4. Ein Kapital von 1875 Mark wirft jährlich 101 Mark 25 Pfg. Zins ab; wie viel beträgt der jährliche Zins vom Hundert?

Aufl. 1875 = $18^3/_4$ × 100 = 18,75 × 100. Wenn $18^3/_4$ Hundert Mark 101 Mark 25 Pfg. oder $101^1/_4$ Mark Zins ertragen, so erträgt 1 Hundert $101^1/_4$ Mark, getheilt durch $18^3/_4$, oder 101,25 Mark, getheilt durch 18,75.

Ausr. a. $\dfrac{101^1/_4 : 18^3/_4}{^{405}/_4 : {}^{75}/_4} = 405 : 75 = 5^2/_5$ Mark.

Ausr. b. 101,25 : 18,75 = 10125 : 1875 = 5,4 Mark.

Aufgabe 5. Für 45 Pfg. kauft man 4 Kgr 32 Dgr; wie viel erhält man für 3 Mark 60 Pfg.?

Aufl. 3 Mark 60 Pfg. = 360 Pfg. = 4 × 90 = 4 × 2 × 45 = 8 × 45 Pfg. Wenn man also für 45 Pfg. 4 Kgr 32 Dgr oder 4,32 Kgr erhält, so erhält man für 3 Mark 60 Pfg. 8 × 4,32 Kgr = 34,56 Kgr.

Aufgabe 6. Wie hoch kommen 1,24 Kgr, wenn 4,96 Kgr mit 75,9 Mrk. bezahlt werden?

Aufl. 496 = 4 × 124; also ist 4,96 = 4 × 1,24. Wenn daher 4,96 Kgr 75,9 Mrk. kosten, so kosten 1,24 Kgr den 4. Theil von 75,9 Mrk. = 18,975 Mrk. = 18 Mrk. 97,5 Pfg.

Aufgabe 7. 8 Arbeiter verdienen miteinander 62 Mark 72 Pfg.; wie viel erhalten 5 derselben?

Aufl. Ich suche zuerst, was 1 Arbeiter erhält, und dann, wie viel 5 Arbeiter erhalten?

Ausr. 8 Arb. = 62,72 Mark;

$$1 \text{ Arb.} = \frac{62,72}{8} = 7,84 \text{ Mark};$$

5 Arb. = 7,84 Mark × 5 = 39,20 Mark.

Sprechweise; 8 Arbeiter verdienen (ihr Verdienst =) 62,72 Mark; 1 Arbeiter erhält $^1/_8$ davon, also 62,72 Mark, getheilt durch 8; gibt 7,84 Mark. 5 Arbeiter erhalten 5 × 7,84 Mark = 39,20 Mark oder 39 Mark 20 Pfg.

Aufgabe 8. A gab zum Bau einer Eisenbahn 84 Ar Ackerfeld ab und erhielt dafür 2005,50 Mark. Wie viel wird B für 1 Hektar 43 Ar von gleicher Bodengüte erhalten?

Ausr. a. 84 Ar = 2005,50 Mark,

$$1 \text{ Ar} = \frac{2005,50 \text{ M.}}{84} = 23,875 \text{ Mark},$$

143 Ar = 23,875 M. × 143 = 3414,125 Mark
= 3414 Mark 12,5 Pfg.

Ausr. b. 0,84 Hektar = 2005,50 Mark,

$$0,01 \text{ Hektar} = \frac{2005,50 \text{ M.}}{84} = 23,875 \text{ Mark},$$

1,43 Hektar = 23,875 M. × 143 = 3414,125 M.

1 Ar = $^1/_{100}$ Hektar; 84 Ar = $^{84}/_{100}$ Hektar, und 1 Hektar 43 Ar = $^{143}/_{100}$ Hektar. Ich gehe von $^{84}/_{100}$ auf $^1/_{100}$ und von $^1/_{100}$ auf $^{143}/_{100}$ Hektar. $^1/_{100}$ ist der 84. Theil von $^{84}/_{100}$, und $^{143}/_{100}$ sind 143mal so viel, als $^1/_{100}$. Wenn daher $^{84}/_{100}$ Hektar 2005,50 Mark kosten, so kostet $^1/_{100}$ Hektar den 84. Theil davon, also 2005,50 Mark, getheilt durch 84 = 23,875 Mark; $^{143}/_{100}$ Hektar kosten 143mal so viel, also 23,875 Mark, multiplicirt mit 143 = 3414,125 Mark = 3414 Mark 12,5 Pfg.

Vermischte Rechnungsarten mit Decimalbrüchen.

1) 0,68 — 0,24393 — 0,138 + 683,2 — 104,50906 + 0,01099
2) 82,46 — 104 + 56,329 — 0,09381 + 311,04472 — 70,223991
3) 7,604 . (0,004 + 5,1) 4) 24 . 8,994 — (5,4321 + 3,245 . 20)
5) (7,742 + 0,25) . (12,1 . 2,6) 6) (18,4 — 12,54) + (3,71 . 8,3)
7) (0,3029 — 0,00817 . 28,9) : 3,29 8) (2319,376 + 0,16 . 0,492) : 2,56
9) $\frac{(2,58 + 9,145 - 6,8899) \,.\, 2,34}{8,853}$ 10) $\frac{(3,714 + 8,2175 - 1,07751) \,.\, 4,75}{6,3847 \,.\, 0,5}$

11) (0,03359 + 638,705 : 6,95 + 0,0547 . 0,825) : 0,0265

12) (21,85+5,10936 : 6980—0,00727 . 0,648+5,341 : 7630) : 7380,649

13) $$\frac{(0{,}09774 : 5{,}43)+(6{,}54 \cdot 0{,}95)}{(3{,}7+0{,}64-1{,}2245) \cdot 0{,}0625}$$ 14) $$\frac{(7{,}4944 : 11{,}71)+(1{,}6184 : 2{,}38)}{0{,}08 \cdot 0{,}176}$$

15) (252,004 : 50,2+3,47892—0,994+0,13127 . 4) : (1,13 . 12,769 — 7,12897)

16) (153,98—31,317 : 42900+0,405 . 0,0925) : (10—1,60968 : 0,456)

17) (0,1331—0,6789 : 46500+39,4 . 4,63) : (12,35—3,41738 : 0,482)

18) (5,2442 : 4034—0,17 . 1,543+3,59301) : (333,07 : 1900—1,63. 0,191 + 39,135393 : 108,9 + 0,006774 . 90)

19) (4,913 : 1,7—9,261 : 2,1+5,9319 : 0,39+0,0825 . 4,1) : (0,29791 : 0,031—1,2167 : 0,23+3,7 . 0,349)

20) $$\frac{(13{,}764+2{,}8769-11{,}965) \cdot 0{,}915-(2{,}36 \cdot 0{,}0834)+0{,}1006095}{(19{,}628-14{,}53) \cdot 0{,}6-(12{,}609+9{,}58) \cdot 0{,}084}$$

21) (81,605 : 42,95+16,327 : 0,0563+48,4489—1,27 . 1,31) : (12,59. 130 — 1666,9 : 2,11 + 1,6367 : 125,9)

22) (2,2 . 2,315 — 5,297684+5,4756 : 23,4+0,36 . 0,2769+2,5 . 2,79) : (129,5029 : 118,81 + 13,24 — 11,978523 + 0,013 . 3,1 . 0,41)

23) (1343,26 : 2,858 — 1,67 . 278,89 + 0,272619 — 159432,3 : 72900 + 10,1861 : 3,7) : (44,951 : 7900—95,53 : 4100 + 530 . 0,00181 — 1,4 : 3,2)

24) 0,0226 . 405 + (82,83 — 68,7 . 0,541) : [881,61+0,597 . 6740 — (173,1 + 454,767 : 0,0723) : (1,4—7265,7 : 89700)].

Ergebnisse:

1) 579	9) 1,278	17) 34,70629
2) 275,515919	10) 16,15	18) 4
3) 38,810816	11) 3470,895	19) 2,5
4) 145,5239	12) 0,00296	20) 3,5
5) 251,42832	13) 32	21) 0,4
6) 36,653	14) 93,75	22) 3
7) 0,0203	15) 1,1	23) 10,1
8) 906,037	16) 23,80475	24) 10,17

Sechster Cursus.

Verhältnißrechnungen.

Erste Abtheilung.

Verhältnißbestimmungen.

§. 222. Das Verhältniß.

Anschauen und Sprechen.

a———— a ist 1 Theil, wie b zwei Theile hat.
b————|———— b hat 2 Theile, wie a 1 Theil ist.
Man sagt daher: a verhält sich zu b, wie 1 zu 2, und
b verhält sich zu a wie 2 zu 1.

a———|———— a hat 2 Thl., wie b 3 Thl. hat.
b————|————|———— b hat 3 Thl., wie a 2 Thl. hat.
Man sagt daher: a verhält sich zu b, wie 2 zu 3, und
b verhält sich zu a, wie 3 zu 2.

Fragen und Aufgaben.

1) Was heißt: Eine Linie verhält sich zu einer andern, wie 1 zu 4? — Wann kann man sagen: Eine Linie verhält sich zu einer andern, wie 3 zu 4? — Hier ist ein Strich; mache einen andern, zu dem sich der gegebene verhält, wie 4 zu 5! (Der gegebene Strich wird in 4 gleiche Theile getheilt und der gesuchte 5mal so groß gemacht, als 1 Theil ist.) — Mache zwei Striche, die sich verhalten, wie 3 zu 5! — Zwei andere, die sich verhalten, wie 4 zu 7!

2) Zeichne ein Rechteck, an welchem sich die Breite zur Länge verhält wie 5 zu 8! (Der Schüler zieht eine wagrechte Linie, theilt sie in 8 gleiche Theile und nimmt 5 derselben zur Breite oder Höhe.) Zeichne ein Rechteck nach demselben Verhältnisse, jede Seite aber zweimal so groß, als zuvor! — Noch eines, jede Seite nur halb so groß!

3) Dieß Fenster ist 7^{dm} br. und 12^{dm} hoch; ich will es im verkleinerten Maßstabe an die Wandtafel zeichnen, und für das Decimeter ein Centimeter annehmen; wie breit und hoch werde ich es machen müssen?

Eine Zimmerthür ist 18^{dm} hoch und 8^{dm} breit; wie muß ich die Zeichnung davon machen, das Decimeter zu 1^{cm} angenommen?

§. 223. Das Zahlenverhältniß.

a. Durch unmittelbare Auffassung.

Anschauen und Sprechen.

• • 2=1×2 } 2 ist 1 Theil, wie 4 2 Theile hat;
• • | • • 4=2×2 } 4 hat 2 Th., wie 2 1 Theil ist.

Man sagt daher: 2 verhält sich zu 4, wie 1 zu 2, und 4 verhält sich zu 2, wie 2 zu 1.

• • | • • 4=2×2 } 4 hat 2 Thl., wie 6 3 Thl. hat, und
• • | • • | • • 6=3×2 } 6 hat 3 Thl., wie 4 2 Thl. hat.

Man sagt daher: 4 verhält sich zu 6, wie 2 zu 3, und 6 verhält sich zu 4, wie 3 zu 2.

• • • 3=1×3 } 3 ist 1 Thl., wie 6 2 Thl. hat, und
• • • | • • • 6=2×3 } 6 hat 2 Thl., wie 3 1 Thl. ist.

Man sagt daher: 3 verhält sich zu 6, wie 1 zu 2, und 6 verhält sich zu 3, wie 2 zu 1.

• • • | • • • 6=2×3 } 6 hat 2 Thl., wie 9 3 Thl. hat, und
• • • | • • • | • • • 9=3×3 } 9 hat 3 Thl., wie 6 2 Thl. hat.

Man sagt daher: 6 verhält sich zu 9, wie 2 zu 3, und 9 verhält sich zu 6, wie 3 zu 2.

Fragen und Aufgaben.

a. Wie verhält sich 6 zu 8? Antwort: 6=3×2, 8=4×2, 6 hat also 3 Thl, wie 8 4 Theile hat; 6 verhält sich daher zu 8, wie 3 zu 4. — In welchem Verhältnisse steht 15 zu 10? Antw.: Das gemeinschaftliche Maß ist 5; 15=3×5; 10=2×5; 15 hat also 3 Thl., wie 10 2 Thl. hat; daher verhält sich 15 zu 10, wie 3 zu 2. — Dergl. Aufg. mehr!

b. Nennt mir 2 Zahlen, die sich verhalten, wie 1 zu 2! (2 und 4, 3 und 6, 4 und 8 ꝛc.) Zwei Zahlen, die sich verhalten, wie 1 zu 3! wie 1 zu 4! wie 2 zu 3!

c. Wie verhält sich $^1/_2$ zu $^1/_4$? Antwort: $^1/_2={}^2/_4$; $^1/_2$ hat also 2 Th., wie $^1/_4$ 1 Th. ist; $^1/_2$ verhält sich daher zu $^1/_4$ wie 2 zu 1. — Wie verhält sich $^1/_3$ zu $^1/_5$? Antwort: $^1/_3 = {}^5/_{15}$, $^1/_5 = {}^3/_{15}$, $^1/_3$ hat also 5 Theile, wie $^1/_5$ 3 Theile hat; daher verhält sich $^1/_3$ zu $^1/_5$ wie 5 zu 3. — Wie verhält sich $^1/_6$ zu $^1/_7$? Antwort: $^1/_6$ verhält sich zu $^1/_7$ wie $^7/_{42}$ zu $^6/_{42}$ oder wie 7 : 6. Hieraus folgt, daß **Brüche mit dem Zähler 1 sich umgekehrt verhalten wie ihre Nenner.**

d. In welchem Verhältniß steht 1 zu $1^1/_4$? Antwort: $1={}^4/_4$, $1^1/_4 = {}^5/_4$; 1 verhält sich also zu $1^1/_4$ wie 4 zu 5. — Wie ist das Verhältniß von $^3/_4$ und $^4/_5$? Antwort: $^3/_4 = {}^{15}/_{20}$, $^4/_5 = {}^{16}/_{20}$; mithin verhält sich $^3/_4$ zu $^4/_5$ wie 15 zu 16.

Dergleichen Aufgaben noch mehr.

b. Durch Division

Was muß ich thun, um zu finden, wie sich die Länge des Stabes zur Länge eines Baumstammes verhält?

a. Ich messe sowohl den Stab, als den Stamm mit einem Maße, das auf beide angewendet werden kann, z. B. mit dem Meter. Ist der Stab 3^m und der Stamm 24^m lang, so hat jener seiner Länge nach 3 Theile, wie dieser 24 Theile hat; die Länge des Stabes verhält sich daher zur Länge des Baumstammes, wie 3 zu 24 oder wie 1 zu 8.

b. Ich messe die Länge des Baumstammes mit dem Stabe selbst. Finde ich, daß die Länge des Stabes in der Länge des Stammes 8mal enthalten ist, so ist die Länge des Stabes 1 Theil, wie die Länge des Stammes 8 Theile hat; daher verhält sich jene zu dieser wie 1 zu 8.

Auf dieselbe zweifache Weise finde ich auch, wie sich eine Zahl zur andern, z. B. 12 zu 30 verhält.

a. Ich messe beide Zahlen durch ihr gemeinschaftliches Maß, nämlich durch 6; $12=2\times6$, $30=5\times6$; 12 hat also 2 Theile, wie 30 5 Theile hat; 12 verhält sich daher zu 30, wie 2 zu 5.

b. Ich betrachte die Zahl 12 selbst als das Maß und sehe zu, wie oft sie in 30 enthalten ist. 12 in $30=2^1/_2$; 12 ist also 1 Thl., wie 30 $2^1/_2$ Thl. hat; daher verhält sich 12 zu 30, wie 1 zu $2^1/_2$ oder wie $^2/_2$ zu $^5/_2$ oder wie 2 zu 5.

Wie sich zwei gegebene Zahlen zu einander verhalten, wird daher auch gefunden, wenn man eine davon als Maß annimmt und zusieht, wie oft sie in der andern enthalten ist. In diesem Falle ergibt sich zunächst, daß sich die als Maß gebrauchte Zahl zur andern verhält, wie Eins zu dem Quotienten.

12 in 24 = 2; 12 ist also 1 Thl., wie 24 2 Theile hat; 12 verhält sich daher zu 24 wie 1 zu 2.

16 in 60 = $3^3/_4$; 16 ist also 1 Theil wie 60 $3^3/_4$ Theile hat; daher verhält sich 16 zu 60, wie 1 zu $3^3/_4 = {}^4/_4$ zu $^{15}/_4 = 4$ zu 15.

Weil das Verhältniß zweier Zahlen auch durch Anwendung der Division, d. i. dadurch gefunden wird, daß man sucht, wie oft die eine von ihnen in der andern enthalten ist; so wird es auch durch das Zeichen der Division bezeichnet. Steht daher 4 : 8, so heißt es: Wie verhält sich 4 zu 8? Und um zu finden, wie sich 4 zu 8 verhält, so wird gesucht, wie oft 4 in 8 enthalten ist.

Fragen.

1) Wie verhält sich 9 zu 72? 9 liegt in 72 8mal; 9 verhält sich daher zu 72, wie 1 : 8. — In welchem Verhältniß steht 18 zu 6? 18 liegt in 6 $^1/_3$mal; 18 verhält sich daher zu 6, wie 1 zu $^1/_3$, in ganzen Zahlen ausgedrückt, wie 3 : 1. — Wie verhält sich 8 zu 44? 8 liegt in 44 $5^1/_2$mal; 8 verhält sich also zu 44, wie 1 : $5^1/_2$, in gleichen Theilen ausgedrückt, wie $^2/_2$: $^{11}/_2$, in ganzen Zahlen, wie 2 zu 11. Dergleichen Aufgaben noch mehr.

2) In welchem Verhältniß stehen:

a. 10^m zu 25^m? 80Kgr zu 95Kgr? 36lt zu 60lt? 18 Mark zu 48 Mark?

b 40 lt zu 60 lt? 40^m zu 60^m? 40 Liter zu 60 Meter?

60 Meter lassen sich nicht durch 40 Liter messen; Liter sind nicht in Meter enthalten; Liter und Meter sind Dinge verschiedener Art; ungleichartige Dinge können also nicht im Verhältniß zu einander stehen.

§. 224. Angewandt.

1) Wie ist das Verhältniß zwischen der Mark und dem Gulden?

Aufl. 1 Mark = 35 kr, 1 fl. = 60 kr.; 35 = 7 × 5, und 60 = 12 × 5; die Mark hat also 7 Theile, wie der Gulden deren 12 hat; die Mark verhält sich daher zum Gulden, wie 7 zu 12.

2) In welchem Verhältniß stehen die Mark und der Vereinsthaler zu einander?

Aufl. 1 Mark = 35 kr., 1 Vereinsthaler = 60 + 45 = 105 kr.; 105 = 3 × 35; die Mark ist 1 Theil, wie der Vereinsthaler 3 Theile hat; es verhält sich daher die Mark zum Vereinsthaler, wie 1 zu 3. Der Vereinsthaler gilt 3mal so viel als 1 Mark, und 1 Mark ist $^1/_3$ eines Vereinsthalers.

3) In welchem Verhältniß stehen Silber und Gold zu einander, da das Pfund Silber = 90 Mark und das Pfund Gold = 1395 Mark?

Ausr.

5)	90	1395	
9)	18	279	
	2	31	$15^1/_2$

Der Werth des feinen Silbers verhält sich zum Werthe des feinen Goldes wie 2 zu 31. Das Gold steht also $15^1/_2$mal so hoch als das Silber.

4) Das Hektoliter Roggen kostet 15 Mark 75 Pfg., das Hektoliter Weizen 25 Mark 20 Pfg.; wie verhalten sich die Preise?

a. 15 M. 75 Pfg. = 1575 Pfg.
25 M. 20 Pfg. = 2520 Pfg.

5)	1575	2520
9)	315	504
7)	35	56
	5	8

b. 15 M. 75 Pfg. = $15^3/_4$ M.
25 M. 20 Pfg. = $25^1/_5$ M.

$15^3/_4$	$25^1/_5$	
~~63~~	~~126~~	
5	4	
1	2	
5	8	$1^3/_5$

Die Preise verhalten sich wie 5 : 8; der Weizen steht also $1^3/_5$ mal so hoch als der Roggen.

5) Ein Landmann säete auf ein Feld 1 Hl $42^1/_2$ lt und erntete 17 Hl 10 lt; wie verhalten sich Aussaat und Ernte?

1 Hl $42\frac{1}{2}$ lt = $142\frac{1}{2}$ lt
17 Hl 10 lt = 1710 lt

$142\frac{1}{2}$	1710	
	2	
285	3420	12

Aussaat und Ernte verhalten sich wie 1 : 12; die Ernte beträgt also das 12fache von der Aussaat.

6) Eine gewisse Arbeit wird von einem Manne in 5 Tg., von einer Frau in 8 Tg. vollendet; in welchem Verhältniß stehen die Kräfte?

Ausr. Die Kräfte verhalten sich, wie die Leistungen in gleicher Zeit. Der Mann braucht 5 Tg.; also fertigt er in 1 Tg. $\frac{1}{5}$. Die Frau braucht 8 Tg.; also fertigt sie in 1 Tg. $\frac{1}{8}$. Mithin verhält sich die Kraft des Mannes zu der Kraft der Frau, wie $\frac{1}{5} : \frac{1}{8} = \frac{8}{40} : \frac{5}{40} = 8 : 5$.

7) Das Faß A enthält 8 Hl Wein à $18\frac{2}{5}$ Mrk., das Faß B 12 Hl à $15\frac{1}{3}$ Mrk.; in welchem Werthverhältniß steht der Wein des einen Fasses zu dem des andern?

A $8 \times 18\frac{2}{5}$ Mrk. = $147\frac{1}{5}$ Mrk.
B $12 \times 15\frac{1}{3}$ Mrk. = 184 Mrk.

$147\frac{1}{5}$	184
	5
736	920
92	$115 = 1\frac{1}{4}$.

Der Werth vom Fasse A verhält sich zu dem vom Fasse B, wie 1 zu $1\frac{1}{4}$ oder wie 4 zu 5. B ist also $1\frac{1}{4}$mal so viel werth als A, und A $\frac{4}{5}$mal so viel als B.

Aufgaben.

1) Das neue Pfund = 500 gr, das alte Pfd. = 560 gr; wie verhält sich jenes zu diesem? 2) A verdient sich wöchentlich 8 Mrk. 75 Pfg., B 10 Mrk. 50 Pfg.; in welchem Verhältniß steht ihr Verdienst? 3) Von 2 Weinbergen ertrug der eine 12 Hl 75 lt, der andere 17 Hl; wie ist das Verhältniß? 4) Ein Beamter, der 1250 fl. Gehalt hatte, erhielt 275 fl. Zulage; wie verhält sich sein jetziger Gehalt zu seinem früheren? 5) Ein Haus, das jährlich 64 fl. zu unterhalten kostet, erträgt 380 fl. Miethe; ein anderes, dessen Unterhaltungskosten = 80 fl., wirft 520 fl. Miethe ab; wie verhält sich der Werth des einen Hauses zu dem des andern? 6) Eine Wiese ertrug 72 Ctr. Heu à 2 M. 40 Pfg., eine andere 90 Ctr. à 2 M. 15 Pfg.; in welchem Verhältniß steht der Ertrag und also auch der Werth der einen Wiese zur andern? 7) A verdient in 30 Tg. 45 Mrk., B in 36 Tg. 63 Mrk.; wie verhält sich der tägliche Verdienst beider?

§. 225. Verhältniß und Gleichung.

a. Das Verhältniß in eine Gleichung zu verwandeln.

Erstes Beispiel. Die bayr. Elle verhält sich zum Meter, wie 5 : 6; die bayr. Elle hat also 5 Theile, wie das Meter deren 6 hat.

1 bayr. Elle |——|——|——|——|——|
1 Meter |——|——|——|——|——|——|

Was ergibt sich hieraus?

$^1/_5$ bayr. Elle = $^1/_6$ ^{m}

gleichnamig gemacht,

$^6/_{30}$ bayr. Ell. = $^5/_{30}$ ^{m}

durch 30 multiplicirt,

6 bayr. Ell. = 5^m

Zweites Beispiel. Die Würzb.Elle verhält sich zum Meter wie 7 : 12; sie hat also 7 Theile wie dieses 12.

1 Würzb. Elle |—|—|—|—|—|—|—|

1 Meter |—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|

Was ergibt sich hieraus?

$^1/_7$ Würzb. Elle = $^1/_{12}$ ^{m}

$^{12}/_{84}$ " " = $^7/_{84}$ "

12 " " = 7 "

Anm. Durch 10 : 17 wird das Verhältniß zwischen der Würzburger Elle und dem Meter genauer bezeichnet, als durch 7 : 12.

Drittes Beispiel. 1 Mark = 35 oder 7 × 5 kr., und 1 fl. = 60 oder 12 × 5 kr. Es verhält sich daher die Mark zum Gulden wie 7 : 12; also sind 12 Mark = 7 Gulden. 12 Mark = 12 × 35 kr. = 7 fl.

Aus dem Bisherigen ist ersichtlich, daß **die Zahlen, welche das Verhältniß zweier Dinge bezeichnen, umgestellt die Gleichung derselben ausdrücken.**

b. Die Gleichung in ein Verhältniß zu verwandeln.

Dieß geht zwar schon aus dem Vorigen hervor; wir halten aber die Sache für wichtig genug, sie noch besonders zu behandeln.

Erstes Beispiel. 3 Nürnberger Ellen = 2^m; mithin ist 1 Nürnb. Elle = $^2/_3$ ^{m}

1 Meter |—|—|—|

1 Nürnb. Elle |—|—|

Das Meter hat also 3 Theile, wie die Nürnb. Elle 2 Theile hat; es verhält sich daher zu dieser wie 3 : 2.

Anm. Genauer ist es, zu setzen: 20 Nbg. Ellen = 13^m. So genommen verhält sich die Nbg. Elle zum Meter wie 13 : 20.

Zweites Beispiel. 5 Augsb. Ellen = 3^m; also ist 1 Augsb. Elle = $^3/_5$ ^{m}.

1 Meter |—|—|—|—|—|

1 Augsb. Elle |—|—|—|

Die Augsb. Elle enthält 3 Theile, wie das Meter 5; sie verhält sich daher zu diesem, wie 3 : 5.

Drittes Beispiel. 27 Metzen = 10 Hl; also ist 1 Metzen = $^{10}/_{27}$ Hl; der Metzen hat also 10 Theile, wie das Hektoltr. deren 27 hat, und verhält sich daher zu diesem, wie 10 : 27.

Die Zahlen, welche eine Gleichung von 2 Dingen ausdrücken, bezeichnen umgestellt das Verhältniß derselben.

§. 226. Aufgaben mit Ausrechnung.

1) Drücke den gegenseitigen Werth der Gulden und Vereinsthaler durch eine Gleichung in ganzen Zahlen aus! (1 fl. = 60 kr., 1 Vrsthlr. = 60 + 45 = 105 kr.; der Gulden = 4 × 15, der Vrsthlr. = 7 × 15 kr.; der Gulden verhält sich daher zum Vereinsthlr. wie 4 : 7; also sind 7 fl. = 4 Vrsthlr., und 4 Vrsthl. = 7 fl.

2) Thue dasselbe mit der Mark und dem französischen Franc! (1 Mark = 35 kr., 1 Franc = 28 kr.; 35 = 5 × 7, und 28 = 4 × 7; die Mark verhält sich also zum Franc wie 5 : 4; mithin sind 4 Mark = 5 Franc.)

3) Thue eben dasselbe mit der Mark und dem österreichischen Gulden! (1 Mark = 35 kr., 1 östr. Gulden = 70 kr. sdd.; 70 = 2 × 35; die Mark verhält sich also zum östr. Gulden wie 1 : 2; folglich sind 2 Mark = 1 östr. Gulden.)

4) Welches ist der gegenseitige Werth der süddeutschen und der deutschen Pfennige? 1 Mark = 35 × 4 oder 140 Pfg. sdd. und = 100 Pfg. deutsch. Also sind

140	Pfg.	sdd.	=	100	Pfg.	deutsch,	u.	100	Pfg.	d.	=	140 Pfg. sdd.
14	„	„	=	10	„	„	u.	10	„	„	=	14 „ „
7	„	„	=	5	„	„	u.	5	„	„	=	7 „ „
1	„	„	=	$^5/_7$	„	„	u.	1	„	„	=	$1^2/_5$ „ „

Der süddeutsche Pfennig hat 5 Theile, wie der deutsche 7 hat, jener verhält sich daher zu diesem wie 5 : 7.

5) Die bayr. Elle = 370 pariser Linien, das Meter = 444 par. Linien; wie ist das Verhältniß und die Gleichung? (Die bayr. Elle verhält sich zum Meter, wie 370 : 444 = 5 : 6; mithin sind 6 bayr. Ell. = 5^m.)

6) 6 östr. fl. = 7 südd. fl.; wie verhält sich 1 östr. fl. zu 1 südd. fl.? (6 östr. fl. = 7 südd. fl., 1 östr. fl. = $1^1/_6$ südd. fl.; 1 östr. fl. hat also 7 Theile, wie ein südd. fl. deren 6 hat; also verhält sich 1 östr. fl. zu einem südd. fl. wie 7 : 6.)

7) 5 Pfd. Butter geben $3^3/_4$ Pfd. Schmalz; welches ist das Werthverhältniß? (5 Pfd. Butter = $3^3/_4$ Pfd. Schmalz; 1 Pfd. Butter = $^3/_4$ Pfd. Schm.; der Werth der Butter verhält sich also zu dem des Schmalzes wie $^3/_4$ zu 1 oder wie 3 : 4, d. i. 1 Pfd. Schmalz ist $1^1/_3$ mal so viel werth, als 1 Pfd. Butter.)

8) 11 Klft. Fichtenholz werden gegen 7 Klft. Buchenholz umgetauscht; wie verhalten sich die Preise? (Da 11 Klft. Fichtenholz = 7 Klft. Buchenholz, so verhalten sich die Preise wie 7 zu 11, d. i. der Preis von 1 Klftr. Fichtenholz hat 7 Theile, wie der Preis von 1 Klftr. Buchenholz 11 hat.)

9) 100 Pfd. Wiesenheu sind dem Futterwerthe nach = 90 Pfd. Kleeheu; wie sollen sich hiernach die Preise per Ctr. verhalten? (Da 100 Pfd. Wiesenheu = 90 Pfd. Kleeheu, so steht das Wiesenheu zum Kleeheu, dem Futter- und Geldwerthe nach, im Verhältniß wie 90 zu 100 oder wie 9 zu 10; der Ctr. Kleeheu soll also $1\frac{1}{9}$mal so viel als der Ctr. Wiesenheu kosten.)

10) 200 Pfd. Kartoffeln sind dem Futterwerthe nach = 500 Pfd. Stoppelrüben: wie haben sich hiernach die Preise gleicher Quantitäten zu verhalten? Der Preis der Kartoffeln zu dem der Stoppelrüben wie 5 zu 2.)

Zweite Abtheilung.

Regeldetri- oder Verhältnißrechnungen,

nach den Zahlen und Operationen geordnet.

§. 227. Vorbemerkung.

Die sogenannten Regeldetri- oder Verhältniß-Aufgaben kommen nicht nur sehr häufig im Leben vor, sondern sie geben zugleich eine reiche Ausbeute des vorzüglichsten Bildungsstoffes. Dieses und der Umstand, daß bei gewissen Arten derselben die Zahlen auf Gegenstände angewendet werden, welche eine besondere Betrachtung und Uebung nothwendig machen, sowie das Bedürfniß, für sie beim Zifferrechnen eine bestimmte, die Ausrechnung vereinfachende Form zu haben, ist der Grund ihrer besonderen Behandlung. Unsere Schüler sollen sich jetzt, um eine recht sichere Fertigkeit in der schriftlichen Berechnung der Verhältniß-Aufgaben zu erlangen, eine bestimmte Weise aneignen, die gegebenen Zahlen anzusetzen und die das verlangte Resultat erzielenden Operationen auszuführen. Bevor wir jedoch dazu übergehen, müssen wir uns für eine gewisse Form entscheiden. Denn da sich die Ausrechnung nach der Auflösung richtet und jede andere Auflösung eine andere Ausrechnung zur Folge hat; so sind für die schriftliche Berechnung der Verhältnißaufgaben eben so viele Formen möglich, als es für sie allgemein anwendbare Auflösungsweisen gibt. Wie vielfach aber die Auflösung und demzufolge auch die Ausrechnung einer an sich einfachen Verhältnißaufgabe sein kann, ist aus nachstehendem Beispiel zu ersehen.

Aufgabe. 4 Mtr. kosten 45 Pfg., was kosten 15 Mtr.?

Behandlung.

Erste Aufl. Ich gehe von 4^m auf 1^m und von 1^m auf 15^m.

Ausr. 4^m kosten 45 Pfg.

1^m kostet $\frac{1}{4} \times 45$ Pfg. = $11\frac{1}{4}$ Pfg.

15^m kosten $15 \times 11\frac{1}{4}$ Pfg. = 1 Mark $68\frac{3}{4}$ Pfg.

Zweite Aufl. So vielmal 4^m, so vielmal 45 Pfg.,; 15^m kosten daher so vielmal 45 Pfg., als 4^m in 15^m enthalten sind.

Ausr. 4^m in $15^m = 3^3/_4$; $3^3/_4 \times 45$ Pfg. = 1 Mrk. $68^3/_4$ Pfg.

Dritte Aufl. Ich zerlege die 15^m in $12 + 3$ oder in $3 \times 4 + 2 + 1^m$ und berechne jeden Theil für sich.

Ausr. 4^m kosten 45 Pfg.

12 oder 3×4^m kosten	3×45 Pfg.	=	1 Mrk. 35	Pfg.
2 oder $^1/_2 \times 4^m$ kosten	$^1/_2 \times 45$ Pfg.	=	— Mrk. $22^1/_2$	Pfg.
1 oder $^1/_2 \times 2^m$ kostet	$^1/_2 \times 22^1/_2$ Pfg.	=	— Mrk. $11^1/_4$	Pfg.
15 oder $3 \times 4 + 2 + 1^m$ kosten also			1 Mrk. $68^3/_4$	Pfg.

Mit dieser Auflösung fällt dem Wesen nach zusammen, wenn ich 15^m betrachte als $16^m - 1^m$.

16 oder 4×4^m kosten	4×45 Pfg.	=	1 Mrk. 80	Pfg.
1 oder $^1/_4 \times 4^m$ kostet	$^1/_4 \times 45$ Pfg.	=	— Mrk. $11^1/_4$	Pfg.
15 oder $16 - 1^m$ kosten daher			1 Mrk. $68^3/_4$	Pfg.

Wir sehen hier dreierlei wesentlich verschiedene Auflösungen und ebenso dreierlei Ausrechnungen. Es ist aber begreiflich, daß wir für das Zifferrechnen nicht mehr als eine Form zugleich einführen dürfen, und daß dieselbe längere Zeit ausschließlich und später wenigstens vorzugsweise angewendet werden müsse. Die Frage, welche Weise den andern vorzuziehen sei, ist übrigens leicht zu beantworten. Die erste Auflösung ist so einfach und natürlich, daß ihr unbestritten der Vorzug gebührt. Sie liegt aber der schriftlichen Rechnungsform zu Grunde, welche man die Zweisatzrechnung nennt, und welche sich dadurch auszeichnet, daß sie ganz und gar dem Gedankengange entspricht, den auch der weniger Geübte einschlägt, um eine Aufgabe zu lösen; daß durch sie das schriftliche Rechnen in das rechte Verhältniß zu dem mündlichen kommt und in der That das, was es sein soll — ein in Ziffern dargestelltes Kopfrechnen wird; daß sie sich eng an das Vorausgegangene anschließt und so Einheit in den ganzen Lehrgang bringt; daß sie, indem sich der Schüler bei ihr Schritt für Schritt dem klar vor seinem Bewußtsein stehenden Ziele nähert, den formellen, wie den materiellen Rechnungszweck gleichmäßig fördert, und daß sie sich für die Aufgaben mit umgekehrten Verhältnissen eben so gut wie für die mit geraden eignet. Sie wird deßhalb auch von uns zuerst behandelt und zwar in zweifacher Weise.

Um dem von mehreren Seiten ausgesprochenen Wunsch zu genügen, so geben wir dann die Proportionsrechnung und später die Kettenrechnung.

Während sich's nun beim Zifferrechnen zunächst um die Einübung und dann um die Anwendung der Rechenform handelt, ist aber zugleich auch dem freien mündlichen Rechnen gebührend Rechnung zu tragen. Auch es hat seine Rechte. Es ist nicht nur wenigstens eben so wichtig, wie das Tafelrechnen, sondern es verlangt zugleich seine eigenthümliche Behandlung, somit auch seine eigene Uebung. Aus diesem Grunde und um die Gefahr zu vermeiden, dem Einen auf Kosten des Andern zu viel Zeit einzuräumen, werden von

jetzt an Kopf- und Zifferrechnen gesondert, d. h. in besonderen Stunden behandelt. Beide gehen daher fortan neben einander. Aber wenn gleich der Zeit nach getrennt, so behalten sie dennoch ihre innere gegenseitige Beziehung und zwar sowohl rücksichtlich des Stoffes, als rücksichtlich des Verfahrens. Kopf- und Zifferrechnen beschäftigen sich nämlich zuerst gleichzeitig mit Aufgaben, die nach den dabei anzuwendenden Operationen, dann wieder gleichzeitig mit Aufgaben, die nach den Gegenständen geordnet sind. Und überall wird im mündlichen Rechnen die Auflösungsweise, die ihre Anwendung auch beim schriftlichen Rechnen findet, vorzugsweise in's Auge gefaßt und geübt.

A. Aufgaben mit einfachen geraden Verhältnissen.

A. Formen für das mündliche Rechnen.

§. 228. Mit einfach und gleichbenannten ganzen Zahlen.

a. Die gleichartigen Glieder haben kein gemeinschaftliches Maß.

Beispiel: 8 Pfd. Garn geben 36^m Leinwand; wie viel Meter Leinwand geben 7 Pfd. Garn von derselben Sorte?

Auflösung: Gesucht soll werden, wie viele Meter Leinwand 7 Pfd. Garn geben, und bekannt ist, wie viele Meter man von 8 Pfd. erhält. a. Ich gehe von 8 Pfd. auf 1 Pfd. und von 1 Pfd. auf 7 Pfd. Ausrechnung! b. Ich gehe von 8 Pfd. auf 7×8 oder 56 Pfd und von 56 oder 8×7 Pfd auf 7 Pfd. Ausrechnung! c. 8 Pfd geben 36^m; so vielmal 8 Pfd., so vielmal 36^m. So oft also 8 Pfd. in 7 Pfd. enthalten sind, so vielmal 36^m geben diese. Ausrechnung! d. Ich zerlege 7 Pfd. in Posten, welche einfache Theile von 8 Pfd. sind, nämlich in $4 + 2 + 1$ Pfd., und berechne jeden Posten für sich. e. Ich betrachte 7 Pfd. als 8 Pfd. — 1 Pfd. Ausrechnung!

Aufg. z. Kopfr. III. Heft, 37. Uebung.

b Die gleichartigen Glieder haben ein gemeinschaftliches Maß.

Beisp. In 24 Tg. verfüttert ein Landwirth 45 Centner Heu; wie viel in 36 Tagen?

a. Ich gehe von 24 Tg. auf 1 Tg. und von 1 Tag auf 36 Tage. Ausr. b. Die Zahlen 24 und 36 haben mehrere gemeinschaftliche Maße, nämlich: 2, 3, 4, 6 und 12. Das größte derselben ist 12. Ich gehe daher von 24 Tg. auf 12 Tg. und von 12 Tg. auf 36 Tg. Ausr.! c. 36 Tage sind $1\frac{1}{2} \times 24$ Tage; also wird in 36 Tagen auch $1\frac{1}{2}$mal so viel verfüttert, als in 24 Tagen. Ausr.!

§. 229. Mit Brüchen.

a. Die gleichartigen Glieder sind gleichnamige Brüche.

Beispiel 1. Es bezahlt Jemand $^3/_{10}$ seiner Schuld mit 480 Mrk., wie viel bleibt er schuldig? (1120 Mrk.)

Aufl. Wenn $^3/_{10}$ der Schuld bezahlt werden, so bleiben $^{10}/_{10}$ — $^3/_{10}$, d. i. $^7/_{10}$ im Rückstand. Die Aufgabe heißt also: $^3/_{10}$ = 480 Mrk., wie viel betragen $^7/_{10}$? Ich gehe von $^3/_{10}$ auf $^1/_{10}$ und von $^1/_{10}$ auf $^7/_{10}$.

Beisp. 2. Ein Fäßchen Wein von $37^1/_2$ Liter kostet 32 Mark; wie hoch kommt ein anderes von $22^1/_2$ Liter?

Aufl. $37^1/_2$ lt = $^{75}/_2$ lt, und $22^1/_2$ lt = $^{45}/_2$ lt. Die Aufgabe heißt jetzt: $^{75}/_2$ lt kosten 32 Mark, was kosten $^{45}/_2$ lt? Da 75 = 5 $\times$ 15 und 45 = 3 $\times$ 15, so gehe ich von $^{75}/_2$ lt auf $^{15}/_2$ lt und von $^{15}/_2$ auf $^{45}/_2$ lt. Wenn $^{75}/_2$ lt 32 Mark kosten, so kosten $^{15}/_2$ lt $^1/_5$ von 32 Mark = $6^2/_5$ Mark, und $^{45}/_2$ lt kosten 3 $\times$ $6^2/_5$ Mark = $19^1/_5$ M. oder 19 Mark 20 Pfg.

b. Die gleichartigen Glieder sind ein Bruch und eine ganze Zahl.

Beisp. 1. Wie theuer hat A sein Haus gekauft, wenn er sogleich $^3/_8$ des Kaufpreises mit 1260 fl. bezahlte? (3360 fl.)

Aufl. Was soll gesucht werden? (Wie viel der ganze Kaufpreis beträgt.) Und was sagt uns die Aufgabe? (Wie viel $^3/_8$ desselben betragen.) Wie heißt hiernach die Aufgabe? ($^3/_8$ der Kaufsumme = 1260 fl.; wie viel beträgt die ganze Kaufsumme?) Wie schließt man von $^3/_8$ auf das Ganze? (Ich gehe von $^3/_8$ auf $^1/_8$ und von $^1/_8$ auf 1 oder $^8/_8$.)

Beisp. 2. Das Hektoliter zu 48 Mark 75 Pfg.; wie berechnen sich $^4/_5$ desselben? (39 Mark.)

Aufl. Ich gehe von 1 Hl auf $^1/_5$ Hl und von $^1/_5$ auf $^4/_5$ Hl. Ausrechnung!

Beispiel 3. A verdient in 1 Tag 1 Mark 36 Pfg., wie viel in $8^3/_4$ Tg.?

Aufl. a. Ich berechne zuerst, wie viel A in 8, und dann, wie viel er in $^3/_4$ Tg. verdient. In 8 Tg. verdient A 8 $\times$ 1 Mark 36 Pfg. = 8 Mark + 2 Mark 88 Pfg. = 10 Mark 88 Pfg. In $^1/_4$ Tag verdient A $^1/_4$ von 1 Mark 36 Pfg. = 34 Pfg., in $^3/_4$ Tag also 3 $\times$ 34 Pfg. = 1 Mark 2 Pfg.; 10 Mark 88 Pfg. + 1 Mark 2 Pfg. = 11 Mark 90 Pfg. — b. $8^3/_4$ Tg. = $^{35}/_4$ Tg. Ich gehe von 1 Tg. auf $^1/_4$ Tg. und von $^1/_4$ Tg. auf $^{35}/_4$ Tg. — c. $8^3/_4$ = $8^3/_4$ $\times$ 1. Also verdient A in $8^3/_4$ Tg. $8^3/_4$ $\times$ 1 Mark 36 Pfg.

Beispiel 4. Wie ist der Centner angesetzt, wenn für $4^4/_5$ Ctr. 41 Mark 52 Pfg. zu bezahlen sind?

Aufl. $4\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$. Ich schließe von $\frac{24}{5}$ Ctr. auf $\frac{1}{5}$ Ctr. und von $\frac{1}{5}$ Ctr. auf 1 Ctr. Wenn $\frac{24}{5}$ Ctr. 41 Mark 52 Pfg. kosten, so kostet $\frac{1}{5}$ Ctr. den 24. Theil von 41 Mark 52 Pfg.; $24 = 4 \times 6$; der 4. Theil von 41 M. 52 Pfg. = 10 Mark 38 Pfg., und der 6. Theil von 10 Mark 38 Pfg. = 1 Mark 73 Pfg. So viel kostet $\frac{1}{5}$ Ctr.; der ganze Centner kostet also 5×1 Mark 73 Pfg. = 8 Mark 65 Pfg.

Beispiel 5. A füttert seine Schafe mit $5\frac{3}{5}$ Ctr. Heu $\frac{2}{3}$ Monate lang; wie viel Heu braucht er für dieselben auf 6 Monate? ($50\frac{2}{5}$ Centner.)

Aufl. Berechnet soll werden, wie viel Heu A in 6 Mon. verfüttert, und die Aufgabe sagt, wie viel er in $\frac{2}{3}$ Mon. braucht. a. Ich schließe von $\frac{2}{3}$ Mon. auf $\frac{1}{3}$ Mon., von $\frac{1}{3}$ Mon. auf 1 Mon. und von 1 Mon. anf 6 Monate. — b. Ich schließe von $\frac{2}{3}$ Mon. auf 2 Mon. und von 2 Mon. auf 6 Monate. $\frac{2}{3}$ Mon. sind der 3. Theil von 2 Mon.; also sind 2 Mon. $3 \times \frac{2}{3}$ Mon.; folglich verfüttert A in 2 Mon. $3 \times 5\frac{3}{5}$ Ctr. $= 16\frac{4}{5}$ Ctr., und in 6 oder 3×2 Mon. $3 \times 16\frac{4}{5}$ Ctr. $= 50\frac{2}{5}$ Ctr. — c. So oft $\frac{2}{3}$ Mon. in 6 Mon. enthalten sind, so vielmal $5\frac{3}{5}$ Ctr. Heu sind erforderlich. $\frac{2}{3}$ Mon. sind in 6 oder in $\frac{18}{3}$ Mon. 9mal enthalten; also sind die $5\frac{3}{5}$ Ctr. 9mal zu nehmen.

c. Die gleichartigen Glieder sind ungleichnamige Brüche.

Beisp. 1. $\frac{1}{2}$ Kgr einer Waare wird mit 3 Mark 85 Pfg. bezahlt; wie hoch kommt $\frac{1}{5}$ Kgr derselben? (Auf 1 Mark 54 Pfg.)

Aufl. a. Ich schließe von $\frac{1}{2}$ Kgr auf 1 Kgr und von 1 Kgr auf $\frac{1}{5}$ Kgr. — b. Ich mache beide Brüche gleichnamig. $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, und $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$. Nun heißt die Aufgabe: $\frac{5}{10}$ Kgr kosten 3 Mrk. 85 Pfg., was kosten $\frac{2}{10}$ Kgr? — c. Ich resolvire beide Brüche. $\frac{1}{2}$ Kgr = 50 Dgr und $\frac{1}{5}$ Kgr = 20 Dgr. Jetzt heißt es: 50 Dgr zu 3 Mark 85 Pfg., was kosten 20 Dgr?

Beisp. 2. $\frac{3}{4}$ Hektoliter zu 17 Mark 40 Pfg.; wie berechnen sich $\frac{4}{5}$ Hektoliter? (Auf 18 Mark 56 Pfg.)

Aufl. a. Ich gehe von $\frac{3}{4}$ Hektoliter auf $\frac{1}{4}$, von $\frac{1}{4}$ auf 1, von 1 auf $\frac{1}{5}$ und von $\frac{1}{5}$ auf $\frac{4}{5}$. — b. und c. wie oben.

Beisp. 3. Von $\frac{3}{4}$ Schober Getreid werden 2 Hl 61 lt Körner aufgehoben; wie viel demnach von $4\frac{1}{2}$ Schober? (15 Hl 66 lt.)

Aufl. a. Ich gehe von $\frac{3}{4}$ Schbr. auf $\frac{1}{4}$ Schbr., von $\frac{1}{4}$ Schbr. auf 1 Schbr., von 1 Schbr. auf $\frac{1}{2}$ Schbr. und von $\frac{1}{2}$ Schbr. auf $4\frac{1}{2}$ oder $\frac{9}{2}$ Schbr. — b. So oft $\frac{3}{4}$ Schbr. in $4\frac{1}{2}$ Schbr. enthalten sind, so vielmal 2 Hl 61 lt Körner geben diese.

Beisp. 4. $1\frac{1}{2}$ Pfd. Fleisch zu 90 Pfg.; wie berechnen sich $1\frac{1}{4}$ Pfd. (Auf 75 Pfg.)

Aufl. Man richtet $1\frac{1}{2}$ und $1\frac{1}{4}$ ein. Das Weitere geht aus dem Bisherigen hervor.

§ 230. Mit ungleich und mehrfach benannten Zahlen.

a. Die gleichartigen Glieder sind einfach benannte Zahlen.

Beispiel 1. Das Hektar Feld wird um 1548 Mk. verkauft; wie hoch kommen hiernach 24 Ar?

Aufl. 1 Hektar hat 100 Ar. Wenn daher 1 Hektar 1548 Mk. kostet, so kostet 1 Ar den 100. Theil von 1548 Mk.; der 100. Theil von 1548 Mk. = 15,48 Mk. oder 15 Mk. 48 Pfg.; 24 Ar kosten 24mal so viel, also 24 × 15 Mk. 48 Pfg.; 24 × 15 Mk. = 240 + 120 oder 360 Mk.; 24 × 48 Pfg. = 24 × $^1/_2$ Mk. — 24 × 2 Pfg.; 24 × $^1/_2$ Mk. = 12 Mk., und 24 × 2 Pfg. = 48 Pfg.; 12 Mk. — 48 Pfg. = 11 Mk. 52 Pfg.; 360 Mk. + 11 Mk. 52 Pfg. = 371 Mk. 52 Pfg. Also kosten 24 Ar 371 Mk. 52 Pfg.

Beispiel 2. In 5 Monaten verkauft A 4 Ctr. 44 Kgr einer Waare; wie viel in 1 Jahre?

Aufl. Ich gehe von 5 Mon. auf 1 Mon. und von 1 Mon. auf 1 Jahr. Wenn A in 5 Mon. 4 Ctr. 44 Kgr verkauft, so kommt auf 1 Mon. der 5. Theil davon. Der 5. Theil von 1 Ctr. oder von 50 Kgr = 10 Kgr, von 4 Ctr. also 4 × 10 oder 40 Kgr; der 5. Th. von 44 Kgr = 8$^4/_5$ Kgr. Also verkauft A in 1 Mon. 40 + 8$^4/_5$ oder 48$^4/_5$ Kgr, und in 1 Jahre 12mal so viel. 12 × 48$^4/_5$ Kgr = 12 × 1 Ctr. — 12 + 1$^1/_5$ Kgr = 12 Ctr. — 14$^2/_5$ Kgr = 11 Ctr. 35$^3/_5$ Kgr.

Beisp. 3. Das Hektoliter wird um 45 Mark verkauft; was kosten 38 Liter.

Aufl. a. Wenn 1 Hektoliter 45 Mark kostet, so kostet 1 Liter 45 Pfennige, und 31 Liter kosten 38 × 45 Pfg.; 40 × 45 = 10 × 4 × 45; 4 × 45 = 180, 10 × 180 = 1800; 1800 Pfg. = 18 Mark; 2 × 45 Pfg. = 90 Pfg.; 18 Mark — 90 Pfg. = 17 Mark 10 Pfg.

Aufl. b. 38 Liter = 20 + 10 + 5 + 3 Liter.

20 lt ($^1/_5$ von 45 M.)	= 9 Mark
10 lt ($^1/_2$ von 9 M.)	= 4 Mark 50 Pfg.
5 lt ($^1/_2$ von 4 M. 50 Pfg.)	= 2 Mark 25 Pfg.
3 lt ($^3/_{100}$ von 45 M.)	= 1 Mark 35 Pfg.
38 Liter kosten also	17 Mark 10 Pfg.

Aufl. c.

40 Liter ($^2/_5$ von 45 M.)	= 18 Mark.
2 Liter ($^2/_{100}$ von 45 M.)	= — Mark 90 Pfg.
38 Liter, also	= 17 Mark 10 Pfg.

Beispiel 4. Wie hoch kommt das Kilogramm, wenn 80 Dgr 5 Mark 60 Pfg. kosten? (Auf 7 Mark.)

Aufl. 1 Kgr = 100 Dgr; 100 = 5 × 20, und 80 = 4 × 20. Ich schließe daher von 80 Dgr auf 20 und von 20 auf 100 Dgr. — Oder: 100 = 1$^1/_4$ × 80; also kostet 1 Kgr 1$^1/_4$ × 5 M. 60 Pfg. — Oder: Ich betrachte 80 Dgr als $^4/_5$ Kgr, und schließe von $^4/_5$ auf $^1/_5$ und von $^1/_5$ auf 1 Kgr.

Beispiel 5. 8 gr einer Waare zu 15 Pfg.; wie hoch kommen 24 Kgr? (450 Mrk.)

Aufl. a. Ich gehe von 8 gr auf 1 gr, dann auf 1 Dgr, dann auf 1 Kgr, dann auf 24 Kgr. — b. Ich schließe von 8 gr auf 3×8 oder 24 gr und von 24 gr auf 1000×24 gr oder 24 Kgr.

b. Von den gleichartigen Gliedern ist das eine oder sind beide mehrfach benannt.

Beispiel 1. Das Meter Tuch zu 4 Mark 80 Pfg.; wie hoch kommen $7^m\ 5^{dm}$? (36 Mark.)

Aufl. a. Ich berechne zuerst, was die 7^m, und dann, was die 5^{dm} kosten. — b. $1^m = 10^{dm}$, und $7^m\ 5^{dm} = 75^{dm}$. Ich gehe von 10^{dm} auf 5 und dann auf 75^{dm}. — c. $7^m\ 5^{dm} = 7\frac{1}{2}^m$; diese kosten $7\frac{1}{2} \times 4$ Mark 80 Pfg.

Beispiel 2. Ein Kapital warf in 2 J. 9 M. 132 Mrk. Zinsen ab; wie viel in 1 Jahre? (48 Mrk.)

Aufl. 2 J. 9 Mon. = 33 Mon.; 33 Mon. = 11×3 Mon. und 1 Jahr = 4×3 Mon. Ich gehe daher von 33 M. auf 3 M. und von 3 Mon. auf 12 Mon. — Oder: 2 J. 9 Mon. = $2\frac{3}{4}$ Jahre. Von $2\frac{3}{4}$ J. gehe ich auf $\frac{1}{4}$ J. und dann auf 1 Jahr.

Beispiel 3. Für 3 Mark 75 Pfg. kauft man 8 Pfd. 30 Neuloth, wie viel für 11 Mark 25 Pfg.?

Aufl. 3 Mark 75 Pfg. = $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ Mark, und 11 Mark 25 Pfg. = $11\frac{1}{4} = \frac{45}{4}$ Mark. Wenn man für $\frac{15}{4}$ Mark 8 Pfd. 30 Neuloth kauft, so erhält man für $\frac{45}{4}$ Mark 3×8 Pfd. 30 Neuloth; 3×8 Pfd. = 24 Pfd.; 3×30 Dgr = 90 Dgr = 1 Pfd. 40 Dgr; 24 Pfd. + 1 Pfd. 40 Dgr = 25 Pfd. 40 Dgr.

B. Formen für das schriftliche Rechnen.

I. Der Zweisatz in Bruchform.

§ 231. Mit gleichbenannten ganzen Zahlen.

Beispiel 1. Für 35 Mark erhält man 8 Meter; wie viel wird man für 13 Meter zahlen müssen?

Fertigung des Ansatzes.

(Ausführlich.)

Vor Allem muß man wissen, was berechnet werden soll, und da dieß in der Frage der Aufgabe liegt, so ist die Frage auch zuerst in's Auge zu fassen. Sie heißt: Wie viel wird man für 13 Meter zahlen müssen? Die Zahl „13 Meter“ schreibt man etwas gegen

die Linke und das „Wie viel" deutet man rechts daneben durch ein Fragezeichen an.

13^m ?

Wie viel man für 13^m zahlen muß, läßt sich nur dann, nur unter der Bedingung finden, wenn gegeben ist, wie viel eine andere Anzahl Meter kostet. Das sagt der Satz: Für 35 Mark erhält man 8 Meter. Derselbe heißt deßhalb Bedingungssatz. Er wird gerade über den Fragesatz geschrieben, so daß die gleichartigen Glieder senkrecht unter einander zu stehen kommen. Man setzt also „8 Meter" über 13 Meter, und „35 Mark" über das Fragezeichen.

8^m	35 Mark	9 Meter kosten 35 Mrk.
13^m	?	13 Meter, wie viel?

Das ist der Ansatz. Er besteht aus zwei unter einander befindlichen Sätzen: aus dem Bedingungssatze und aus dem Fragesatze. Daher sein Name „Zweisatz".

Ausrechnung.

8^m 35 Mark

1^m $\frac{35 \text{ Mark}}{8} = 4^3/_8$ Mark

13^m $13 \times 4^3/_8 = 56^7/_8$ Mark $=$ 56 M. 88,5 Pfg.

8^m kosten 35 Mark; 1^m kostet den 8. Theil davon, also 35 Mark, getheilt durch 8 $= 4^3/_8$ Mark; 13^m kosten 13mal so viel, nämlich $13 \times 4^3/_8$ Mark. Ausrechnung! — So zuerst; dann wie folgt:

Hauptrechnung.

8^m 35 Mark

13^m ?

8^m 35 M.

1^m $\frac{35}{8}$ M.

13^m $\frac{13 \times 35}{8}$ Mark $=$ 56 Mark 87,5 Pfg.

Nebenrechnung.

35 M.
13
105
35
8 | 455 | 56,875 M.

8^m kosten 35 Mark; 1^m kostet den 8. Theil davon, also 35 M., getheilt durch 8. Was sagt uns die Zahl 35 Mark? (Was 8^m kosten.) Und was sagt uns der Ausdruck: 35 Mark, getheilt durch 8? (Der sagt uns, was 1^m kostet.) Was kostet 1^m? (35 Mark, getheilt durch 8.) Was kosten 2^m? (Diese kosten 2mal so viel, also 2×35 Mark, getheilt durch 8.) Und 3^m? (3^m kosten 3×35 Mark, getheilt durch 8.) Was kosten also 13^m? (13×35 Mark, getheilt durch 8.) Ausrechnung: 13×35 Mark $=$ 455 Mark; diese durch 8 getheilt $=$ 56,875 Mark $=$ 56 Mark 87,5 Pfg.

Wodurch unterscheidet sich diese Ausrechnung von der vorigen? Dort haben wir zuerst durch 8 getheilt und dann mit 13 multiplicirt; hier haben wir zuerst durch 13 multiplicirt und dann durch 8 getheilt.

Zusammengezogen.

8^m	35 Mk.		8^m	35 Mk.
13 „	?		13 „	?
8^m				
1^m	$\frac{35 \times 13}{8}$			$\frac{35 \times 13}{8}$
13^m				

Die Denk- und Sprechweise ist dieselbe. Ebenso die Nebenrechnung. Die Abkürzung besteht hier lediglich darin, daß man beim Schließen von der Mehrheit auf die Einheit und von der Einheit auf die Mehrheit immer mehr nur das notirt, was zuletzt zur Ausrechnung erforderlich ist. 8^m kosten 35 Mark; (35 Mark notirt) 1^m kostet den 8. Theil davon; (8 unter 35 Mark notirt;) **13^m kosten 13mal so viel; (13 neben** 35 Mark notirt.)

Die Aufeinanderfolge der einzelnen Schlüsse wird von uns immer, wie hier oben (8^m, 1^m, 13^m) angedeutet. Anfangs notiren sich dieß auch die Schüler. Zu bestimmen, wie lange es ihnen zu gestatten sei, ist Sache des Lehrers. Doch können wir nicht umhin, zu bemerken, daß es in jedem Falle und zu jeder Zeit besser ist, einige Ziffern mehr, als einige weniger zu gebrauchen, wenn es eine größere Sicherheit in der Ausrechnung gewährt. Was man beim Rechnen will, das ist: das richtige Resultat und die sichere Ueberzeugung, daß das gefundene es sei. Einige Ziffern mehr oder weniger ist Nebensache. Sowie es mit einer Schule, wo die Schüler weniger schnell, aber durchaus richtig rechnen, besser steht, als mit einer andern, wo sie vielleicht doppelt so schnell, dabei aber zur Hälfte falsch rechnen: so ist auch ein etwas weitläufigeres Verfahren, sofern es dazu beiträgt, Fehler zu vermeiden, besser, als ein kürzeres, wobei leicht Irrungen stattfinden. Das Bestreben, die Kürze auf Kosten der Deutlichkeit und Sicherheit zu fördern, ist in unsern Schulen nicht am Platze.

Beispiel 2. 58 Kgr einer Waare kosten 24 Mrk.; wie viel wird man für 42 Mrk. erhalten?

Ansatz und Berechnung.

Allgemeine Weise.

24 Mrk.	58 Kgr	
42 „	?	
24 Mrk.		
1 „	$\frac{\overset{29}{58} \times \overset{7}{42}}{\underset{\underset{2}{4}}{24}} = \frac{203}{2} = 101{,}5$ Kgr	
42 „	$= 101$ Kgr 50 Dgr	

Besondere Weise.

24 Mrk.	58 Kgr
42 „	?
24 Mrk.	
6 „	$\frac{\overset{29}{58} \times 7}{\underset{2}{4}}$
42 „	

Für 24 Mrk. erhält man 58 Kgr; für 1 Mrk den 24. Theil davon, d. i. 58 Kgr, getheilt durch 24; für 42 Mrk. 42mal so viel, nämlich 42 × 58 Kgr, getheilt durch 24. — Ist dem Schüler, wie wohl vorausgesetzt werden darf, das Heben der Faktoren des Zählers gegen die Faktoren des Nenners (§. 190) bekannt, so wird er von selbst daran

denken, 24 gegen 42 durch 6, sowie 4 gegen 58 durch 2 zu kürzen. Dann steht noch 7 × 29 Kgr, getheilt durch 2. — Die fähigeren Schüler führen dieß mehr im Kopfe, die minderfähigen durch eine Nebenrechnung aus.

Da es vortheilhaft ist, beim schriftlichen Rechnen so viel als thunlich in allen Fällen ein gleiches Verfahren einzuhalten; so wird hier, wie überall, wo die gleichartigen Glieder ganze Zahlen sind, auf die Eins zurückgegangen. Dadurch ist es dem Rechner möglich, ohne langes Besinnen die Schlußkette zu vollenden. Ist dies geschehen, dann werden Divisor und Dividend durch gegenseitiges Heben gleichmäßig verkleinert. Das gilt als Regel. Damit jedoch die fähigeren Schüler, welche mit der Berechnung vor den andern fertig werden, ihre übrige Zeit nützlich verwenden, so kann man ihnen hier und in ähnlichen Fällen gestatten, die Berechnung auf eine zweite Weise auszuführen und dabei über das größte gemeinschaftliche Maß der zwei gleichartig benannten Zahlen (hier über 6) zu schließen.)

Aufg. z. Zifferr. III. Heft, 37. Uebung.

§. 232. Mit gemeinen Brüchen.

Beispiel 1. Ein gewisses Kapital wirft in $^5/_8$ Jahren 24 Mrk. Zinsen ab; wie viel in $3^3/_8$ Jahren? (129,6 Mrk. = 129 Mrk. 60 Pfg.)

Ansatz und Berechnung.

$^5/_8$ J.	24 Mrk.
$3^3/_8$ „	?

$^5/_8$ J.
$^1/_8$ „ $\quad \dfrac{24 \times 27}{5}$
$^{27}/_8$ „

Denk- oder Sprechweise.

In $^5/_8$ Jahren macht der Zins 24 Mrk.; in $^1/_8$ Jahr macht er den 5. Theil davon, also 24 Mrk., getheilt durch 5; in $3^3/_8$ oder $^{27}/_8$ J. beträgt er 27mal so viel, nämlich 27 × 24 Mrk. getheilt durch 5 = 648 Mrk., getheilt durch 5 = 129,6 Mrk.

Beispiel 2. $^3/_4$ Hl Wein zu 32 Mrk.; was kosten 6 Hl?

Ansatz und Berechnung.

$^3/_4$ Hl	32 Mark
6 Hl	?

$^3/_4$ Hl
$^1/_4$ „ $\quad \dfrac{32 . \overset{2}{4} . \not{6}}{\not{3}}$
1 „
6 „ $\quad = 256$ Mark.

Denk- oder Sprechweise.

Ich gehe von $^3/_4$ Hl auf $^1/_4$ Hl, dann auf 1 Hl, dann auf 6 Hl.
$^3/_4$ Hl kosten 32 Mark.
$^1/_4$ Hl kostet den 3. Theil davon;
1 Hl kostet dieses 4mal, und
6 Hl kosten wieder 6mal so viel, nämlich: 6 × 4 × 32 Mark, getheilt durch 3.

Zuletzt wird das Ganze nochmal in folgender Weise durchgenommen. a. Vergleiche $^1/_4$ Hl mit $^3/_4$ Hl! ($^1/_4$ Hl ist der 3. Theil von $^3/_4$ Hl.) Vergleiche 1 Hl mit $^1/_4$ Hl! (1 Hl ist 4mal so viel als $^1/_4$ Hl.) 6 Hl mit 1 Hl! (6 Hl sind 6mal so viel als 1 Hl.) — b. Was kosten $^3/_4$ Hl? (32 Mark.) Was kostet $^1/_4$ Hl? (32 Mark, getheilt durch 3.) Was kostet 1 Hl? (4 × 32 Mark, getheilt durch 3.) Und 6 Hl? (Die kosten 6 × 4 × 32 Mark, getheilt durch 3.) — c Was sagt uns die Zahl 32 Mark? (Was $^3/_4$ Hl kosten.) Was zeigt der Ausdruck: 32 Mark, getheilt durch 3, an? (Der zeigt an, was $^1/_4$ Hl kostet.) Der Ausdruck 4 × 32 Mark, getheilt durch 3.)

(Der sagt uns, was 1 Hl kostet.) Und der Ausdruck: 6 × 4 × 32 Mark oder 32 × 4 × 6 Mark, getheilt durch 3? (Der zeigt an, was 6 Hl kosten.)

Auf diese Weise kommen auch die schwachbegabten Schüler zum klaren Verständniß der Sache. Für diese ist es auch sehr förderlich, daß sie sich zuerst den Gang oder die Aufeinanderfolge der Schlüsse vollständig notiren und das Verhältniß jedes folgenden Gliedes zum vorhergehenden genau bestimmen, bevor sie zur Ausrechnung selbst übergehen.

Beispiel 3. Um $\frac{5}{8}$ fl. erhalte ich 30 Dgr Gewürz; wie hoch kommen 72 Dgr?

Ansatz und Berechnung.

30 Dgr — $\frac{5}{8}$ fl.
72 Dgr — ?

30 Dgr
1 „
72 „ $\frac{5 \times 72}{8 \times 30} = 1{,}5$ fl. (gekürzt: 72 → 12 → 3; 8 → 2; 30 → 5)

Denk- oder Sprechweise.

30 Dgr kosten $\frac{5}{8}$ fl. oder 5 fl., getheilt durch 8; 1 Dgr kostet den 30. Theil davon, also 5 fl., getheilt durch 30 × 8; und 72 Dgr kosten 72mal so viel, nämlich 72 × 5 fl., getheilt durch 30 × 8, oder 5 × 72 fl. getheilt durch 8 × 30.

Beispiel 4. Ein Mahlgang mahlt in 15 Std. $5\frac{1}{4}$ Hl Korn; wie viel in 24 Std. Antw. $8\frac{2}{5}$ Hl = 8 Hl 40 lt.

Ansatz und Berechnung.

15 Std. — $5\frac{1}{4}$ Hl
24 „ — ?

15 Std.
1 „
24 „ $\frac{21 \times 24}{4 \times 15} = \frac{42}{5}$ (gekürzt: 21 → 7; 24 → 6; 15 → 5)

Denk- oder Sprechweise.

$5\frac{1}{4} = \frac{21}{4}$. In 15 Std. mahlt der Gang $\frac{21}{4}$ Hl, d. i. 21 Hl, getheilt durch 4; in 1 Std. mahlt derselbe den 15. Theil davon, also 21 Hl, getheilt durch 15 × 4, und in 24 Std. mahlt er 24mal so viel, nämlich 24 × 21 Hl, getheilt durch 15 × 4.

Beispiel 5. Von $4\frac{1}{2}$ Hektar erntet man $13\frac{3}{4}$ Schober Getreid; wie viel von $1\frac{4}{5}$ Hektar? Antwort: $5\frac{1}{2}$ Schober?

Ansatz und Berechnung.

$4\frac{1}{2}$ Hektar — $13\frac{3}{4}$ Schbr.
$1\frac{4}{5}$ „ — ?

$\frac{9}{2}$ Hektar
$\frac{1}{2}$
1 „
$\frac{9}{5}$ „ $\frac{55 \times 2 \times 9}{4 \times 9 \times 5} = \frac{11}{2}$ (gekürzt: 55 → 11; 5 → 1; 9 → 1; 4 → 2)

Denk- oder Sprechweise.

$4\frac{1}{2}$ Hektar = $\frac{9}{2}$ Hektar, und $13\frac{3}{4}$ Schober = $\frac{55}{4}$ Schober.
$\frac{9}{2}$ Hektar geben $\frac{55}{4}$ Schober.
$\frac{1}{2}$ Hektar gibt den 9. Theil davon;
1 Hektar gibt das 2mal und
$1\frac{4}{5}$ oder $\frac{9}{5}$ Hektar geben wieder $\frac{9}{5}$ mal so viel, nämlich 9 × 2 × 55 Schober, getheilt durch 4 × 9 × 5.

Eine von der gewöhnlichen Schlußfolge abweichende besondere Weise ist hier die, von $\frac{9}{2}$ Hektar auf 9 Hektar und von 9 Hektar auf $\frac{9}{5}$ Hektar zu gehen.

§. 233. Mit Decimalbrüchen.

Beispiel 1. 0,5 Meter Zeug zu 48 Pfg.; was kosten 0,9 Mtr.? Antwort: 86,4 Pfennige.

Ansatz und Berechnung.

a.

0,5 m	48 Pfg.
0,9 m	?
0,5 m 0,1 m 0,9 m	$\frac{48 \times 9}{5}$

b.

Ø,5 m	48 Pfg.
Ø,9 m	?
5 m 1 m 9 m	$\frac{48 \times 9}{5}$

a. Man schließt von $^5/_{10}$ m auf $^1/_{10}$ m und von $^1/_{10}$ m auf $^9/_{10}$ m.

b. Gleichnamige Brüche verhalten sich wie ganze Zahlen. Sowie 1 der 5. Theil von 5 ist, so ist $^1/_{10}$ der 5. Theil von $^5/_{10}$, und sowie 9 das 9fache ist von 1, so sind auch $^9/_{10}$ das 9fache von $^1/_{10}$. Sind also die Decimalbrüche der gleichartigen Glieder gleichnamig — und gleichnamig sind sie, wenn sie gleichviel Decimalstellen haben — so werden die beiden Kommata gestrichen, und die Brüche als ganze Zahlen betrachtet.

Sind sie nicht schon gleichnamig, so werden sie gleichnamig gemacht, indem man die bei der einen oder der andern Zahl fehlenden Stellen durch Nullen ersetzt.

Diese Regel reicht in Bezug auf die gleichartigen Glieder für alle Fälle aus, und wenn für irgend wen, so ist es für unsere Volksschüler nothwendig, daß sie hier eine Generalregel haben, nach welcher sie sich in allen Fällen richten können.

Lassen sich die Decimalbrüche als Ganze einer Unterabtheilung betrachten, was häufig der Fall ist, so wird die Sache hierdurch noch einfacher. Im vorstehenden Beispiele können wir „Decimeter“ statt „Zehntels-Meter“ setzen. Dann steht:

5 dm	48 Pfg.
9 dm	?
5 dm 1 „ 9 „	$\frac{48.9}{5} = \frac{432}{5} = 86{,}4$ Pfg.

Beispiel 2. 0,45 Hektoliter zu $5^3/_5$ Mark; was kosten 8,55 Hektoliter? (106,4 Mark = 106 Mark 40 Pfg.)

Ansatz und Berechnung.

a.

0,45 Hl	$5^3/_5$ Mark
8,55 „	?
$^{45}/_{100}$ Hl $^1/_{100}$ „ $^{855}/_{100}$ „	$\frac{28 \,.\, 855}{5 \,.\, 45}$

b.

Ø45 Hl	$5^3/_5$ Mark
855 „	?
45 Hl 1 „ 855 „	$\frac{28 \,.\, 855}{5 \,.\, 45}$

§

45 lt	$5^3/_5$ Mark
855 lt	?
45 lt 1 „ 855 „	$\frac{28 \,.\, 855}{5 \,.\, 45} = \frac{532}{5} = 106{,}4$ M. = 106 M. 40 Pfg. (855 gekürzt zu 19)

Bei a geht man von $^{45}/_{100}$ Hl auf $^{1}/_{100}$ Hl und von $^{1}/_{100}$ Hl auf $8^{55}/_{100}$ Hl, welche Zahl jedoch, um erkennen zu können, wie sie sich zu $^{1}/_{100}$ Hl verhält, in $^{855}/_{100}$ Hl ausgedrückt werden muß. Gemischte Zahlen mit einem Decimalbruche werden also, gleichwie gemischte Zahlen mit einem gemeinen Bruche, in unechte Brüche verwandelt. Dieß ist sehr einfach. $3,4 = {}^{34}/_{10}$; $8,55 = {}^{855}/_{100}$; $4,375 = {}^{4375}/_{1000}$. Man sieht die ganze Zahl und den Decimalbruch zusammen genommen als den Zähler an und gibt diesem den Nenner, den der ursprüngliche Decimalbruch hat.

Bei b wurden die beiden Kommata gestrichen und die Hundertels-Hektoliter als ganze Hektoliter behandelt.

Bei c haben wir die Hektoliter in Liter aufgelöst.

Beispiel 3. 1,375 Kilogramm kosten $18^3/_4$ Mk., was kosten 3,845 Kilogramm? Antw. 52,43.. Mrk.

Ansatz und Berechnung.

Erste Weise.

1,375 Kgr	$18^3/_4$ Mk.
3,845 „	?
$^{1375}/_{1000}$ Kgr	
$^{1}/_{1000}$ „	$\frac{75 \,.\, 3845}{4 \,.\, 1375}$
$^{3845}/_{1000}$ „	

Zweite Weise.

1375 gr	$18^3/_4$ Mk.
3845 „	?
1375 gr	
1 „	$\frac{75 \,.\, 3845}{4 \,.\, 1385}$
3845 „	

Beispiel 4. 3,64 Hektar ertrugen $14^2/_5$ Schober; w. v. 16,8 Hktr.?

Ansatz und Ausrechnung.

a.

3,64 Hktr.	$14^2/_5$ Schbr.
16,80 „	?
$^{364}/_{100}$ H.	
$^{1}/_{100}$ „	$\frac{\overset{18}{\not{72}} \,.\, \overset{336}{\not{4680}}}{\not{5} \,.\, \underset{91}{\not{364}}} = \frac{6048}{91}$
$^{1680}/_{100}$ „	

b.

364 Ar	$14^2/_5$ Schbr.
1680 „	?
364 Ar	
1 „	$\frac{72 \,.\, 1680}{5 \,.\, 364}$
1680 „	

91 | 6048 | 66,46.. Schbr. = 66 Schbr. 28 Bd.
60
27,60 Bd.

Es ist am besten, nicht nur bei den Münzen, Maßen und Gewichten mit decimalen Unterabtheilungen, sondern auch in allen übrigen Fällen, wenn der Divisor in der ganzen Zahl nicht aufgeht, den Quotienten durch einen zwei- oder dreistelligen Decimalbruch auszudrücken und diesen hernach zu resolviren.

Beispiel 5. Wie berechnen sich 0,8 Kilogramm, wenn 5 Kilogr. 15,8 Mark kosten?

a. Erste Weise.

5,0 Kgr	15,8 M.
0,8 „	?
$^{50}/_{10}$ Kgr	
$^{1}/_{10}$ „	$\frac{15,8 \,.\, 8}{50}$
$^{8}/_{10}$ „	

b. Zweite Weise.

50 Kgr	15,8 M.
08 „	?
50 Kgr	
1 „	$\frac{158 \,.\, 8}{10 \,.\, 50}$
8 „	

c. Dritte Weise mit Ausrechnung.

5 Kgr 15,8 Mrk.
0,8 „ ?

5 Kgr
1 „
0,1 „ $\frac{158 \cdot 8}{10 \cdot 5 \cdot 10} = \frac{1264}{500} = \frac{12,64}{5} = 2,528$ M.
0,8 „ $= 2$ M. 53 Pfg.

Bei a. haben wir die 5 Kilogramm durch Beifügung einer Null in $^{50}/_{10}$ Kilogr. verwandelt und sind dann von $^{50}/_{10}$ auf $^{1}/_{10}$ und von $^{1}/_{10}$ auf $^{8}/_{10}$ Kilogr. gegangen. Die gemischte Zahl 15,8 haben wir beibehalten.

Bei b. haben wir die 5 Kilogr. ebenfalls in 10tels-Kilogr. aufgelöst, die Zehntel aber als Ganze betrachtet. Die gemischte Zahl 15,8 wurde hier in einen unechten Bruch, nämlich in $^{158}/_{10}$ verwandelt und dieser dann als gemeiner Bruch gesetzt.

Das Letztere ist auch bei c. geschehen. Bei der Ausrechnung wurde der Divisor 500 in 5 × 100 zerlegt und der Dividend durch 100, das Ergebniß hievon durch 5 getheilt.

Beispiel 6. Für 3,5 Mark erhalte ich 1,45 Meter; wie viel für 42,65 Mark?

Erste Weise.

3,50 Mark $1,45^{m}$
42,65 „ ?

3,50 Mark
0,01 „ $\frac{\overset{0,29}{\cancel{1,45}} \cdot \overset{853}{\cancel{4265}}}{\underset{14}{\underset{\cancel{70}}{\cancel{350}}}}$
42,65 „

$= \frac{247,37^{m}}{14}$

Zweite Weise.

350 Mark $1,45^{m}$
4265 „ ?

350 Mark
1 „ $\frac{\overset{29}{\cancel{145}} \cdot \overset{853}{\cancel{4265}}}{100 \cdot \underset{14}{\underset{\cancel{70}}{\cancel{350}}}}$
4265 „

$= \frac{24737}{1400} = \frac{247,37^{m}}{14}$

Dritte Weise mit Ausrechnung.

350 Pfg. 145^{cm}
4265 „ ?

350 Pfg.
1 „ $\frac{\overset{29}{\cancel{145}} \times \overset{853}{\cancel{4265}}}{\underset{14}{\underset{\cancel{70}}{\cancel{350}}}}$
4265 „

553^{cm}
× 29
7677
1706
14 | 24737 | 1766,92.. Ctm.
$= 17^{m}\ 66^{cm}\ 9^{mm}$

§ 234. Mit ungleich benannten Zahlen.

Beispiel 1. Wie hoch kommen 35 Dgr, wenn 7 Pfd. 23 Mark kosten?

a. 7 Pfd. 23 Mrk.
35 Dgr ?

7 Pfd.
1 „ $\frac{23 \cdot 35}{7 \cdot 50}$
1 Dgr
35 „

Die Aufgabe enthält drei einfach benannte Zahlen. Daher können wir diese ohne alle Veränderung in Ansatz bringen. Dann schließen wir von 7 Pfd. auf 1 Pfd., von 1 Pfd. auf 1 Dgr und von 1 Dgr auf 35 Dgr.

Die ungleich benannten Zahlen 7 Pfund und 35 Dekagramm können aber auch in gleichbenannte verwandelt werden. Und zwar auf welche Weise? Man löst die 7 Pfd. in 7 × 50 oder 350 Dgr auf, oder man führt die 35 Dgr auf $^{35}/_{50}$ oder $^{7}/_{10}$ Pfd. zurück. Man verwandelt also die höhere Sorte in die niedere, oder die niedere Sorte in Bruchtheile der höheren. Rechnen wir die Aufgabe nun auch auf diese Weise.

b. 350 Dgr — 23 Mk.
35 „ — ?

350 Dgr
1 „ $\frac{23 \cdot 35}{350} = 2{,}3$ Mk.
35 „ 10

c. 7 Pfd. — 23 Mk.
$^{5}/_{7}$ „ — ?

7 Pfd.
1 „ $\frac{23 \cdot 7}{7 \cdot 10} = 2{,}3$ Mk.
$^{7}/_{10}$ „

Auch frei im Kopfe läßt sich unsere Aufgabe ausrechnen. Wie nämlich? Antw. 350 = 10 × 35. Wenn daher 350 Dgr 23 Mk. kosten, so kosten 35 Dgr $^{1}/_{10}$ von 23 Mk. oder 2,3 Mk. Oder: Ich gehe von 7 Pfd. auf 5 × 7 oder 35 Pfd. und von 35 Pfund auf 35 Dekagramm. Ausführung! — So in allen geeigneten Fällen.

Beispiel 2. Ein Ballen Tuch von 35 m wird mit 172 Mrk. 50 Pfg. bezahlt; wie berechnen sich 12 m 25 cm? (60 Mk. 37,5 Pfg.)

a. 35 m — $172^{1}/_{2}$ Mk.
1225 cm — ?

35 m
1 m $\frac{345 \cdot 1225}{2 \cdot 35 \cdot 100}$
1 cm
1225 cm

b. 35 m — $172^{1}/_{2}$ Mk.
$12^{1}/_{4}$ m — ?

35 m
1 „ $\frac{345 \cdot 49}{2 \cdot 35 \cdot 4}$
$^{1}/_{4}$ „
$^{49}/_{4}$ „

c. 3500 cm — 172,5 Mk.
1225 cm — ?

3500 cm
1 cm $\frac{1725 \cdot 1225}{10 \cdot 3500}$
1225 cm

d. 35,00 m — 172,5 Mk.
12,25 m — ?

$^{3500}/_{100}$ m
$^{1}/_{100}$ m $\frac{1725 \cdot 1225}{10 \cdot 3500}$
$^{1225}/_{100}$ m

Beispiel 3. 3 Pfd. 12 Dgr 5 gr zu 4 Mrk. 80 Pfg.; wie hoch kommen 5 Ctr. 20 Kgr? (797 Mrk. 53,8 ... Pfg.)

Vorarbeit.

a. 3 Pfd. 12 Dgr 5 gr = 1625 gr
4 Mrk. 80 Pfg. = 4,8 Mrk.
5 Ctr. 20 Kgr = 270 Kgr

b. 3 Pfd. $12^{1}/_{2}$ Dgr = $3^{1}/_{4}$ Pfd.
4 Mrk. 80 Pfg. = $4^{4}/_{5}$ Mrk.
5 Ctr. 20 Kgr = 540 Pfd.

Hauptrechnung.

a. 1625 gr — 4,8 Mk.
270 Kgr — ?

1625 gr
1 gr $\frac{48 \cdot 1000 \cdot 270}{10 \cdot 1625}$
1 Kgr
270 Kgr

b. $3^{1}/_{4}$ Pfd. — $4^{4}/_{5}$ Mk.
540 „ — ?

$^{13}/_{4}$ Pfd.
$^{1}/_{4}$ „ $\frac{24 \cdot 4 \cdot 540}{5 \cdot 13}$ (108)
1 „
540 „

$= \frac{10368 \text{ Mk.}}{13} = 797{,}538\ldots$ Mk. = 797 Mk. 53,8 Pfg.

Diese Beispiele werden genügen. Der fähige Schüler wird ohne viele Anleitung die verschiedenen Wege finden, welche zum Ziele führen. Damit aber auch der minderfähige, welcher der Beihilfe bedarf, gleichen Schritt halte, so müssen verschiedene Aufgaben auf die mannigfachste Weise mit sämmtlichen Schülern der Abtheilung aufgelöst und hiebei von diesen die weniger befähigten ganz besonders berücksichtigt werden. — Als einzige Regel stellt sich dabei heraus, daß jede mehrfach benannte Zahl in eine einfach benannte zu verwandeln sei.

II. Der Zweisatz in Divisionsform.

§. 235. Mit gleichbenannten ganzen Zahlen.

Beispiel 1. 8 Meter zu 14 Mark; was kosten 13 Meter?

Ansatz und Berechnung:

8^m 14 Mark
13 ?

8^m | 14 Mark
1^m 8 |
13^m | 13

| 42
| 14
8 | 182 | 22,75 M.
16
22
16
6,0
56
40
40

22,75 Mark = 22 M. 75 Pfg.

9 Meter kosten 14 Mrk.
13 Meter, wie viel?

Ich gehe von 8^m auf 1^m und von 1^m auf 13^m.

8^m kosten 14 M.; die 14 M. setze ich auf die rechte Seite des senkrechten Striches.

1^m kostet den 8. Theil von 14 M.; um den 8. Theil von 14 M. zu erhalten, so muß ich die 14 M. durch 8 theilen. Ich setze daher die 8 als Divisor auf die linke Seite und lese: 14 M. getheilt durch 8.

13^m kosten 13mal so viel als 1^m; sie kosten also den 8. Theil von 14 M. 13mal oder 13 × 14 M. getheilt durch 8. Daher kommt 13 unter 14 M.

Um den 8. Theil von 13 × 14 M. zu erhalten, so muß ich die 14 M. durch 13 multipliciren und das Ergebniß durch 8 theilen. 13 × 14 M. = 182 M.; 182 M. durch 8 getheilt = 22 Mark 75 Pfg. Also 2c.

Beispiel. 2. Ein Herr logirte in einem Gasthause und mußte für 24 Tage 58 Mrk. zahlen. Wie viel wird er für weitere 42 Tage zu zahlen haben.

24 Tg. 58 Mrk.
42 Tg. ?

24 Tg. | 58
1 „ 24 |
42 „ | 42

12 | 29
2 | 7
2 | 203 | $101\frac{1}{2}$ Mrk.

Für 24 Tage zahlt man 58 Mrk.; für 42 Tage wie viel?

Ich gehe von 24 Tg. auf 1 Tg. und von 1 Tg. auf 42 Tage.

Für 24 Tage zahlt man 58 Mrk.; für 1 Tag zahlt man den 24. Theil von 58 Mrk., d. i. 58 Mrk., getheilt durch 24; für 42 Tage zahlt man 42mal so viel, nämlich 42 × 58 M., getheilt durch 24.

Ich muß daher 42 × 58 Mrk. rechnen und das Produkt durch 24 theilen. Die Zahl 24 ist also der Theiler und die Zahlen 58 und 42,

miteinander multiplicirt, geben das, was zu theilen ist; sie bilden die Faktoren des Dividenden.

Wir erinnern uns, daß es vortheilhaft ist, den Divisor und den Dividenden gegen einander zu heben, und ein Blick auf die Zahlen zeigt, daß dies hier geschehen kann. Wir heben zuerst 24 und 58 durch 2. In Folge dessen ist dann noch mit der Hälfte von 24, d. i. mit 12, in die Hälfte von 42×58 Mrk., nämlich in 42×29 Mrk., zu dividiren. Nun heben wir wieder 12 gegen 42 durch 6, und dividiren dann also noch mit dem sechsten Theil von 12, d. i. mit 2, in den sechsten Theil von 42×29 Mrk., nämlich in 7×29 Mrk; 7×29 Mrk. = 203 Mrk.; 203 Mrk. durch 2 getheilt = 101 Mrk. 50 Pfg. Also sind für weitere 42 Tage 101 Mrk. 50 Pfg. zu zahlen.

§. 236. Mit gemeinen Brüchen.

Beispiel 1. Ein gewisses Kapital wirft in $^5/_8$ Jahren 24 Mrk. Zinsen ab; wie viel in $3^3/_8$ Jahren?

Ansatz und Berechnung.

$^5/_8$ J.	58 Mrk.	
$3^3/_8$ J.	?	
$^5/_8$ J.		24 Mrk.
$^1/_8$ „	5	
$^{27}/_8$ „		27
		168
		48
	5	648 | 129 Mrk. 60 Pfg.

Denk- oder Sprechweise.

In $^5/_8$ Jahren macht der Zins 24 Mrk., in $^1/_8$ J. macht er den 5. Theil so viel, also 24 Mrk., getheilt durch 5; in $3^3/_8$ oder $^{27}/_8$ J. beträgt er 27mal so viel als in $^1/_8$ Jahr, d. i. 27 × 24 Mrk., getheilt durch 5.

Beipiel 2. $^3/_4$Hl Wein kosten 132 Mark; wie viel 6Hl?

Ansatz und Berechnung.

$^3/_4$Hl	132 Mark	
6 „	?	
$^3/_4$Hl		132
$^1/_4$ „	3	
1 „		4
6 „		6
	1	2
	1	1056 M.

Denk- oder Sprechweise.

Ich gehe von $^3/_4$ Hl auf $^1/_4$ Hl,
von $^1/_4$ „ „ 1 „ und
von 1 „ „ 6 „
$^3/_4$Hl kosten 132 Mark;
$^1/_4$ „ kostet den 3. Theil davon; 132 Mark, getheilt durch 3.
1 „ kostet 4mal so viel, 4×132 M., geth. d. 3.
6 „ kosten wieder 6mal so viel, 6×4 ×132 M., getheilt durch 3.

Beisp. 3. Um $^4/_5$ Mk. erhalte ich 8 Dgr Gewürz, was kosten 13 Dgr?

Ansatz und Berechnung.

8 Dgr	$^4/_5$ Mk.	
13 „	?	
8 Dgr	5	4
1 „	8	
13 „	2	13
	10	13 Mk. = 1,3 Mrk.

8 Dgr kosten $^4/_5$ Mk. oder 4 Mk. getheilt durch 5; 1 Dgr kostet den 8. Theil davon, also 4 Mk. getheilt 8×5; und 13 Dgr kosten dieses 13mal, nämlich 13×4 Mk., getheilt durch 8×5; durch 4 gekürzt = 13, getheilt durch 5×2.

Beisp. 4. Ein Mahlgang mahlt in 15 Std. $5\frac{1}{4}$ Hl Korn; wie viel in 24 Std.? Antwort: 8Hl 40lt.

Ansatz und Berechnung.

15 Std.		$5\frac{1}{4}$ Hl
24 "		?
15 Std.	4	21
1 "	15	
24 "		24
	1	6
	5	7
	5	42

$5\frac{1}{4} = \frac{21}{4} = 21$, getheilt durch 4. So viele Hektoliter mahlt ein Gang in 15 Std.; in 1 Std. mahlt er den 15. Theil davon, also 21Hl, getheilt durch 15×4; und in 24 Std. mahlt er 24mal so viel, als in 1 Std., nämlich **24 × 21** Hl, getheilt durch 15×4.

Beisp. 5. Von $4\frac{1}{2}$ Hektar erntete man $13\frac{3}{4}$ Schober Getreide; wie viel von $\frac{4}{5}$ Hektar? Antw.: $2\frac{4}{9}$ Schober.

Ansatz und Berechnung.

a.

$4\frac{1}{2}$ Hektar		$13\frac{3}{4}$ Schbr.
$\frac{4}{5}$ "		?
$\frac{9}{2}$ Hektar	4	55
$\frac{1}{2}$ "	9	
1 "		2
$\frac{1}{5}$ "	5	
$\frac{4}{5}$ "		4
	1	11
	9	$22 = 2\frac{4}{9}$ Schbr.

b.

$4\frac{1}{2}$ Hektar		$13\frac{3}{4}$ Schbr.
$\frac{4}{5}$ "		?
$4\frac{1}{2}$ Hektar	4	55
1 "	$4\frac{1}{2}$	
$\frac{4}{5}$ "		4/5
	9	2
	5	4
	1	11
	9	22

Die Berechnung unter a ist an sich klar. Bei der unter b heißt es: $4\frac{1}{2}$ Hektar geben $13\frac{3}{4}$ oder $\frac{55}{4}$ Schbr.; 1 Hektar gibt $\frac{55}{4}$ Schbr., getheilt durch $4\frac{1}{2}$; $\frac{4}{5}$ Hektar geben dieß $\frac{4}{5}$mal. Nun werden die gemischten Zahlen eingerichtet, die Zähler als ganze Zahlen gesetzt und die Nenner auf die entgegensetzte Seite geschafft. Es ist hier also ganz so wie bei der Division mit Brüchen. Man betrachtet oder setzt den Zähler als ganze Zahl und stellt das ursprüngliche Verhältniß zwischen Divisor und Dividend dadurch wieder her, daß man den Nenner auf die andere Seite schafft. Sowie man den Divisor und den Dividenden gegenseitig heben kann, so kann man sie auch gegenseitig vervielfachen.

§. 237. Mit Decimalbrüchen.

Zur Vermeidung von Wiederholungen verweisen wir auf §. 233. Alles dort Gesagte findet auch hier seine Anwendung.

Beispiel 1. 0,5m Zeug zu 48 Pfennige; was kosten 0,9m? Antwort: 86,4 Pfg.

a.

0,5m		48 Pfg.
0,9"		?
0,5m		48 Pfg.
0,1"	5	
0,9"		9
	5	432

b.

0,5m		48 Pfg.
0,9"		?
5m		48 Pfg.
1"	5	
9"		9
	5	432

Eine dritte Weise ist, die Decimalbrüche (0,5 m u. 0,9 m) als Ganze der Unterabtheilung (als 5 dm u. 9 dm) zu betrachten u. zu behandeln.

Beispiel 2. 0,45 Hl zu $5^3/_5$ Mk; was kosten 8,55 Hl?

a.

0,45 Hl	$5^3/_5$ Mark	
8,55 „	?	
0,45 Hl	5	28 Mk.
0,01 „	45	
8,55 „		855

b.

45 lt	$5^3/_5$ Mrk.	
855 „	?	
45 lt	5	28 Mk.
1 „	45	
855 „		855
	5	532 = 106,4 Mk.

Beispiel 3. 1,375 Kgr zu $18^3/_4$ Mk.; was kosten 3,845 Kgr? Antw.: 52,43 .. Mrk.

Ansatz und Berechnung.

a.

2,375 Kgr	$18^3/_4$ Mk.	
3,845 „	?	
1,375 Kgr	4	75 Mk.
0,001 „	1375	
3,845 „		3845

b.

1375 gr	$18^3/_4$ Mk.	
3854 „	?	
1375 gr	4	75 Mk.
1 „	1375	
3845 „		3845

Beispiel 4. Wie berechnen sich 0,8 m, wenn 5 m $12^3/_4$ Mark kosten? (2,04 Mark = 2 Mark 4 Pfg.)

Ansatz.

a.

5 m	$12^3/_4$ Mark	
0,8 „	?	
5 m	4	51 Mark
1 „	5	
0,1 „	10	
0,8 „		8

b.

5,0 m	$12^3/_4$ Mark	
0,8 „	?	
$^{50}/_{10}$ m	4	51 Mark
$^1/_{10}$ „	50	
$^8/_{10}$ „		8

Zu b. 5 = $^{50}/_{10}$; man geht nun von $^{50}/_{10}$ m auf $^1/_{10}$ m und von $^1/_{10}$ m auf $^8/_{10}$ m. So ist es am einfachsten.

Beispiel 5. Wenn man auf 3,5 Hektar Ackerfeld 1,4 Hektoliter zur Aussaat braucht, wie viel Samen wird man für 15,65 Hektar nöthig haben?

Ansatz.

3,5 Hektar	1,4 Hl
15,65 „	?

Man macht die zwei gleichartigen Glieder gleichnamig, indem man der Zahl 3,5 eine Null beifügt, und geht dann entweder von $^{350}/_{100}$ auf $^1/_{100}$ und von $^1/_{100}$ auf $^{1565}/_{100}$ Hl, oder man löst die Hektar in Ar auf.

a.

3,50 Hektar		1,4 Hl
15,65 "		?
3,50 Hektar		1,4 Hl
0,01 "	350	
15,65 "		1565
	70	313
	10	0,2
	10	62,6
	= 6,26 Hl	

b.

350 Ar		1,4 Hl
1565 "		?
350 Ar	10	14 Hl
1 "	350	
1565 "		1565
	70	313
	10	2
	100	626
	= 6,26 Hl	

Anm. Hier ist die Frage, welches Verfahren den Vorzug verdiene, das unter a, wo der Decimalbruch (1,4) als solcher fortgeführt, oder das unter b, wo der Decimalbruch als ganze Zahl gesetzt und sein Nenner als Faktor des Divisors auf die andere Seite geschafft wird.

Wer in allen Fällen Decimalbrüche sicher kürzen kann, für den ist das Verfahren unter a zu empfehlen. Wer nicht völlig zuverlässig darin ist, der halte sich an das Verfahren unter b. 1,4 = $^{14}/_{10}$ = 14, getheilt durch 10; der Nenner 10 kommt daher als ein Faktor des Divisors auf dessen Seite.

§. 238. Mit ungleich benannten Zahlen.

Beispiel 1. Wie hoch kommen 35 Dgr, wenn 7 Pfd. 23 Mark kosten? Antwort: 2,3 Mark = 2 Mark 30 Pfg.

Ansatz und Berechnung.

7 Pfd.		23 Mark
35 Dgr		?
7 Pfd.		23 M.
1 "	7	
1 Dgr	50	
35 "		35
	1	5
	10	1
	10	23

Ich schließe von 7 Pfd. auf 1 Pfd., von 1 Pfd. auf 1 Dgr, und von 1 Dgr auf 25 Dgr.

7 Pfd. kosten 23 Mark, 1 Pfd. kostet $^1/_7$ von 23 Mark oder 23 Mark, getheilt durch 7; 1 Dgr kostet wieder $^1/_{50}$ davon, nämlich 23 Mark, getheilt durch **50**×7; und 35 Dgr kosten 35mal so viel, also **35**×23 Mark, getheilt durch 50×4. — 7 und 35 werden durch 7, und 50 und 5 durch 5 gehoben. Dann habe ich nur noch 23 Mark durch 10 zu theilen.

Die Aufgabe wird übrigens, wie unter §. 234, noch auf eine zweite und dritte Weise gerechnet. Ueberhaupt ist Alles, was dort gesagt, auch hieher zu beziehen.

Beispiel 2. 3 Pfd. 12 Dgr 5 gr zu 2 Mrk. 40 Pfg.; wie hoch kommen 5 Ctr. 20 Kilo? Antwort: Auf 398 Mk. 76,9.. Pfg.

Vorarbeit:

a. 3 Pfd. 12 Dgr 5 gr = 1625 gr
2 Mrk. 40 Pfg. = 2,4 Mrk.
5 Ctr. 20 Kilo = 540 Pfd.

b. 3 Pfd. $12^1/_2$ Dgr = $3^1/_4$ Pfd.
2 Mrk. 40 Pfg. = $2^2/_5$ Mk.
5 Ctr. 20 Kilo = 540 Pfd.

Ansatz.

a. 1625 gr 2,4 Mk.
540 Pfd. ?

1625 gr	10	24 Mk.
1 gr	1625	
1 Dgr		10
1 Pfd.		50
540 „		540
	13	5184

b. $3^1/_4$ Pfd. $2^2/_5$ Mk.
540 Pfd. ?

$^{13}/_4$ Pfd.	5	12 Mk.
$^1/_4$ „	13	
1 „		4
540 „		540
	13	5184

Beispiel 3. 6 Kgr 24 Dgr zu 21 Mk. 45 Pfg.; wie hoch kommen 7 Dgr 2 gr?

Ansatz und Ausrechnung.

a. 624 Dgr 2145 Pfg.
72 gr ?

624 Dgr		2145 Pfg.
1 „	624	
1 gr	10	
72 „		72
	26~~0~~	643,5=24,7..Pfg.

b. 6240 gr 21,45 Mk.
72 „ ?

6240 gr	100	2145 Mrk.
1 „	6240	
72 „		42
	26~~000~~	6,435=0,247.. Mk.
		=24,7 od. 25 Pfg.

Beispiel 4. 7 Hl 60 lt zu 121 Mark 60 Pfg.; wie hoch kommen 4 Hl 70 lt? Antwort: Auf 75,2 Mrk. = 75 Mk. 20 Pfg.

Vorarbeit:

a.

7 Hl 60 lt = 760 lt
121 Mk. 60 Pfg. = $121^3/_5$ M.
4 Hl 70 lt = 470 lt

b.

7 Hl 60 lt = 7,6 Hl
121 M. 60 Pfg. = 121,6 Mark
4 Hl 70 lt = 4,7 Hl

Ansatz.

760 lt $121^3/_5$ Mark
470 lt ?

760 lt	5	608 Mk.
1 „	760	
470 „		470
	5	376 Mark

7,6 Hl 121,6 Mark
4,7 „ ?

7,6 Hl	10	1216 Mrk.
0,1 „	76	
4,7 „		47
	19~~0~~	1428,8 Mark

III. Die Proportions-Rechnung.

§. 239. Mit unbenannten Zahlen.

a. 5 : 10 7 : 14.

Wie verhält sich 5 zu 10? Und wie verhält sich 7 zu 14? 5 verhält sich zu 10, wie 1 : 2, und 7 verhält sich zu 14, wie 1 : 2; 10 ist das 2fache von 5, und 14 ist das 2fache von 7. Die zwei

Zahlenpaare bilden daher zwei gleiche Verhältnisse. Darum können wir sie durch das Zeichen der Gleichheit verbinden, und so mit einander verbunden bilden sie eine Proportion. Steht:

5 : 10 = 7 : 14.

Wie viele Verhältnisse gehören demnach zu einer Proportion? Und was für Verhältnisse? — Wie viel Glieder hat ein Verhältniß? Wie viel Glieder hat eine Proportion? Welche von den vorstehenden Zahlen bildet das erste Glied der Proportion? Welche das zweite? das dritte? das vierte?

Die zwei Verhältnisse sind einander gleich, weil 5 in 10 so oft enthalten ist, als 7 in 14. Die vier Zahlen bilden daher eine Proportion, weil die erste Zahl eben so oft in der zweiten liegt, als die dritte in der vierten. Woran kann man also erkennen, ob vier Zahlen eine Proportion bilden?

In dem Verhältniß 5 : 10 ist das zweite Glied größer, als das erste; eben so in dem Verhältniß 7 : 14. Beide sind daher steigend, zunehmend oder wachsend. Stellen wir die Glieder derselben um,

10 : 5 = 14 : 7

so erhalten wir zwei fallende Verhältnisse. Und da 10 in 5 eben so oft enthalten ist, wie 14 in 7, nämlich $^1/_2$mal, so sind die zwei Verhältnisse auch jetzt wieder einander gleich. Es gibt also Proportionen mit steigenden Verhältnissen, und Proportionen mit fallenden Verhältnissen.

Untersucht, ob folgende Verhältnißpaare Proportionen bilden, oder nicht:

14 : 28	12 : 6	8 : 14	5 : 15
16 : 4	7 : 28	12 : 9	18 : 12

Wenn zwei Verhältnisse eine Proportion bilden sollen, so müssen beide steigend, oder beide fallend sein. Noch mehr: sie müssen beide in gleichem Grade steigen, oder in gleichem Grade fallen. — Schreibt 6 steigende und 6 fallende Proportionen auf!

b. 2 : 6 = 11 : x.

Der Buchstabe x steht für das unbekannte vierte Glied, das gesucht werden soll. Wie finden wir es?

So oft 2 in 6 enthalten ist, eben so oft muß 11 in x enthalten sein. 2 ist in 6 dreimal; also muß 11 in x gleichfalls 3mal liegen. In welcher Zahl ist 11 dreimal enthalten? In 3 × 11 oder 33. Also ist x = 33. Und die Proportion heißt jetzt:

2 : 6 = 11 : 33

So wird auch das 4. Glied nachstehender Proportionen gesucht:

3 : 15 = 2 : x	$^3/_7$: $^6/_7$ = 14 : x	0,3 : 0,9 = 4 : x
7 : 28 = 5 : x	$12^1/_2$: $2^1/_2$ = 50 : x	0,16 : 1,44 = 7 : x
12 : 8 = 20 : x	$^2/_3$: 4 = $^3/_4$: x	2,5 : 9,75 = 9 : x
4 : 3 = 24 : x	$^9/_{12}$: $^9/_{20}$ = $^4/_5$: x	4,35 : 8,7 = 6,5 : x

c. $3 : 6 = 5 : 10$

3 ist in 6, wie 5 in 10, 2mal enthalten. Die 4 Zahlen bilden also eine Proportion. Multiplicire die äußeren Glieder 3 und 10, und dann die inneren Glieder 6 und 5 mit einander, und vergleiche die beiden Produkte! ($3 \times 10 = 30$, und $6 \times 5 = 30$.)

Das Produkt der äußeren Glieder ist gleich dem Produkte der inneren.

Dieß steht mit dem, daß 3 in 6 so oft enthalten ist, als 5 in 10, im engsten Zusammenhang. Da 3 in 6 2mal enthalten ist, so ist $6 = 2 \times 3$; und da 5 in 10 2mal enthalten ist, so ist $10 = 2 \times 5$. Also ist $3 \times 10 = 3 \times (2 \times 5)$, und $6 \times 5 = (2 \times 3) \times 5$. Nun ist aber $3 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 5$; also ist auch $3 \times 10 = 6 \times 5$.

Anschaulicher: $3 : 6 = 5 : 10$
$3 : 2.3 = 5 : 2.5$

Da nun bei jeder Proportion das erste Glied so oft im zweiten enthalten ist, als das dritte in dem vierten, so ist auch bei jeder Proportion das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkt der inneren. Dieß gibt uns ein Mittel in die Hand, das fehlende vierte Glied einer Proportion noch auf eine zweite Weise zu finden.

d. $2 : 6 = 11 : x$

$2 \times x = 6 \times 11$; $6 \times 11 = 66$; also ist auch $2 \times x = 66$; ist aber 2mal $x = 66$, so ist 1mal x oder $x = 66$, getheilt durch $2 = 33$; also verhält sich

$$2 : 6 = 11 : 33.$$

Hiernach wird das unbekannte 4. Glied einer Proportion gefunden, wenn man die inneren Glieder miteinander multiplicirt und das Produkt durch das erste Glied dividirt.

Nun lasse man auch nach dieser Regel das 4. Glied der oben gegebenen Proportionen suchen.

Für Präparanden dürfte sich folgende Form empfehlen:

1) $2 : 5 = 11 : x$
$2x = 5 \,.\, 11$
$x = \frac{5 \,.\, 11}{2}$
$x = \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}$

2) $4 : 7 = \frac{3}{5} : x$
$4x = \frac{7 \,.\, 3}{5}$
$x = \frac{7 \,.\, 3}{4 \,.\, 5}$
$x = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$

$2x = 5 \,.\, 11$; $x = 5 \,.\, 11$, getheilt durch 2.

$4x = 7 \,.\, \frac{3}{5}$ od. $7 \,.\, 3$, geth. durch 5; $x = 7 \,.\, 3$, getheilt durch $4 \,.\, 5$.

3) $4 : {}^{7}/_{8} = 5 : x$

$$4x = \frac{7 \cdot 5}{8}$$

$$x = \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 4}$$

$$x = \frac{35}{32} = 1^{3}/_{32}$$

$4x = {}^{7}/_{8} \cdot 5$ od. $7 \cdot 5$, geth. durch 8;
$x = 7 \cdot 5$, getheilt durch $4 \cdot 8$

4) ${}^{3}/_{5} : 8 = 7 : x$

$${}^{3}/_{5}x = 8 : 7$$

$$x = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5}{3}$$

$$x = \frac{280}{3} = 93^{1}/_{3}$$

${}^{3}/_{5}x = 8 \cdot 7$; $x = 8 \cdot 7$, div. durch ${}^{3}/_{5}$
$= 8 \cdot 7$, multiplicirt durch ${}^{5}/_{3}$.

5) ${}^{8}/_{9} : {}^{4}/_{5} = {}^{5}/_{6} : x$

$$x = \frac{\overset{3}{\not{4}} \cdot \not{5} \cdot \not{9}}{\not{5} \cdot \underset{2}{\not{6}} \cdot \underset{2}{8}} = \frac{3}{4}$$

$x = {}^{4}/_{5} \times {}^{5}/_{6}$, dividirt durch ${}^{8}/_{9}$,
$= {}^{4}/_{5} \times {}^{5}/_{6}$, multipl. durch ${}^{9}/_{8}$,

6) $32^{2}/_{5} : 10^{2}/_{7} = 18^{3}/_{8} : x$

$$\frac{162}{5} : \frac{72}{7} = \frac{147}{8} : x$$

$$x = \frac{72 \cdot 147 \cdot 5}{7 \cdot 8 \cdot 162}, \text{ gekürzt}$$

$$= \frac{35}{6} = 5^{5}/_{6}$$

7) $0{,}72 : 8{,}8 = 6{,}3 : x$

$$x = \frac{8{,}8 \cdot 6{,}3}{0{,}72} = \frac{88 \cdot 63}{72} = 77$$

Wir erheben die Decimalbrüche auf ganze Zahlen. Der Divisor hat zwei Decimalstellen. Die Faktoren des Dividenden haben zusammen ebenfalls zwei solche, und, miteinander multiplicirt, geben sie auch ein Produkt mit zwei Decimalstellen. Es sind also 100tel durch 100tel zu dividiren. Wir streichen daher überall das Komma und machen hierdurch sowohl den Divisor, als den Dividenden 100mal so groß. Dann suchen wir zu kürzen.

8) $3{,}6 : 4{,}8 = 5{,}7 : x$

$$x = \frac{4{,}8 \cdot 5{,}7}{3{,}6} = \frac{48 \cdot 5{,}7}{36} = \frac{48 \cdot 57}{360} \text{ od. } \frac{48 \cdot 57}{36 \cdot 10} = 7{,}6$$

Der Divisor hat eine Decimalstelle, der Dividend hat im Ganzen zwei. Streichen wir das Komma der beiden Faktoren des Dividenden, so wird dieser 10×10 oder 100mal so groß. Streichen wir das Komma bei dem Divisor, so wird er nur 10mal so groß. Also müssen wir dem Divisor noch eine Null, oder die Zahl 10 als Faktor beifügen.

9) $0{,}225 : 1{,}2 = 10{,}5 : x$

$$x = \frac{1{,}2 \cdot 10{,}5}{0{,}225} = \frac{12 \cdot 105}{22{,}5} = \frac{12 \cdot 105 \cdot 10}{225} = 65.$$

Der Divisor hat drei Decimalstellen, der Dividend hat im Ganzen nur zwei. Streichen wir überall das Komma, so wird der Divisor 1000mal, der Dividend nur 100mal so groß. Also ist dem Dividenden entweder noch eine Null, oder die Zahl 10 als Faktor beizufügen.

§. 240. Angewandt auf Regeldetri-Aufgaben.

a. Mit gleichbenannten ganzen Zahlen.

Das Erste und Wichtigste ist die Bildung des Ansatzes. Hierbei gehe man so zu Werke, daß die Schüler sich gleich von vorne herein gewöhnen, das erste Verhältniß nicht eher zu setzen, bis sie durch besonnene Betrachtung der Aufgabe deutlich erkannt haben, ob dasselbe steigend oder fallend sein müsse. „Muß mehr oder weniger herauskommen, als das dritte Glied beträgt? Verlangt die Aufgabe eine zunehmende oder eine abnehmende Proportion?" sind die Fragen, die bei jeder Aufgabe gestellt und beantwortet werden müssen, bevor zum Ansetzen der Glieder des ersten Verhältnisses übergegangen werden darf.

Beispiel 1. 5^m kosten 4 Mark; wie viel werden 8^m kosten?

Fertigung des Ansatzes.

Was soll hier berechnet werden? (Wie viel 8^m kosten.) Da wir die Anzahl Mark, welche die 8^m kosten, noch nicht kennen, so bezeichnen wir sie vorläufig durch den Buchstaben x.

. . . x Mark.

Das ist das vierte Glied. Das vierte Glied bildet mit dem dritten das zweite Verhältniß der Proportion. In einem Verhältnisse können nur gleichartige Größen stehen. Welche von den drei gegebenen Zahlen wird daher in die dritte Stelle kommen müssen? (4 Mark.)

. . 4 Mark : x Mark

Welche Zahlen bilden nun das erste Verhältniß? (5^m und 8^m.) Wie müssen wir aber das Verhältniß bilden: zunehmend 5 : 8, oder abnehmend 8 : 5? 4 Mark sind der Preis für 5^m; 8^m kosten mehr. Soll das vierte Glied größer werden, als das dritte, so muß auch das 2. Glied größer sein, als das erste. Die Proportion muß zunehmend sein. Wir müssen daher setzen:

$$5^m : 8^m = 4 \text{ Mark} : x \text{ Mark}$$

Ausrechnung.

a. 5^m kosten 4 Mark; 2×5^m kosten 2×4 Mark; 3×5^m kosten 3×4 Mark u. s. f. Wie vielmal 5^m sind die zu berechnenden 8^m? 5^m sind in 1^m $^1/_5$mal, in 8^m $^8/_5$mal enthalten. 8^m sind also $^8/_5 \times 5^m$; folglich kosten sie auch $^8/_5 \times 4$ Mark. Wie rechnest du das? Antwort: Ich rechne 8×4 Mark und theile das Produkt durch 5.

$5^m : 8^m = 4$ Mark : x Mark
$\times 8$

5 | 32 | 6,4 Mark
30
2,0
20

b. Das Produkt der äußern Glieder ist gleich dem der innern. Da 4 Mark durch 8 Meter nicht multiplicirt werden können, so denke ich mir das erste Verhältniß als ein Verhältniß in unbenannten Zahlen, nämlich so:

$$5 : 8 = 4 \text{ Mark} : x$$

$$x = \frac{8.4}{5} = \frac{32}{5} = 6{,}4 \text{ M.}$$

$5x = 8 \times 4$ Mark; also ist $x = 8 \times 4$ Mark, getheilt durch 5; 8×4 Mark = 32 Mark; 32 Mark durch 5 getheilt = 6,4 M. = 6 Mark 40 Pfg.

So ausführlich wird zuerst jede Aufgabe behandelt.

Hiermit ist der Schüler in die angewandte Proportionsrechnung eingeführt. Er kennt den Ansatz und die Ausrechnung, welche in allen Fällen darin besteht, daß man das dritte Glied durch das zweite multiplicirt und das Produkt durch das erste Glied dividirt. Das Verfahren, den Ansatz zu fertigen, wird jetzt freier und einfacher. Es wird nicht eher Etwas notirt, bis die Aufgabe vollständig beurtheilt und den Zahlen ihre Stelle in der Proportion angewiesen ist.

Der Schüler hat das Aufgabenheft in der Hand und liest die betreffende Aufgabe laut vor.

Für 12 Mark erhält man 21 Kilo; wie viel für 17 Mark? Dann fährt er fort: Hiernach ist zu suchen, wie viel Kilo man für 17 Mark bekommt, und gegeben ist, wie viel man für 12 Mark erhält? (Jetzt haben wir die beiden Zahlen, welche das erste Verhältniß bilden, 17 Mark und 12 Mark. Es ist nun noch zu bestimmen, ob das Verhältniß steigend oder fallend sein muß. Darum heißt es weiter:) Für 12 Mark erhält man 21 Kilo; für 17 Mark erhält man **mehr**; die Mark müssen daher in einem **steigenden** Verhältniß stehen. Ich setze also: 12 Mark verhalten sich zu 17 Mark, wie 21 Kilo zu x. Steht mit Ausrechnung:

$$12 : 17 = 21 \text{ Kilo} : x$$

$$x = \frac{17 \cdot \overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{4}{\cancel{12}}} = \frac{119}{4} = 29{,}75 \text{ Kilo.}$$

Beispiel 2. Für 72 Tg. zahlt man 150 Mark Kostgeld; wie viel für 42 Tage?

Hiernach ist zu suchen, wie viel Kostgeld für 42 Tage gezahlt werden muß, und gegeben ist, wie viel Kostgeld für 72 Tage gezahlt wird. Für 72 Tage werden 150 Mark gezahlt; für 42 Tage ist **nicht so viel** zu zahlen. Die Verhältnisse müssen demnach **fallend** sein. Ich setze daher: 72 Tage verhalten sich zu 42 Tagen, wie 150 Mark zu x. Steht:

$$72 : 42 = 150 \text{ Mark} : x.$$

7 25

$$\frac{42 \cdot 150}{72} = \frac{175}{2} = 87{,}5 \text{ Mark}$$

12
2

b Mit gemeinen Brüchen.

Beispiel 1. Ein Kapital wirft in $^5/_8$ Jahren 24 Mrk. Zinsen ab; wie viel in $3^3/_8$ Jahren? Antwort: 129 Mrk 60 Pfg.

Ansatz. $^5/_8 : 3^3/_8 = 24$ Mrk. : x

$$x = \frac{27.24.8}{8.1.5} = \frac{648}{5} = 129{,}6 \text{ Mrk.}$$

Beispiel 2. $3^1/_8$ Ctr. zu 11 Mark 25 Pfg.; was kosten $^4/_5$ Ctr.?

Ansatz. $3^1/_8 : {^4/_5} = 11^1/_4$ M. : x

9

$$x = \frac{4 \,.\, 45 \,.\, 8}{5 \,.\, 4 \,.\, 25} = \frac{72}{25} = 2{,}88 \text{ Mark.}$$

c. Mit Decimalbrüchen.

Beispiel 1. Wie berechnen sich 0,9 Meter, wenn 0,5 Meter 48 Pfennige kosten?

Ansatz. 0,5 : 0,9 = 48 Pfg. : x

$$x = \frac{0{,}9 \,.\, 48}{0{,}5} = \frac{9 \,.\, 48}{5} = \frac{432}{5} = 86{,}4 \text{ Pfg.}$$

Beispiel 2. Für 3,5 Mark erhält man 1,4 Kilogramm; wie viel für 15,65 Mark?

Ansatz. 3,5 : 15,65 = 1,4Kgr : x

3,13 2

$$x = \frac{15{,}65 \,.\, 1{,}4}{3{,}5} = \frac{15{,}65 \,.\, 14}{35} = 6{,}26 \text{Kgr}$$

5

d. Mit ungleichbenannten Zahlen.

Beispiel 1. Wie hoch berechnen sich 15 Ctr. Kaffee, wenn 75 Pfund 96 M. kosten? Antwort 1920 Mrk.

Zu berechnen ist, wie hoch 15 Ctr. Kaffee kommen; gegeben ist, wie viel 75 Pfd. kosten; 75 Pfd. kosten 96 Mk.; 15 Ctr. kosten mehr; 75 Pfd. und 15 Ctr. müssen daher in einem steigenden Verhältniß stehen. Das erste Verhältniß ist also 75 Pfd. : 15 Ctr. Damit aber die Zahlen, abgesehen von ihrer Benennung, ein steigendes Verhältniß bilden, so müssen beide Größen, die zwar gleichartig, aber nicht

gleichnamig sind, in gleichbenannte verwandelt werden. Und es geschieht, indem man a. die 15 Ctr. in Pfd., oder b. die 75 Pfd. in Centnertheile verwandelt.

a. 75 Pfd. : 1500 Pfd. = 96 M : x b. $^3/_4$ Ctr. : 15 Ctr. = 96 M. : x

c. 0,75 Ctr. : 15 Ctr. = 96 Mk. : x

Beispiel 2. In einer Fabrik wurden in 14 Wch. und 4 Tg. 1 Ctr 43 Pfd. Oel verbraucht; wie viel in 5 Wch. 3 Tg.? Antwort: $53^5/_8$ Pfd.

a.

14 Wch. 4 Tg. : 5 Wch. 3 Tg. = 1 Ctr. 43 Pfd. : x

88 Tg. : 33 Tg. = 134 Pfd. : x

b.

$14^2/_3$ Wch. : $5^1/_2$ Wch. = 143 Pfd. : x

§. 241.

Wir haben nun für die schriftliche Berechnung der Regeldetri- oder Verhältnißaufgaben dreierlei Formen gegeben: den Zweisatz in Bruchform, den Zweisatz in Divisionsform und die Proportion. Es versteht sich von selbst, daß damit nicht gemeint ist, als sollten alle 3 Formen nach einander auch in der Schule behandelt werden. Wir rathen vielmehr, bei einer Form zu bleiben, hierin aber eine auf Einsicht und Selbstthätigkeit beruhende und darum sichere Fertigkeit zu erstreben. Eine zweckmäßige Rechnungsform hat einen großen Werth. Man glaube aber ja nicht, mit Einführung derselben schon alles gethan zu haben. Nicht die Form ist die Hauptsache. Wichtiger ist das Verständniß des innern Wesens, der klare Durchblick der Beziehungen, die verständige Beurtheilung der Aufgaben. Wo man diesen Punkt mit Liebe und Geschick recht in's Auge faßt, da wird mit einer unvollkommeneren Form mehr geleistet, als anderwärts, wo man sich einer besseren Form bedient, diese aber über das Wesen setzt und die gründliche Beurtheilung der Aufgaben außer Augen läßt.

Daß die Lehre von der Proportion nicht ausführlicher behandelt wurde, wie vielleicht von Manchem gewünscht werden möchte, hatte seinen Grund: wir mußten uns auf den dafür verwendeten Raum beschränken.

Bei den nun folgenden Aufgaben wird diejenige Rechnungsform angewendet, welche man mit den Schülern eingeübt hat, also entweder der Zweisatz in der einen oder in der andern Form, oder die Proportion.

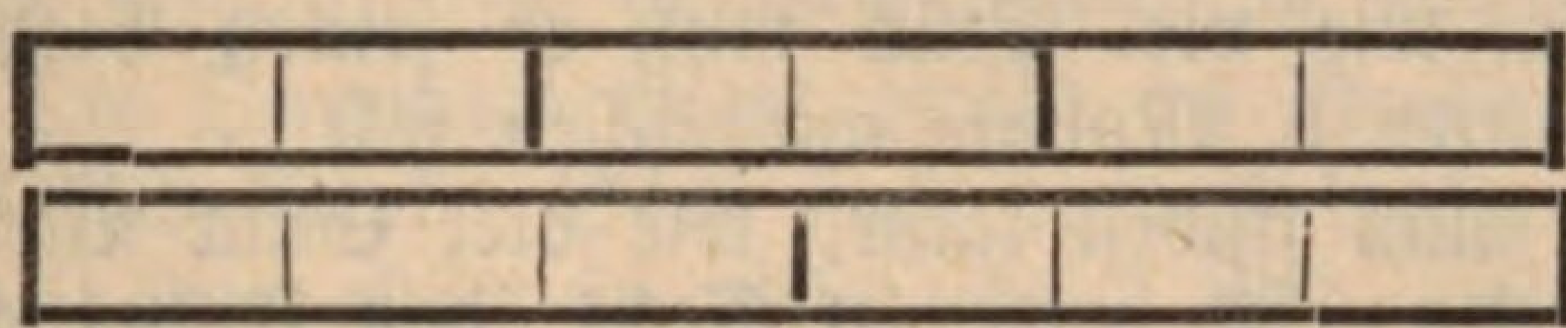
B. Aufgaben mit einfachen umgekehrten Verhältnissen.

A. Mündlich.

§. 242.

1) 3 Taglöhner fertigen einen Graben in zwei Tagen; wie lange brauchen 2 dazu?

Aufl. Die 3 Taglöhner treten an die Arbeit. Um sicher zu wissen, wie viel davon auf jeden von ihnen kommt, theilen sie dieselbe in 3 gleiche Theile, und um zu wissen, wie viel der Mann in 1 Tag zu machen hat, so theilt jeder sein Stück wieder in 2 gleiche Theile. Die ganze Arbeit ist sonach in 3 × 2 oder 6 Theile getheilt. Jeder Theil ist das Tagwerk für 1 Mann. 1 Mann würde also zur ganzen Arbeit 6 Tage brauchen. Wird sie von 2 Taglöhnern ausgeführt, so kommt auf jeden die Hälfte von den 6 Theilen, nämlich 3. Also bringen 2 Taglöhner den Graben in der Hälfte von den 6 Tg., d. i. in 3 Tg. fertig.

3 Taglöhner  2 Tage.

2 Taglöhner 3 Tage.

2) Ein Getreidefeld kann von 4 Schnittern in 3 Tagen geschnitten werden; wie viel Schnitter sind erforderlich, um die Arbeit in 2 Tagen zu vollenden?

Aufl. Man denkt sich das Feld zuerst nach der Zahl der Tage in 3 und jeden Theil nach der Zahl der Schnitter wieder in 4, das Ganze aber in 3×4 oder 12 gleiche Theile getheilt. Jeder Theil ist das Tagwerk für 1 Person. Wäre die Arbeit in 1 Tg. zu vollenden, so müßten es also 12 Schnitter sein. Da aber 2 Tage Zeit gegeben sind, so ist in 1 Tg. nur die Hälfte von den 12 Theilen zu schneiden; folglich ist auch nur die Hälfte von 12 Schnittern erforderlich. In 2 Tg. wird daher die Arbeit von 6 Schn. vollendet.

3) Will ein Landmann seine Wiese in 2 Tg. abmähen, so muß er täglich 8 Stunden dazu verwenden; wie lange braucht er täglich nur zu mähen, um die Arbeit in 3 Tagen zu vollenden?

Aufl. Um mit dem Mähen in 2 Tagen fertig zu werden, so muß er täglich 8 Stunden lang daran sein; also braucht er im Ganzen 2×8 oder 16 Std. Wollte er die Arbeit in 1 Tag vollenden, so müßte er in Einem fort 16 Std. darüber bleiben. Da er sich aber 3 Tage Zeit nehmen will, so braucht er in 1 Tg. nur den 3. Theil, d. i. $5\frac{1}{3}$ Std. lang zu mähen.

4) Wenn ein Mädchen täglich 4 Std. lang an einem Hemde näht, so bringt sie es in 5 Tg. fertig; wie viel Tage wird sie dazu brauchen, wenn sie täglich nur 3 Std. daran arbeiten kann?

Aufl. Wenn sie täglich 4 Std. lang näht, so bringt sie das Hemd in 5 Tg. fertig. Sie braucht also im Ganzen 4×5 oder 20 Std. Zeit dazu. Näht sie täglich nur 3 Std. daran, so braucht sie so vielmal 1 Tg., als 3 Std. in 20 Std. enthalten sind, nämlich $6\frac{2}{3}$mal 1 Tag oder $6\frac{2}{3}$ Tage.

5) A macht den Weg von München nach Hamburg zu Fuß. Geht er täglich 6 Meilen weit, so braucht er 20 Tage; wie viel Tage wird er brauchen, wenn er täglich nur 5 Meilen zurücklegt?

Aufl. Da A 20 Tage braucht, wenn er täglich 10 Meilen macht; so ist die Entfernung von München bis Hamburg = 20 × 6 oder 120 Meilen. Legt er davon täglich 5 zurück, so dauert seine Reise so vielmal 1 Tag, als 5 Meilen in 120 Meilen enthalten sind, d. i. 24 Tage.

6) Ich gehe von A nach B. Will ich die Reise in 12 Tg. vollenden, so muß ich täglich 7 Meilen zurücklegen; wie weit muß ich täglich gehen, um mein Ziel in 15 Tagen zu erreichen?

Aufl. Meine Reise dauert 12 Tg., wenn ich täglich 7 Meilen gehe. Die Länge des Wegs beträgt also 12×7 oder 84 Meilen. Will ich diese in 15 Tg. machen, so muß ich an jedem Tag $^1/_{15}$ des Wegs, mithin $^1/_{15}$ von 84 M. zurücklegen. $^1/_{15}$ von 84 M. = $5^3/_5$ Meilen.

7) Der Oekonom A hat für 24 Stück Vieh einen Futtervorrath auf 5 Monate; um wie viel Stück muß er seinen Viehstand vermindern, wenn das Futter 6 Monate ausreichen soll.

Aufl. Ehe man finden kann, wie viel Stück Vieh abzuschaffen sind, muß man wissen, für wie viel Stück das Futter auf 6 Monate ausreicht. Für 24 Stück reicht der Vorrath 5 Monate lang. Man denkt sich denselben in 24 Theile und jeden davon wieder in 5 Theile, den ganzen Vorrath also in 24 × 5 oder 120 Theile getheilt. Jeder Theil ist die monatliche Portion für 1 Stück. Sollen die 120 Portionen auf 6 Monate reichen, so darf A in einem Monat nur den 6. Theil von 120 oder 20 Portionen verfüttern. Sein Viehstand darf also auch nur 20 Stück betragen. Mithin muß er denselben um 24—20, d. i. um 4 Stück vermindern.

8) A hat für 8 Pferde auf 6 Monate Hafer; wie lange würde dieser für 5 Pferde reichen?

Aufl. Der Hafervorrath gibt 8 × 6 oder 48 Monatsportionen für 1 Pferd. Sollen davon 5 Pferde gefüttert werden, so gehen in 1 Monat 5 Portionen auf. Der Vorrath reicht also auf so vielmal 1 Monat, als 5 Portionen in 48 Portionen enthalten sind, d. i. auf $9^3/_5$ Monat.

9) Frau A braucht zu einem Kleide 8^m Zeug, welcher $0{,}7^m$ breit ist; wie viel Meter wird sie von einem Zeuge nehmen müssen, der $0{,}9^m$ breit ist?

Aufl. Die 8^m Zeug, welche $^7/_{10}$ Meter breit sind, lassen sich in 7 Streifen zerschneiden, von denen jeder 8 Meter lang und $^1/_{10}$ Meter breit ist. Fügt man dieselben an ihren Enden zusammen, so geben sie ein Stück Zeug von 7 × 8 oder 56 Meter Länge und $^1/_{10}$ Meter Weite. Um nun aus diesem Stücke ein anderes zu bilden, welches $^9/_{10}$ Meter breit ist; so muß ich es in 9 gleiche Theile theilen und diese Theile neben einander legen. Die Länge des Zeuges beträgt dann den 9. Theil von 56 Meter = $6^2/_9$ Meter. Die Frau wird daher $6^2/_9$ (= 6,222) Meter Zeug von $^9/_{10}$ Meter Breite nehmen müssen.

10) Für einen gewissen Lohn werden 3 Ctr. $5\frac{1}{4}$ Meilen weit gefahren; wie weit 7 Ctr. für dasselbe Geld?

Aufl. Werden 3 Ctr. $5\frac{1}{4}$ Meilen weit gefahren, so kommt der erste Ctr. $5\frac{1}{4}$ M. weit, der 2. Ctr. $5\frac{1}{4}$ M. weit, und der 3. Ctr. $5\frac{1}{4}$ weit. Lasse ich den 2. Ctr. zurück, so muß mir der Fuhrmann dafür den ersten Ctr. um $5\frac{1}{4}$ M. weiter, im Ganzen also $2 \times 5\frac{1}{4}$ M. weit fahren. Lasse ich auch den 3. Ctr. zurück, so muß er mir dafür den 1. Ctr. wieder um $5\frac{1}{4}$ Meilen weiter, im Ganzen also $3 \times 5\frac{1}{4}$ M. weit fahren.

1 Ctr. wird also $3 \times 5\frac{1}{4} = 15\frac{3}{4}$ Meilen weit gefahren.

Nun fällt mir ein, statt eines Centners 7 Ctr. für dasselbe Geld mitzugeben. Die Entfernung von $15\frac{3}{4}$ Meilen vertheilt sich jetzt auf die 7 Ctr. Mithin kommt auf 1 Ctr. der 7. Theil von $15\frac{3}{4}$ Meilen, d. i. $2\frac{1}{4}$ Meilen.

11) Aus einer Quantität Mehl bäckt man 24 Brode à 4 Pfd.; wie viele Brode von 3 Pfd. ließen sich daraus backen?

Aufl. Die Quantität Mehl ergibt 24 Brode à 4 Pfd., mithin 24×4 oder 96 Pfd. Brod. Bäckt man daraus lauter Brode, die 3 Pfd. wiegen, so erhält man ihrer so viele, als 3 Pfd. in 96 Pfd. enthalten sind, nämlich 32.

12) Wenn das Hektoliter Korn 7 Mrk. kostet, so soll der Zwölfkreuzerlaib $5\frac{1}{2}$ Pfd. wiegen; wie schwer soll derselbe sein, wenn das Hektoliter 10 Mrk. kostet?

Aufl. Kostet das Hektoliter 4 Mrk., so soll der Zwölferlaib $5\frac{1}{2}$ Pfd. wiegen. Kostet das Hektoliter 1 Mrk., also nur den 4. Theil, so braucht man aus demselben, um die Auslage zu decken, auch nur den 4. Theil so viel Zwölferlaibe zu backen. Diese können daher 4mal so schwer gemacht werden. Der Laib wird dann also $4 \times 5\frac{1}{2}$ Pfd. oder 22 Pfd. wiegen müssen. Kostet das Hektoliter aber 5 Mrk., d. i. 5mal so viel, so muß man auch 5mal so viel Zwölferlaibe daraus backen; also kann 1 Brod nur $\frac{1}{5}$ von 22 Pfd. wiegen. $\frac{1}{5}$ von 22 Pfd. $= 4\frac{2}{5}$ Pfd. $=$ 4 Pfd. 20 Dgr.

B. Schriftlich.

§. 243.

Beispiel. 6 Männer vollenden eine Arbeit in 7 Wochen, wie lange würden 5 derselben dazu brauchen?

Nach dem Zweisatze.

a. Bruchform.

6 M.	7 Wch.
5 M.	?

6 M.
1 M. $\frac{7 \times 6}{5} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$ Wch.
5 M.

b. Divisionsform.

6 M.	7 Wch.
5 M.	?

6 M.		7 Wch.
1 M.		6
5 M.	5	
	5	42 ⁝ $8\frac{2}{5}$ Wch.

Denk- oder Sprechweise: 6 Männer brauchen 7 Wochen; 1 Mann braucht 7mal so lang, also 6×7 Wch.; 5 Männer aber bedürfen nur den 5. Theil dieser Zeit, nämlich 6×7 Wch., getheilt durch 5.

c. Nach der Proportion.

Berechnet soll werden, wie lange 5 Männer zu einer Arbeit brauchen; bekannt ist, wie lange 6 Männer dazu brauchen. 6 Männer brauchen 7 Wochen; 5 Männer arbeiten in derselben Zeit nicht so viel; sie brauchen daher zu derselben Arbeit länger als 7 Wochen. Die Verhältnisse der Proportion müssen also steigend sein. Ich setze daher:

$$5 \text{ M.} : 6 \text{ M.} = 7 \text{ Wch.} : x$$

$$\begin{array}{c|c|l} & 6 & \\ 5 & 42 & 8\tfrac{2}{5} \text{ Wch.} \end{array}$$

6 M. brauchen 7 Wch.; 5 M. brauchen $8\frac{2}{5}$ Wochen. In demselben Verhältniß, in welchem die Zahl der Arbeiter abnimmt, in eben demselben Verhältniß nimmt die Zahl der Tage zu. Arbeiter und Zeit sind umgekehrt proportionirt.

C. Aufgaben mit mehrfachen Verhältnissen.

A. Mündlich.

§. 244.

Beispiel. 6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 96 Mk.; wie viel verdienen 8 Arbeiter in 15 Tagen?

Behandlung.

I. Ich suche zuerst, wie viel 1 Arbeiter in 1 Tag verdient und dann, was 8 Arbeiter in 15 Tagen erhalten. Das kann auf zweierlei Weise geschehen:

a. Verdienen 6 Arbeiter in 12 Tagen 96 M., so
6 Arbeiter in 1 Tag 8 M., 1 Arbeiter in 1 Tag $1\frac{1}{3}$ M.
1 Arbeiter in 15 Tagen 20 M., 8 Arbeiter in 15 Tagen 160 M.

b. Verdienen 6 Arbeiter in 12 Tagen 96 M., so
1 Arbeiter in 12 Tagen 16 M., 1 Arbeiter in 1 Tag $1\frac{1}{3}$ M
8 Arbeiter in 1 Tag $10\frac{2}{3}$ M., 8 Arbeiter in 15 Tagen 160 M.

II. Ich löse die zusammengesetzte Regeldetri-Aufgabe in zwei einfache auf. Kann wieder auf zweifache Art geschehen:

a. 6 Arbeiter erhalten in 12 Tagen 96 M.; wie viel verdienen 8 Arbeiter in derselben Zeit? Antwort: 128 M.
8 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 128 M., wie viel in 15 Tagen? Antwort: 160 M.

b. 6 Arbeiter verd. in 12 Tagen 96 M., wie viel in 15 Tagen? Antw.: 120 M.
6 Arbeiter verdienen in 15 Tagen 120 M.; wie viel verdienen 8 Arbeiter in dieser Zeit? Antw. 160 M.

III. Ich ziehe die zusammengesetzte Regeldetri-Aufgabe in eine einfache zusammen. Wieder auf zweierlei Weise:

a. Was 6 Arbeiter in 12 Tagen verdienen, das verdienen in einem Tag 12×6 oder 72 Arbeiter. Und was 8 Arbeiter in 15 Tagen verdienen, das verdienen in einem Tag 15×8 oder 120 Arb. Nun heißt die Aufgabe: 72 Arbeiter verdienen 96 M.; wie viel verdienen 120 Arbeiter? Antwort: 160 M.

b. Was 6 Arbeiter in 12 Tagen verdienen, das verdient 1 Arbeiter in 6mal 12 oder 72 Tagen. Und was 8 Arb. in 15 Tagen erhalten, das bekommt 1 Arb. in 8mal 15 oder 120 Tagen. Die Aufgabe heißt jetzt: In 72 Tagen werden 96 M. verdient, wie viel in 120 Tagen? Antwort: 160 M.

Anm. Eine vortreffliche Uebung ist es, die Auflösung solcher Aufgaben von den Schülern, wie hier oben, schriftlich ausführen zu lassen.

B. Schriftlich.

§. 245.

a. Nach dem Zweisatz in Bruchform.

1) 6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 96 M.; wie viel verdienen 8 Arbeiter in 15 Tagen?

6 Arb.	12 Tag.	96 M.
8 "	15 "	?

6 Arb.	12 Tg.
1 "	1 "
8 "	15 "

$$\frac{\overset{8}{\cancel{96}} \times \overset{4}{\cancel{8}} \times \overset{5}{\cancel{15}}}{\cancel{6} \times \underset{2}{\cancel{12}}} = 160 \text{ M.}$$

6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 96 M; **1** Arb. verdient in derselben Zeit $^1/_6$ von 96 M und **8** Arb. verdienen 8mal so viel, nämlich 8×96 M., getheilt durch 6. Dieser Ausdruck sagt, wie viel 8 Arbeiter in **12** Tg. verdienen. In **1** Tag verdienen sie den 12. Theil davon, und in **15** Tagen verdienen sie 15mal so viel, als in 1 Tag, nämlich **15**×8×96 M., getheilt durch 6×12.

Fragen: Was verdienen 6 Arbeiter in 12 Tagen? (96 M.) Wie viel verdient **1** Arb. in 12 Tg. (96 M. getheilt durch **6**.) Und was verdienen **8** Arb. in 12 Tg.? (8mal 96 M., getheilt durch 6.) Was sagt uns also der Ausdruck: 8×96 M., getheilt durch 6? (Der sagt uns, was 8 Arb. in 12 Tg. verdienen.) Wie viel verdienen die 8 Arb. in **1** Tg.? (8×96 M., getheilt durch **12**×6.) Und wie viel verdienen sie in **15** Tg.? (**15**×8×96 M., getheilt durch 12×6.)

2) 8 Wägen, welche täglich 10 Std. lang gehen, bringen einen Schutthaufen in 20 Tg. auf eine andere Stelle; wie viel Tage zu 8 Std. würden 12 Wägen daran zu fahren haben?

8 Wg.	10 Std.	20 Tg.
12 „	8 „	?

8 Wg.	10 Std.	5
1 „	1 „	$\frac{\not{20}\times8\times10}{\not{12}\times8}=\frac{50}{3}=16^2/_3$ Tg.
10 „	8 „	3

8 Wägen brauchen 20 Tage; 1 Wagen braucht 8mal so lang, 8×20 Tage; 12 Wägen brauchen den 12. Theil dieser Zeit, nämlich 8×20 Tage, getheilt durch 12. So viele Tage brauchen die 12 Wägen, wenn sie täglich 10 Stunden lang fahren. Fahren sie täglich nur eine Stunde lang, so brauchen sie 10mal so viel Tage. Wenn sie aber 8 Std. fahren, so brauchen sie nur den 8. Theil, d. i. 10×8×20 Tg., getheilt durch 8×12.

b. Nach dem Zweisatze in Divisionsform.

Beisp. 1. 6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 96 M.; wie viel verdienen 8 Arbeiter in 15 Tagen?

6 Arb.	12 Tg.	96 Mk.
8 Arb.	15 Tg.	?

6 Arb.		$\not{96}$ Mk.
1 „	$\not{6}$	
8 „ (in 12 Tagen)		8
1 „	$\not{12}$	
15 „		$\not{15}$
	$\not{3}$	16
		2
		5
		160 Mk.

Die Auflösung zerfällt in 2 Schlußreihen:

a. 6 Arb. verd. 96 Mk.
1 „ „ den 6. Theil;
8 „ „ 8mal so viel und zwar in 12 Tagen.

b. Mithin verdienen 8 Arb. in 1 Tag den 12. Theil und in 15 Tagen 15 mal so viel.

Beisp. 2. 8 Wägen, welche täglich 10 Stunden lang gehen, bringen einen Schutthaufen in 20 Tagen auf eine andere Stelle. Wie viel Tage zu 8 Stunden würden 12 Wägen daran zu fahren haben? ($16^2/_3$ Tg)

Ansatz und Berechnung

8 Wg.	10 Std.	20 Tg.
12 Wg.	8 Std.	?

8 Wg.		$\not{20}$ Tg.
1 „		8
12 „ ($\not{10}$ Std.)	$\not{12}$	
1 „		10
8 „	8	
	3	5
	3	$50=16^2/_3$ Tg.

Der Rechner denkt:

8 Wägen brauchen 20 Tg.;
1 Wagen braucht 8mal so lang;
12 Wg. brauchen den 12. Theil der Zeit, wenn sie täglich 10 St. fahren; fahren sie täglich 1 Stunde, so 10mal so lang; wenn aber 8 Stunden, so den 8. Theil.

c. Nach der Proportion.

Beispiel 1. 8 Arbeiter verdienen in 6 Tagen 96 M.; wie viel werden 5 Arbeiter in 7 Tagen verdienen?

Ansatz und Berechnung.

Die Frage heißt: Wie viel, wie viel Mark, werden 5 Arbeiter in 7 Tagen verdienen? Das Fragеglied ist daher x M., das hintere Verhältniß also 96 M. : x

Wovon hängt es hier ab, wie viel verdient wird? (Von der Anzahl der Arbeiter und von der Arbeitszeit.) Fassen wir zuerst die Arbeiter in's Auge.

Von welcher Anzahl Arbeiter werden 96 M. verdient? (Von 8 Arb.) Und von welcher Anzahl Arbeiter ist der Verdienst zu suchen? (Von 5.) Verdienen diese 5 Arbeiter mehr, oder weniger als jene 8, bei gleicher Zeit? (Weniger.) Das Verhältniß 96 M : x M. ist also abnehmend oder fallend. In demselben Verhältnisse, in welchem die Anzahl der Arbeiter abnimmt, in eben demselben Verhältnisse nimmt auch der gemeinschaftliche Verdienst derselben ab. Wir setzen daher 8 Arbeiter : 5 Arb., steht:

8 Arbeiter : 5 Arb. = 96 M. : x

Würden die 5 Arbeiter eben so lange arbeiten, wie die 8, so wäre ihr Verdienst = 5 × 96 M., getheilt durch 8 = 60 M. Ihre Arbeitszeit ist aber eine andere. Also ist auch ihr Arbeitslohn ein anderer.

In welcher Zeit werden denn die 96 M. verdient? (In 6 Tg.) Und für welche Zeit ist der Verdienst zu berechnen? (Für 7 Tg.) Wird der Verdienst für diese 7 Tag mehr oder weniger betragen, als für jene 6? (Mehr.) Das Verhältniß der Zeiten wirkt also zunehmend auf das Verhältniß 96 M. : x. Denn in demselben Verhältnisse, in welchem die Arbeitszeit wächst, in eben demselben Verhältniß wächst auch der Arbeitslohn. Wir sehen daher unter das erste Verhältniß noch das zweite 6 Tag : 7 Tag.

8 Arb. : 5 Arb. = 96 M. : x
6 Tg. : 7 Tg.
48 : 35 = 96 M. : x

8 Arb. verdienen in 6 Tg. 96 M. Denken wir uns an jedem der 6 Tage 8 andere Arbeiter angestellt, so sind es dann im Ganzen 6 × 8 oder 48 Arb., und jeder von ihnen arbeitet einen Tag lang. Was 8 Arb. in sechs Tagen thun und verdienen, das thun und verdienen also 6 × 8 oder 48 Arbeiter in 1 Tag. Und was 5 Arb. in 7 Tagen thun und verdienen, das thun und verdienen 7 × 5 oder 35 Arb. in 1 Tag. Der Einfluß der Zeit auf den Verdienst ist nun auf die Anzahl der Arbeiter übergetragen; das besondere Verhältniß der Zeit ist dadurch aufgehoben. Die 2 Verhältnisse sind in eines zusammengezogen. Wir haben nun eine einfache Proportion. Diese heißt: 48 Arb. verhalten sich zu 35 Arb. wie 96 M. zu x.

$$x = \frac{35 \cdot \overset{2}{\cancel{96}}\text{ M.}}{\cancel{48}} = \frac{7 \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{96}}\text{ M.}}{\cancel{6} \cdot \cancel{8}} = 70 \text{ M.}$$

Bei der zusammengesetzten Proportion sind also, wie bei der einfachen, die inneren Glieder (hier 7, 5, 96) die Faktoren des Dividenden und die äußern (hier 6 und 8) die Faktoren des Divisors.

Beispiel 2. Wie lange brauchen 10 Arbeiter bei täglich 12=stündiger Arbeit, wenn 8 Arbeiter, welche täglich 10 St. arbeiten, 20 Tage brauchen? Antwort: $13\frac{1}{2}$ Tag.

Ansatz und Berechnung.

Die Frage heißt: Wie lange, d. h. wie viele Tage brauchen 10 Arb. bei täglich 12stündiger Arbeit? Das Frageglied ist daher Tage, das hintere Verhältniß also

20 Tg. : x

Worauf kommt es an, wie viele Tage zu einer gewissen Arbeit erforderlich sind? (Auf die Anzahl der Arbeiter und auf die Anzahl der Stunden, welche sie täglich auf die Arbeit verwenden. Denn je mehr Arbeiter bei der Arbeit beschäftigt sind, desto eher werden sie damit fertig; je weniger Arbeiter, desto länger werden sie dazu brauchen. Je mehr Stunden täglich auf die Arbeit verwendet werden, desto mehr wird in 1 Tag gethan und desto weniger Tage sind dazu erforderlich; je weniger Stunden täglich auf die Arbeit verwendet werden, desto —). Fassen wir nun zuerst die Zahl der Arbeiter ins Auge und dann die Zahl der Stunden. 20 Tage lang brauchen 8 Arbeiter; 10 Arbeiter brauchen nicht so lang; das Verhältniß der Arbeiter ist daher abnehmend zu setzen.

10 Arb. : 8 Arb. = 20 Tg. : x

20 Tage sind erforderlich, wenn täglich 10 St. lang gearbeitet wird. Wird täglich 12 Stunden lang gearbeitet, so braucht man nicht so lange. Also ist auch das Verhältniß der Stunden abnehmend zu setzen.

10 Arb. : 8 Arb. = 20 Tg. : x
12 Std. : 10 Std.

$$x = \frac{\cancel{10} \cdot \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 20 \text{ Tg.}}{\underset{3}{\cancel{12}} \cdot \cancel{10}} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3} \text{ Tg.}$$

Wie hier gezeigt, so wird auch in den Fällen verfahren, wo die gesuchte Größe von mehr als 2 Verhältnissen abhängig ist. Nur unterlasse man nicht, jede Aufgabe, sobald das hintere Verhältniß angesetzt ist, so zu beurtheilen, daß der Schüler die Art der Abhängigkeit des Gesuchten von dem Gegebenen deutlich erkennt.

D. Aufgaben mit mehrfachen Gleichungen.

§. 245. Vorbemerkung.

Den zusammengesetzten Aufgaben mit Gleichungen hat man früher auch solche einfache Regeldetriaufgaben beigeordnet, mit deren Ausrechnung Resolutionen und Reduktionen verbunden sind, und hat bei ihnen auch die gleiche Rechnungsform, nämlich den Kettensatz oder

die Kettelregel in Anwendung gebracht, wodurch es möglich war, die Reduktionszahlen gegenseitig zu kürzen und so die Ausrechnung erheblich zu vereinfachen.

Durch die Einführung des decimalen Münz-, Maß- und Gewichtssystems hat sich dieß geändert. Das Resolviren und Reduciren ist jetzt so einfach, daß es auf die Wahl der Rechnungsform einen Einfluß nicht mehr haben kann. Geeignet ist der Kettensatz also nur noch für gewisse wirklich zusammengesetzte Aufgaben, wie solche besonders im Geschäftsleben des Handelsstandes vorkommen. Für das kaufmännische Rechnen und für die Handelsschule wird er daher noch immer wichtig sein; für die Volksschule dagegen ist er nun entbehrlich. Und da er ohnehin sehr leicht und darum gewöhnlich zum todten Mechanismus übergeht, da er ferner, einmal eingeübt, nicht bloß in den geeigneten Fällen, sondern seiner Leichtigkeit wegen und aus Denkträgheit gerne überall angewendet werden will und hierdurch zum gedankenlosen, schablonmäßigen Rechnen überhaupt hinführt; so besteht Grund genug, ihn von der Volksschule völlig auszuschließen.

Kommen zusammengesetzte Aufgaben der Art, von denen hier die Rede ist, beim Rechenunterrichte vor, so leite man die Schüler an, sie in einfache zu zerlegen, oder sie in Bruchform durch einen Ansatz so auszuführen, wie es im Nachstehenden gezeigt werden wird. Was wir über den Kettensatz bringen, ist daher nicht für die Schule, sondern lediglich für den Lehrer, welcher denselben immerhin kennen lernen soll.

§. 246.

Beispiel 1. Wie viel Dollar betragen 1200 französische Franken, wenn 5 fr. Franken = 4 Reichsmark, und 30 Reichsmark = 7 Dollar?

Daß dieß eine zusammengesetzte Aufgabe, jedoch nicht von gleicher Art mit den in §. 244 behandelten ist, springt in die Augen. Französische Franken sollen in Dollars umgerechnet werden. Die Aufgabe bezeichnet aber nicht das Verhältniß dieser beiden Geldsorten selbst zueinander, sondern das Verhältniß zwischen Franken und Reichsmark und das zwischen Reichsmark und Dollar. Es gibt also zwei einfache Aufgaben und zugleich auch zweierlei Wege, welche zum Ziele führen. Wir können nämlich entweder zunächst suchen, wie viel 4 Mark oder 5 Franken in Dollar betragen und davon auf 1200 Franken übergehen, oder auch die 1200 Fr. zunächst in Mark und diese in Dollar verwandeln.

Erste Weise und zwar durch 2 einfache Rechnungen.

a. 4 Mrk. (oder 5 Fr.), wie v. Dollar?

30 Mrk. 7 Doll.
4 „ ?

30 Mrk.
1 „ $\frac{7 \cdot 4}{30} = \frac{28}{30}$ Doll.
4 „

b. 1200 Franken, wie viel Doll.?

5 Frk. $^{28}/_{30}$ Doll.
1200 „ ?

5 Frk.
1 „ $\frac{28 \cdot \overset{8}{\cancel{1200}}}{\cancel{30} \cdot \cancel{5}} = 224$ Doll.
1200 „

In einem Ansatze.

30 Mrk.
1 „
4 Mrk. (= 5 Fr.)
1 „
1200 „

$$\frac{7 \text{ Doll.} \times 4 \times \overset{8}{\cancel{1200}}}{\cancel{30} \times \cancel{5}} = 224 \text{ Doll.}$$

30 Mk. = 7 Doll; 1 Mk. = 7 Doll., getheilt durch 30, und 4 Mk. = 4 × 7 Doll., getheilt durch 30. So viel Dollar betragen auch 5 Frk., also macht 1 Frk. den 5. Theil davon, und 1200 Frk. betragen dieses 1200mal.

Zweite Weise, zunächst durch 2 einfache Rechnungen.

a. 1200 Frk., wie viel Mk.?

5 Frk.	4 Mk.
1200 „	?

5 Frk.	240
1 „	$\frac{4 \cdot \cancel{1200}}{\cancel{5}} = 960$ Mk.
1200 „	

b. 960 Mk., wie viel Doll.?

30 Mk.	7 Doll.
960 „	?

30 Mk.	32
1 „	$\frac{7 \cdot \cancel{960}}{\cancel{30}} = 224$ Doll.
960 „	

Frei im Kopfe rechnen wir: 5 Frk. = 4 Mk.; so oft ich 5 Frk. habe, so oft habe ich 4 Mk.; so oft also 5 Frk. in 1200 Frk. enthalten sind, so vielmal 4 Mrk. geben diese. Nun sind 5 Frk. in 1200 Frk. 240 mal enthalten; also machen 1200 Frk. auch 240×4 oder 960 Mrk. Diese Anzahl von Mark verwandeln wir nun eben so in Dollar.

Da 30 Mk. = 7 Doll., so machen 960 Mk. so vielmal 7 Doll., als 30 Mk. in 960 Mk. enthalten sind; und da 30 Mk. in 960 Mk., wie 3 in 96 = 32mal, so gibt es 32×7 oder 224 Dollar.

Ganz so lösen wir die Aufgabe auch schriftlich in einem Ansatze.

So oft in 1200 Fr. (notirt:) .	1200
5 Fr. enthalten sind . . .	$\frac{1200}{5}$
so vielmal 4 Mrk. kommen . .	$\frac{1200 \cdot 4}{5}$
und so oft hierin 30 Mk. enthalten sind	$\frac{1200 \cdot 4}{5 \cdot 30}$
so vielmal 7 Dollar kommen . .	$\frac{1200 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 30}$

Gekürzt: $\frac{\overset{8}{\cancel{1200}} \cdot 4 \cdot 7}{\cancel{5} \cdot \cancel{30}} = 224$ Dollar.

Dieselbe Art zu schließen und der nämliche Gedankengang liegt dem Kettensatze zu Grunde, bei welchem die Rechnung sich folgendermaßen gestaltet:

? Doll.	$\cancel{1200}$ Frk. 8
$\cancel{5}$ Frk.	4 Mrk.
$\cancel{30}$ Mrk.	7 Doll.
	224 Doll.

So oft in 1200 Fr. 5 Fr. enthalten sind, so vielmal 4 Mrk., und so oft hierin 30 Mrk. enthalten sind, so vielmal 7 Doll. kommen.

Also sind 1200 fr. Frk. = 1200×4 Mrk., dividirt durch 5 = 1200×4×7 Doll., dividirt durch 5×30; gekürzt = 8×4×7 oder 224 Dollar.

Worin besteht nun das Eigenthümliche dieser Rechnungsform?

1) Die Zahlen stehen in zwei senkrechten Reihen untereinander.

2) Als erstes Glied der linken Reihe steht ein Fragezeichen (gewöhnlich mit dem Namen der gesuchten Größe) und ihm gegenüber als erstes rechtes Glied die gegebene Größe, welche umzurechnen ist.

3) Das linke Glied jeder folgenden (wagrechten) Zeile schließt sich durch gleichen Namen an das vorstehende rechte an.

4) Jede wagrechte Zeile enthält zwei gleiche Werthe.

5) Der Name des untersten rechten Gliedes ist gleich dem des obersten linken.

6) Die Zahlen zur rechten Seite bilden die Faktoren des Dividenden, die zur linken Seite die Faktoren des Divisors, weßhalb sie auch gegenseitig gekürzt werden können.

Fragen wir, warum diese Rechnungsform zum Mechanismus leicht übergehe, so heißt die Antwort: Weil dieselbe dem Rechner es möglich macht, den Ansatz zu fertigen und die Ausrechnung zu vollziehen, ohne sich dabei auch der inneren Gründe des Verfahrens bewußt zu sein. Bei Fertigung des Ansatzes wird denn auch gewöhnlich bloß gedacht oder gesprochen:

Wie viel Dollar = 1200 Franken,
wenn 5 Franken = 4 Mark
und 30 Mark = 7 Dollar.

Dann wird ohne Weiteres gekürzt und die Rechnung ausgeführt. Der eigentliche Grund, warum einzelnen Zahlen gerade diese, anderen jene Stelle angewiesen, die eine Zahl als dividirendes, die andere als multiplicirendes Glied gesetzt wird, kommt nicht in Betracht. Das mag zulässig sein im Comtoir; in der Volksschule, wo das Rechnen zugleich Denkübung sein soll, ist es nicht am Platze.

Beispiel 2. Ein Handlungshaus in Deutschland bezieht aus Rußland 750 Pfd. einer Waare; wie viel beträgt sein Erlös hieraus, wenn das Pfund um 1 Mrk. 20 Pfg. abgegeben, dabei aber von 25 Pfd. je 1 Pfd. eingewogen wird, u. wenn 50 russ. Pfd. = 41 deutsche Pfd.?

Berechnung und zwar nach der zweiten Weise.

Die Aufgabe zerfällt in drei Theile: 1. Wie viel deutsche Pfund betragen 750 russ. Pfund? 2. Wie viel Pfund hievon werden beim Wiederverkaufe in Folge des Einwiegens nur bezahlt? 3. Wie viel beträgt der Erlös? — Einzeln ausgeführt, gibt es also 3 Rechnungen.

a.

50 russ. Pfd.	41 d. Pfd.
750 „ „	?

50 russ. Pfd.
1 „ „
750 „ „ $\frac{41 \cdot \overset{15}{\cancel{750}}}{\cancel{50}} = 615$ d. Pfd.

b.

25 Pfd.	24 Pfd.
615 „	?

25 Pfd.
1 „
615 „ $\frac{24 \cdot \overset{123}{\cancel{615}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} = 590,4$ Pfd.

c.

$$\begin{array}{l} 590{,}4 \times 1{,}2 \text{ Mrk.} \\ \hline 11808 \\ 5904 \\ \hline 708{,}48 \text{ Mrk. oder } 708 \text{ Mrk. } 48 \text{ Pfg.} \end{array}$$

In einem Ansatze.

a. Bruchform. So oft in 750 russ. Pfd. (notirt:) 750

50 russische Pfund enthalten sind, so vielmal 41 deutsche Pfund kommen: $\frac{750 . 41}{50}$

So oft hierin 25 d. Pfd. enthalten sind, so vielmal 24 d. Pfd. werden ausgewogen: $\frac{750 . 41 . 24}{50 . 25}$

Und so oft 1 Pfd. ausgewogen wird, so vielmal 1,2 Mrk. werden bezahlt: $\frac{750 . 41 . 24 . 1,2}{50 . 25}$

Gekürzt: $\frac{\overset{\overset{3}{\cancel{15}}}{\cancel{750}} . 41 . 24 . 12}{\cancel{50} . \underset{5}{\cancel{25}} . 10} = \frac{3542,4}{5\cancel{0}} = 708,48$ Mrk.

b. Kettensatz, mit demselben Gedankengang.

? Mk.	75~~0~~ russ. Pfd. ~~15~~ . 3
5~~0~~ russ. Pfd.	41 deutsche Pfd.
5 ~~25~~ Pfd.	24 Pfd.
1 Pfd.	~~1,2~~ Mrk.
10	12
5~~0~~	3542,4 = 708,48 Mk.

Beispiel 3. Wie viel russische Silberrubel betragen 2400 spanische Piaster, wenn sich verhält der Piaster zum franz. Franken wie 34 zu 7, der franz. Frank zur deutschen Reichsmark wie 4 zu 5 und die deutsche Reichsmark zum russ. Silberrubel wie 4 zu 13?

Verwandlung der Verhältnisse in Gleichungen.

Da sich verhält

der span. Piaster zum franz. Frk. wie 34 : 7, so sind 7 Piaster = 34 Frk.
der franz. Frk. zur Reichsmark wie 4 : 5, so sind 5 Franken = 4 Mrk.
die Reichsmark zum S.-Rubel wie 4 : 13, so sind 13 Reichsm. = 4 S.-R.

Nun verwandeln wir die 2400 span. Piaster in franz. Franken, dann diese in deutsche Reichsmark, und diese in Silberrubel. Es gibt also 3 einfache Rechnungen. Wir führen sie sogleich in einem Ansatze aus.

a. Bruchform. So oft in 2400 Piastern 2400

7 Piaster enthalten sind, so vielmal 34 franz. Franken kommen: $\frac{2400 . 34}{7}$

So oft hierin 5 fr. Frk. enthalten sind, so vielmal 4 deutsche Reichsmark kommen: $\frac{2400 . 34 . 4}{7 . 5}$

Und so oft hierin 13 Reichsmk. enthalten sind, so vielmal 4 russ. Silberrubel kommen: $\frac{2400 . 34 . 4 . 4}{7 . 5 . 13}$

Gekürzt: $\frac{\overset{480}{\cancel{2400}} . 34 . 4 . 4}{7 . \cancel{5} . 13} = \frac{261120}{91} = 2869,45..$ Silberrubel.

b. Kettensatz, mit der nämlichen Schlußfolge.

? S.-R.	2400 Piaster 480
7 Piaster	34 fr. Frk.
5 fr. Frk.	4 Mark
13 Mark	4 S.-Rubel
91	261120

Dritte Abtheilung.

Regeldetri- oder Verhältniß-Rechnungen nach den Gegenständen geordnet.

§ 248.

Die verschiedenen Gattungen der nun zur unterrichtlichen Behandlung kommenden Aufgaben entsprechen den verschiedenen Lebensverhältnissen, welche rechnerisch zu bestimmende Leistungen und Geschäfte mit sich bringen. Die Gliederung des Stoffes in diesem Sinne soll Gelegenheit und Veranlassung geben, die betreffenden Verhältnisse einmal klar und anschaulich in's Licht zu setzen, einerseits, damit der Schüler eine seiner Entwicklungsstufe entsprechende und seinen Gesichtskreis erweiternde Einsicht in dieselbe erhalte, andrerseits, damit er, um die Aufgaben mit Sinn und Verstand rechnen zu können, die Art der Abhängigkeit des Gesuchten vom Gegebenen deutlich erkenne und mit den oft eigenthümlichen Kalkulationen und Benennungen bekannt werde.

Das Erste und Wichtigste im Unterrichte ist also von jetzt an die Belehrung des Schülers über die Sachverhältnisse, sowohl im Allgemeinen, als im Besondern. Zur Belehrung im Allgemeinen sollen die bei den einzelnen Abschnitten gegebenen Vorbemerkungen dienen. Veranlassung im Besonderen bieten solche Aufgaben, welche, um mit Verständniß gelöst werden zu können, Kenntniß der betreffenden Sach- oder Lebensverhältnisse voraussetzen. — Das Zweite ist die Beurtheilung der vorkommenden Zahlenverhältnisse und die Erörterung der Ausrechnungsweise. Dabei kommt in Erwägung, ob zur Lösung der Aufgabe schon eine der Grundrechnungsarten hinreiche und welche, oder ob der Zweisatz in Anwendung zu kommen habe; ob die Aufgabe auf einmal ausgerechnet werden könne, oder ob und wie sie zerlegt werden müsse und in welcher Ordnung die einzelnen Theile auszuführen seien u. s. w. — Die Aufgaben müssen also überhaupt so besprochen werden, daß jedem Schüler daraufhin völlig klar ist, was zur Erzielung des verlangten Resultats zu geschehen hat, und die befähigteren derselben noch

überdieß sich angeregt fühlen, auch beim Zifferrechnen außer dem gewöhnlichen oder Normal-Verfahren noch eine zweite und dritte Ausrechnungsweise anzuwenden.

Der Lehrer aber muß wissen, welche Abschnitte er in seiner Schule durchzunehmen habe und in wieweit; denn Alles ist nicht für Alle. Er muß ohne das Allgemeine zu vernachlässigen, auch dem lokalen Bedürfnisse Rechnung tragen, und die vorherrschenden Erwerbszweige seines Orts in ihrem rechnerischen Theile besonders eingehend und ausführlich behandeln.

Tauschrechnung.

§. 249. Vorbemerkung.

Die Mannigfaltigkeit der Dinge, die wir zum Leben oder zum Gebrauche nöthig haben, ist so groß, daß der einzelne seinen Bedarf unmöglichst selbst erzeugen oder herstellen kann. Daher die Theilung der Arbeit. Ein großer Theil der Menschen gibt sich bloß mit Gewinnung der Rohprodukte ab: der Landmann mit dem Bau der Feldfrüchte und mit der Viehzucht, der Bergmann mit dem Zutagfördern der Metalle. Andere beschäftigen sich bloß damit, die Rohprodukte zum Genusse zuzurichten oder zum Gebrauche zu verarbeiten. Und wie vielfach ist diese Beschäftigung! Wie vielfach allein in Bezug auf die Kleiderstoffe! Und wie vielfach sind die Geschäfte der Metallarbeiter! So erzeugen und fertigen also die Einen dieß, die Andern jenes.

Am häufigsten geschieht es nun wohl, daß Jeder das, was er von seinen Erzeugnissen an Andere abtreten will, gegen baares Geld austauscht, d. i. verkauft, und das, was er von andern bedarf, für baares Geld sich eintauscht, d. i. einkauft. Es kommt aber auch vor, daß die Waaren selbst gegen einander umgetauscht werden. Und dabei sind es vorzüglich drei wesentlich verschiedene Fälle, welche stattfinden. Entweder will man zwei Gegenstände umtauschen, deren Quantität (Größe oder Menge) im Voraus genau bestimmt ist, und den Werthunterschied durch baares Geld ausgleichen; oder man will für einen Gegenstand von bestimmter Quantität genau so viel von einem andern umtauschen, als zur Ausgleichung des Werthes erforderlich ist; oder man will aus der Quantität und dem Werthe eines Tauschgegenstandes den Preis von irgend einer Einheit desselben wissen.

§. 250. Der Werthunterschied der Tauschgegenstände wird gesucht.

1) A tauscht seine Taschenuhr gegen eine neue um. Die neue Uhr kostet 45 Mark; die alte wird zu 18 Mark 50 Pfg. angenommen; wie viel hat A darauf zu zahlen?

Antw. So viel, als die neue Uhr mehr werth ist denn die alte, mithin so viel, als 45 Mark mehr sind, denn 18 Mark 50 Pfg., d. i. 26 Mark 50 Pfg.

2) Jemand kauft einen neuen Ofen um 75 Mark und gibt einen alten von 2 Ctr. 48 Pfd. daran; das Pfd. von diesem wird zu 15 Pfg. gerechnet; wie viel ist noch darauf zu legen?

Ausr. Die Tauschgegenstände sind 2 Oefen, ein neuer und ein alter. Der Werth des neuen ist bekannt; er beträgt 75 Mark. Den des alten müssen wir erst berechnen; dieser beträgt 248×15 Pfennige. 248 × 10 = 2480 Pfg. = 24 Mark 80 Pfg.; 248 × 5 ist $\frac{1}{2}$ von 24 Mark 80 Pfg. = 12 Mark 40 Pfg.; 24 Mark 80 Pfg. + 12 Mark 40 Pf. = 37 Mark 20 Pfg. Wie viel ist also der neue Ofen mehr werth als der alte? Antw. 75 Mark — 37 Mark 20 Pfg. = 37 Mark 80 Pfg Mithin muß der Eisenhändler außer dem alten Ofen noch 37 Mark 80 Pfg. baar erhalten.

3) Eine Frau kauft 16,5^m Zeug, das Meter zu 1 Mrk. 15 Pfg., und gibt dagegen 7 Pfd. 30 Dgr Wolle, das Pfd. zu 2 Mark 60 Pfg. Wie viel beträgt das Aufgeld?

Hier ist zuerst der Werth der **beiden** Tauschgegenstände zu bestimmen; dann kann die Ausgleichung erfolgen.

a. Die 16,5^m Zeug kosten	b. Die 7 Pfd. 30 Dgr Wolle kosten
16 × 1 Mrk. = 16 Mrk.	7 × 2,60 Mrk. = 18,20 Mrk.
16 × 10 Pfg. = 1,60	$\frac{3}{5}$ × 2,60 =
16 × 5 Pfg. = 0,80	3 × 0,52 Mrk. = 1,56 Mrk.
$\frac{1}{2}$ × 1,15 Mrk. = 0,58	19,76 Mrk.
18,98 Mrk.	— 18,98 Mrk.
	0,78 Mrk.

Die Wolle hat 78 Pfg. mehr Werth als der Zeug; also hat die Frau diesen Betrag noch zu erhalten.

§. 251. **Die Quantität des einen Tauschgegenstandes wird gesucht.**

1) A will für 1 Hl Wein Zwetschgen eintauschen; das Hl Wein kostet 33 Mark 75 Pfg., das Hl. Zwetschgen 2 Mark 25 Pfg.; wie viel Hektoliter Zwetschgen wird A erhalten?

Aufl. Da das Hektoliter Wein einen Werth von 33 Mark 75 Pfg. hat, so muß A auch für 33 Mark 75 Pfg. Zwetschgen bekommen. 1 Hl Zwetschgen kostet 2 Mark 25 Pfg. So oft daher 2 Mark 25 Pfg. in 33 Mark 75 Pfg. enthalten sind, so vielmal 1 Hl Zwetschgen bekommt A.

Ausr. 2 Mark 25 Pfg. = $2\frac{1}{4}$ M. = $\frac{9}{4}$ Mark; 33 M. 75 Pfg. = $33\frac{3}{4}$ = $\frac{135}{4}$ Mark; $\frac{9}{4}$ Mark sind in $\frac{135}{3}$ Mark 15mal enthalten. Also hat A 15 Hl Zwetschgen zu bekommen.

2) Wie viel Pfd. Lichter erhält man für $8\frac{1}{2}$ Pfd. Unschlitt, wenn 1 Pfd. Unschlitt 48 Pfg. und 1 Pfd. Lichter 72 Pfg. kostet?

Aufl. **Warum kostet das Pfd. Lichter mehr, als das Pfd. Unschlitt?** (Abgang, Arbeitskosten, Verzinsung des Betriebskapitals.) **Vergleicht diese Aufgabe mit der vorigen!** (Dort werden für 1 Hl Wein Zwetschgen eingetanscht; hier sollen für $8\frac{1}{2}$ Pfd. Unschlitt Lichter eingetauscht werden. Der Werth von dem Hl W•in war bekannt; der Werth von den $8\frac{1}{2}$ Pfd. Unschlitt ist nicht

bekannt, er ist also erst zu suchen). Ausr. 8 Pfd. Unschlitt machen 8×48 Pfg. od. 3 Mk. 84 Pfg.; das halbe Pfund macht 24 Pfg.; zusammen 4 Mk. 8 Pfg. — Für 72 Pfg. erhält man 1 Pfd. Lichter, für 4 Mk. 8 Pfg. oder 408 Pfg. also so vielmal 1 Pfd., als 72 Pfg. darin enthalten sind. 72 Pfg. sind in 360 Pfg. 5mal und in 48 Pfg. noch $^2/_3$mal enthalten. Für $8^1/_2$ Pfd. Unschlitt erhält man also $5^2/_3$ Pfd. Lichter.

3) Eine Frau gibt dem Kaufmann $6^1/_2$ Pfd. Federn, das Pfd. zu 4 Mark 20 Pfg.; von dem Betrage läßt sie eine alte Schuld von 7 Mark 50 Pfg. abrechnen, und für das übrige Geld nimmt sie Barchent, das Mtr. zu 80 Pfg.; wie viel Meter erhält sie?

a. $6^1/_2$ Pfd. à 4 M. 20 Pfg.

6 Pfd.	=	25 M.	20 Pfg.
$^1/_2$ Pfd.	=	2 M.	10 Pfg.
$6^1/_2$ Pfd.	=	27 M.	30 Pfg.
	—	7 M.	50 Pfg.
		19 M.	80 Pfg.

b. 80̸ | 1980̸ | 24,75 × 1 m = 24 m 75 cm
16
38
6,0
40

Die $6^1/_2$ Pfd. Federn machen 27 Mark 30 Pfg. Hievon kommt zunächst die Schuld in Abzug. Rest 19 Mark 80 Pfg. Für diesen Betrag nimmt die Frau Barchent, das Meter zu 80 Pfg. Für 19 Mark 80 Pfg. erhält sie daher so viele Meter, als 80 Pfg. in 19 Mark 80 Pfg. (1980 Pfg.) enthalten sind, d. i. 24,75 × 1 Meter = 24,75 Meter.

§. 252. Der Preis von irgend einer Einheit des einen Tauschgegenstandes ist zu bestimmen.

1) Um ihre Güter zu arrondiren, gibt A dem B einen Acker von 87 Ar und erhält dagegen einen andern von 75 Ar nebst 126 Mark Aufgeld; beide Grundstücke haben gleiche Lage und Bodengüte; wie berechnet sich das Ar und wie das Hektar?

Ausr. A bekommt für seinen Acker einen andern von gleicher Güte und Lage und außerdem noch 126 Mark Aufgeld. Warum dieß? Weil sein Acker, den er abtrat, um 12 Ar größer ist, als der andere. Die 126 Mark sind also der Werth für 12 Ar. Mithin kommt 1 Ar auf $^1/_{12}$ von 126 Mark = $10^1/_2$ Mark, und das Hektar auf 100 × $10^1/_2$ Mark = 1050 Mark.

2) Ein Oekonom schickt in eine Kunstmühle $7^3/_4$ Hl Roggen und erhält dagegen 835 Pfd. Mehl; wie hoch kommt der Centner Mehl, wenn das Hektoliter Roggen 12 Mark 60 Pfg. kostet?

Aufl. Die 835 Pfd. Mehl kommen so hoch, als die $7^3/_4$ Hl Roggen. Ich suche daher zunächst, welchen Werth die $7^3/_4$ Hl Roggen haben.

Ausr. 7Hl à 12 M. 60 Pfg.	=	84 M.	— Pfg.
	+	4 M.	20 Pfg.
$^1/_2$Hl	=	6 M.	30 Pfg.
$^1/_4$Hl	=	3 M.	15 Pfg.
$7^3/_4$Hl	=	97 M.	65 Pfg.

Denselben Werth haben die 835 Pfd. Mehl. Die Aufgabe heißt

jetzt: 835 Pfd. Mehl kommen auf 97,65 Mark; wie berechnet sich der Centner?

835 *tl.* 97,65 Mark Oder 835 : 100 = 97,65 M. : x
100 *tl.* ? x = 11,69 Mark

3) A gibt dem B 5 Hl Kartoffeln und nimmt dafür Heu. Der gewöhnliche Preis für das Hl ist 2 Mk. 50 Pfg.; A setzt es aber zu 3 Mk. an. a. Wie muß nun B, um keinen Schaden zu haben, den Ctr. Heu rechnen, wenn dessen Verkaufspreis = 1 Mk. 15 Pfg.? b. Wie viel Ctr. hat er an A abzugeben?

Ausr. a. A setzt das Hektoliter Kartoffeln von 2 Mk. 50 Pfg. auf 3 Mk., mithin um 50 Pfg. oder um $^1/_5$ des gewöhnlichen Preises höher; also muß B den Centner Heu, um nicht im Nachtheil zu sein, auch um $^1/_5$ höher als 1 Mrk. 15 Pfg. rechnen. $^1/_5$ von 1 Mk. 15 Pfg. = 23 Pfg.; 1 Mrk. 15 Pfg. + 23 Pfg. = 1 Mk. 38 Pfg. Dieß läßt sich auch so finden: $2^1/_2$ Mrk. gewöhnlicher Preis machen 3 Mk. im Austausche; wie viel betragen demnach 1 Mk. 15 Pfg. im Austausche?

2,50 Mk. 3 Mk.
1,15 „ ?

2,50 Mk.
0,01 „
1,15 „

$$\frac{3 \cdot \overset{23}{\cancel{115}}}{\underset{50}{\cancel{250}}} = \frac{69}{50} = 1{,}38 \text{ Mrk.}$$

b. Die 5 Hl Kartoffeln, welche A an B abgibt, machen 5 × 3 oder 15 Mrk. Hiefür muß B dem A so vielmal 1 Ctr. Heu geben, als 1,38 Mrk. in 15 Mk. enthalten sind.

1,38	15,00	
138	1500	10,869.. Ctr. oder 10 Ctr. 87 Pfd.

Verwandlungs-Rechnung.

§. 253. Vorbemerkung.

Sowohl bei dem Kaufe als bei dem Tausche sind es entweder einzelne Dinge, oder größere und kleinere Quantitäten gewisser Waaren und deren Werth, um das sich's handelt.

Die Quantität, d. i. die Menge oder das Wieviel der Waaren wird in manchen Fällen durch Zählen, in den meisten Fällen jedoch durch Messen oder Wägen bestimmt. Der Werth der Dinge aber wird überall, wenigstens bei den Kulturvölkern, nach geprägten Silber- oder Goldstücken, welche man Münzen nennt, festgestellt. Man sagt: dieses oder jenes Ding, die eine oder die andere Quantität von einer Waare hat einen Werth von so und so viel Stücken dieser oder jener Münze.

Nun ist es natürlich, daß einerseits die Maße und Gewichte, durch welche die Quantität der Waaren bestimmt wird, und andrerseits die

Gold- und Silberstücke, welche zur Feststellung ihres Werthes dienen, nicht von beliebiger und stets veränderlicher Größe sein dürfen. Der Käufer will die Waare nach einem bestimmten und ihm bekannten Maße oder Gewichte gemessen oder gewogen haben, und der Verkäufer will dafür mit gangbaren, nach Werth und Geltung ihm bekannten Münzen bezahlt sein. Daher muß es auch solche festbestimmte und allgemein anerkannte und bekannte Maße und Gewichte, Gold- und Silbermünzen geben. Und diese gibt es, zwar nicht die nämlichen in allen Ländern, die gleichen Maße und Gewichte aber gegenwärtig doch in vielen Staaten Europa's (in Deutschland, Frankreich, Belgien, Holland, in der Schweiz, in Spanien, Portugal und in Griechenland.) Ein besonderes einheitliches Münzsystem hat indeß fast jeder größere Staat, seit 1871 auch das deutsche Reich.

Das Bedürfniß, ausländische Maße und Gewichte in inländische und inländische in ausländische verwandeln zu lernen, besteht daher nicht mehr in dem Grade, wie früher. Dagegen ist es jetzt nothwendig, die bisher gebräuchlichen und gangbaren inländischen Münzen, Maße und Gewichte in die neuen und diese in jene umrechnen zu lernen.

Bevor wir jedoch zur Berechnung selbst übergehen, sei außer dem, was §. 127 über das neue Münzverhältniß sagt, noch Folgendes bemerkt.

Während die Staatsregierung die Maße und Gewichte, deren man sich beim Handel und Wandel zu bedienen hat, bloß prüft und zum Zeichen dessen mit einem Stempel versieht, prägt sie die Münzen selbst und hat sich das ausschließliche Recht dazu vorbehalten. Die Seite der Münze, welche das Bild des Landesfürsten oder das Wappen trägt, heißt die Vorderseite (Avers). Die andere Seite, welche den Namen und die Geltung der Münze zeigt, heißt Kehr- oder Rückseite (Revers).

Ihrem Stoffe nach werden die Münzen in Gold-, Silber- und Kupfermünzen eingetheilt. Die Gold- und Silbermünzen werden aber nicht aus reinem Metalle geprägt. Bei jenen enthält das Münzmetall einen Zusatz von Silber oder Kupfer, oder es ist mit beiden Metallen zugleich legirt; bei diesen ist es mit Kupfer vermischt. Durch den Zusatz wird das Münzmetall härter, und die Münzkosten werden zum Theil dadurch gewonnen. Die legirte Masse einer Münze heißt Schrot, das edle Metall darin Korn.

Das Abwägen des Goldes und Silbers geschah lange Zeit ausschließlich nach der köln. Mark (= 233,8 Gramm). Aus der köln. Mark feinen Silbers prägte Preußen 14 Thlr., Oesterreich 20 fl. und Bayern mit den übrigen süddeutschen Staaten $24^1/_2$ fl. Mit dem im Jahre 1857 eingeführten Münzsystem trat in ganz Deutschland an die Stelle der köln. Mark das Zollvereinspfund, d. i. unser neues Pfund (= 500 Gramm). Aus dem Pfunde feinen Silbers wurden nun von den Thalerstaaten 30 Thlr., von Oesterreich 45 fl. und von den Staaten des rheinischen Gulden $52^1/_2$ fl. geprägt, so daß also

30 pr. Thlr. = 45 fl. östr. = $52^1/_2$ fl. süddeutsch.

Als gemeinsame Münze der verschiedenen deutschen Staaten wurde damals der Vereinsthaler, welcher = 1 preuß. Thaler = $1^1/_2$ fl. österr. = $1^3/_4$ fl. süddeutsch, eingeführt.

Durch das Reichsmünzgesetz vom 4. Dezember 1871 ist als Einheit der deutschen Münzen die Mark bestimmt und demselben gemäß werden Zehn- und Zwanzigfache der Mark in Gold ausgeprägt. Das Mischungsverhältniß bei diesen Reichsgoldmünzen ist auf 900 Tausendtheile Gold und 100 Tausendtheile Kupfer festgesetzt, und als Werthsverhältniß des Silbers zum Golde der durchschnittliche Marktkurs 1 : $15^1/_2$ angenommen. Aus dem Pfunde feinen Goldes werden $139^1/_2$ Stück à 10 Mark, oder $69^3/_4$ Stück à 20 Mark geprägt. Da 1 Pfd. feines Silber = 30 Thlr., so berechnet sich 1 Pfd. feines Gold auf $15^1/_2 \times 30 = 465$ Thlr. Hierauf beruht die weitere gesetzliche Bestimmung, daß

1 Zehnmarkstück = $3^1/_3$ Thlr. oder 5 fl. 50 kr. südd. Währung,
= 8 Mark $5^1/_3$ Schilling Lübischer und Hamburger Courant-Währung,
= $3^1/_{93}$ Thaler Gold Bremer Rechnung;

1 Zwanzigmarkstück = $6^2/_3$ Thlr. oder 11 fl. 40 kr. südd. Währung,
= 16 Mark $10^2/_3$ Schilling Lübischer und Hamburger Courant-Währung,
= $6^2/_{93}$ Thlr. Gold Bremer Rechnung.

Beide Reichsgoldmünzen tragen auf der einen Seite den Reichsadler mit der Inschrift „Deutsches Reich“ und mit der Angabe des Werths in Mark, sowie mit der Jahreszahl der Ausprägung, auf der andern Seite das Bildniß des Landesherrn mit einer entsprechenden Umschrift und dem Münzzeichen.

I. Münzen.

§. 254. Umrechnung der deutschen Reichswährung in süddeutsche Währung.

a. Deutsche Mark werden in süddeutsche Gulden umgerechnet.

Aus dem Vorhergehenden wissen wir, daß ein Zehnmarkstück = 5 fl. 50 kr. süddeutscher Währung. Mithin beträgt 1 Mark $^1/_{10}$ von 5 fl. 50 kr. = 35 kr. Ist aber

1 Mark = 35 kr. = $^1/_2$ fl. + 5 kr., so sind
2 „ = $2 \times {}^1/_2$ fl. + 2×5 kr. = 1 fl. 10 kr.
3 „ = $3 \times {}^1/_2$ fl. + 3×5 kr. = 1 fl. 30 kr. + 15 kr. = 1 fl. 45 kr.
4 „ = $4 \times {}^1/_2$ fl. + 4×5 kr. = 2 fl. 20 kr.
5 „ = $5 \times {}^1/_2$ fl + 5×5 kr. = 2 fl. 30 kr. + 25 kr. = 2 fl. 55 kr.
6 „ = $6 \times {}^1/_2$ fl. + 6×5 kr. = 3 fl. 30 kr.
So fort bis
12 Mark = $12 \times {}^1/_2$ fl. + 12×5 kr. = 6 fl. + 1 fl. = 7 fl.

Die Umrechnung der Mark von 1 bis 12 in Gulden wird nun und zwar auch von dem schwächsten Schüler in der angegebenen Weise in und außer der Ordnung so lange geübt, bis auf jede Frage sofort die Antwort erfolgt. Z. B.

Wie viel betragen 7 Mark? (3 fl. 30 kr. + 35 kr. = 4 fl. 5 kr.) 9 Mark? (4 fl. 30 kr. + 45 kr. = 5 fl. 15 kr.) 6 Mark? (3 fl. + 30 kr.) u. s. f.

Wir haben (auf dem Wege der Erfahrung) gefunden, daß 12 Mark = 7 fl. Zur besseren Vergegenwärtigung dieser Gleichung suchen wir dieselbe auch aus dem Werthverhältnisse der beiden Münzen zu erkennen.

1 Mark = 35 kr., 1 fl. = 60 kr.; 35 kr. = 7 × 5 kr., und 60 kr. = 12 × 5 kr. Die Mark hat 7 Theile, wie der Gulden 12 hat. Sie verhält sich also zum Gulden wie 7 : 12. Mithin sind 12 Mark = 7 Gulden.

Noch näher liegt es, die einzelnen Kreuzer selbst als Theile der Mark und des Gulden zu betrachten. So genommen, hat die Mark 35 Theile, wie der Gulden 60. Hiernach verhält sich die Mark zum Gulden, wie 35 : 60, und also sind auch 60 Mark = 35 fl. (60 Mark = 60 × 35 kr. = 35 fl.)

Ob wir bei der Umrechnung davon ausgehen, daß 12 Mark = 7 fl., oder davon, daß 60 Mark 35 fl., hängt von der gegebenen Zahl der Mark ab, welche in Gulden auszudrücken ist.

Um Gewandheit in der Umrechnung zu erzielen, ist es gut, folgende Uebung einzuschalten: a. Wie heißen die Produktzahlen von 12? (2 × 12 oder 24, 3 × 12 oder 36 u. s. w.) b. Aus wie vielmal 12 besteht 24, 72, 48 2c.? c. Zwischen welchen Produktzahlen aus 12 steht 31? (Zwischen 24 u. 36.) 56? (Zwischen 48 u. 60.) u. s. w. d. Zerlegt die Zahl, welche ich nenne, in die nächste Produktzahl von 12 und in den Rest! 21! (21 = 12 + 9.) 102! (102 = 96 + 6.) 43! (43 = 36 + 7.) u. s. w. e. Aus wie vielmal 12 besteht 30? (30 = 2 × 12 + 6.) 81? (81 = 72 + 9 = 6 × 12 + 9.) 125? (125 = 10 × 12 + 5.) u. s. w.

1) 24, 36, 48, 84, 60, 96, 108, 72 2c. Mark, wie viel Gulden?

Ausr. 12 Mark? = 7 fl.; 24 oder 2 × 12 Mark = 2 × 7 oder 14 fl. u. s. w.

2) Wie viel Gulden sind 12, 120, 1200; 24, 240, 2400; 60, 180, 420 Mrk.? (12 M. = 7 fl.; 120 od. 10 × 12 M. = 10 × 7 od. 70 fl. 2c.)

3) 22, 31, 43, 54, 65, 76, 80 2c. Mark, wie viel Gulden?

Ausr. 22 Mark = 12 + 10 Mark; 12 M. = 7 fl.; 10 M. = 5 fl. 50 kr.; 7 fl. + 5 fl. 50 kr. = 12 fl. 50 kr. Oder: 22 Mark = 24 Mark — 2 Mark; 24 Mark = 2 × 7 oder 14 fl, und 2 Mark = 1 fl. 10 kr.; 14 fl. — 1 fl. 10 kr. = 12 fl. 50 kr.

4) 175 Mark, wie viel Gulden?

Mündlich: 175 = 120 + 55 = 120 + 48 + 7; 120 oder 10 × 12 Mark = 10 × 7 oder 70 fl.; 48 oder 4 × 12 Mark = 4 × 7 oder 28 fl.; 70 fl. + 28 fl. = 98 fl.; 7 Mark = 3 fl. 30 kr. + 35 kr. = 4 fl. 5 kr.; 98 fl. + 4 fl. 5 kr. = 102 fl 5 kr. Also sind 175 Mark = 102 fl. 5 kr.

Schriftlich. 175 Mark = 120 + 48 + 6 + 1 Mark.

120 M.	$(= 10 \times 12$ M. $= 10 \times 7$ fl.$)$	= 70 fl.
48 „	$(= 4 \times 12$ M. $= 4 \times 7$ fl.$)$	= 28 fl.
6 „	$(= \frac{1}{2} \times 12$ M. $= \frac{1}{2} \times 7$ fl.$)$	= 3 fl. 30 kr.
1 „	. . . .	= — „ 35 kr.
175 Mark	. . . .	= 102 fl. 5 kr.

Das Eingeklammerte hat man sich bloß zu denken.

Oder: Da 1 Mark = 35 kr., so sind 175 Mark = 175 × 35 kr.; dies durch 60 dividirt, gibt das Resultat in Gulden. Steht:

$$175 \text{ Mark} = \frac{175 \times \overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{12}{\cancel{60}}} = \frac{1225}{12} = 102\tfrac{1}{12} \text{ fl.}$$

Nach dem Zweisatze.

12 Mark 7 fl.
175 „ x

$$\frac{7 \cdot 175}{12}$$

Nach der Proportion.

12 : 175 = 7 fl. : x

$$x = \frac{175 \cdot 7}{12}$$

b. Die Reichsgoldmünzen in süddeutsche Gulden umzurechnen.

Das Zehnmarkstück hat einen gesetzlichen Werth von 5 fl. 50 kr. Wir betrachten 5 fl. 50 kr. als 6 fl. — 10 kr. und rechnen also

2 Zehnmarkst. $= 2 \times 6$ fl. $- 2 \times 10$ kr. = 12 fl. — 20 kr. = 11 fl. 40 kr.
3 „ $= 3 \times 6$ fl. $- 3 \times 10$ kr. = 18 fl. — 30 kr. = 17 fl. 30 kr.
u. s. w.

So zuerst; dann kürzer und bis zur Fertigkeit.

1 Zehnmarkst.	= 6 fl. — 10 kr.	= 5 fl. 50 kr.
2 „	= 12 fl. — 20 kr.	= 11 fl. 40 kr.
3 „	= 18 fl. — 30 kr.	= 17 fl. 30 kr.
4 „	= 24 fl. — 40 kr.	= 23 fl. 20 kr.
5 „	= 30 fl. — 50 kr.	= 29 fl. 10 kr.
6 „	= 36 fl. — 1 fl.	= 35 fl.

Aufgaben.

1) Wie viel Gulden betragen 3 Zehnmarkstücke? (18 fl. — 30 kr. = 17 fl. 30 kr.) 5 Zehnmarkstücke? (30 fl. — 50 kr. = 29 fl. 10 kr.) 2 Zehnmarkstücke? (12 fl. — 20 kr. = 11 fl. 40 kr.) u. s. w.

2) Wie viel Gulden machen 8, 15, 22, 35 Zehnmarkst.?

Ausr. 8 = 6 + 2; 6 Zehnmarkstücke = 35 fl.; 2 Zehnmarkst. = 11 fl. 40 kr.; 35 fl. + 11 fl. 40 kr. = 46 fl. 30 kr.

15 = 12 + 3; 12 oder 2 × 6 Zehnmarkst. = 2 × 35 oder 70 fl.; 3 Zehnmarkst. = 17 fl. 30 kr.; 70 fl. + 17 fl. 30 kr. = 87 fl. 30 kr. ꝛc.

3) 1, 2, 3 Zwanzigmarkstücke, wie viele Gulden?

Ausr. 1 Stück à 20 Mark = 2 Stück à 10 Mark = 11 fl. 40 kr.; 2 Stück à 20 Mark = 2 × 11 fl. 40 kr. = 22 fl. + 1 fl. 20 kr. = 23 fl. 20 kr.; 3 Stück à 20 Mark = 3 × 11 fl. 40 kr. = 33 + 2 fl. = 35 fl.

60 Mark = 6 Stück à 10 Mark = 3 Stück à 20 Mark = 35 Gulden.

4) Ich habe 25 doppelte und 15 einfache Reichsgoldmünzen, wie viele Gulden also?

Ausr. Von den 16 einfachen Stücken lege ich je 2 zusammen; so erhalte ich zu den 25 doppelten Stücken noch 7 und habe dann 25 + 7 oder 32 doppelte und 1 einfaches Stück. Da 3 doppelte Stücke = 35 fl., so lege ich wieder von den 32 doppelten, die ich nun habe, je 3 zusammen. Nun habe ich 10 × 3 + 2 doppelte Stücke und 1 einfaches Stück.

10 × 3 doppelte Stück	= 10 × 35 fl.	= 350 fl.
2 „ „	= 2 × 11 fl. 40 kr.	= 23 fl. 20 kr.
1 einfaches Stücke	. . . .	= 5 fl. 50 kr.
		379 fl. 10 kr.

Oder ich rechne: 25 doppelte und 15 einfache Stücke = 50 + 15 = 65 einfache Stücke. 6 Stück = 35 fl.

60 oder 10 × 6 Stück	= 10 × 35 fl.	= 350 fl.
5 Stück	= 30 fl. — 50 kr. . . .	= 29 fl. 10 kr.
65 Stücke		379 fl. 10 kr.

Nach dem Zweisatze.

6 Stck. 35 fl.

65 „ x

$$\frac{35 \cdot 65}{6}$$

Nach der Proportion.

$$6 : 65 = 35 : x$$

$$x = \frac{65 \cdot 35}{6}$$

5) Wie viel Gulden betragen 52 Zehnmarkstücke u. 7 Mark?

Ausr. 48 oder 8 × 6 Stück = 8 × 35 fl. = 280 fl.

4 „	= $4 \times 5\frac{5}{6}$ fl.	= 23 fl. 20 kr.
7 Mark	= 7 × 35 fl.	= 4 fl. 5 kr.
		307 fl. 25 kr.

Oder: 52 Stück à 10 Mark und 7 Mark = 527 Mark

$$527\ M. = \frac{527 \times \overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{12}{\cancel{60}}} = \frac{3689}{12} = 307\tfrac{5}{12}\ fl.$$

c. Pfennige deutscher Währung in südd. Währung auszudrücken.

1 Mark = 100 Pfg. deutsch und auch = 35 kr. oder 140 Pfg. südd.; also sind

a. 100 Pfg. deutsch = 35 kr. südd.
20 Pfg. deutsch = 7 kr. südd.

b. 100 Pfg. deutsch = 140 pf. sdd.
10 Pfg. „ = 14 pf. „
5 Pfg. „ = 7 pf. „
1 Pfg. „ = $1^2/_5$ pf. „

Aufg. 1. 77 Pfg. deutsch, wie viel in südd. Währung?

Ausr. Da 20 Pfg. deutsch = 7 kr. südd, so zerlege ich die 77 Pfg. in 60 + 10 + 5 + 2 Pfg.

60 Pfg. d. = 3 × 7 kr. = 21 kr.
10 Pfg. d. = $^1/_2$ × 7 kr. = 3 kr. 2 pf.
5 Pfg. d. = 7 pf. südd.
2 Pfg. d. = $2^4/_5$ pf. südd.
$9^4/_5$ pf. = 2 kr. $1^4/_5$ pf.
26 kr. $3^4/_5$ pf.

Oder: 20 Pfg. d. 7 kr.
77 „ „ x

$$\frac{7 \times 77}{20} = 26{,}95\ (= 27)\ \text{kr.}$$

Aufg. 2. 18 Mark 94 Pfg., wie viel in süddeutscher Währung?

Ausrechnung.

a. 12 Mark = 7 fl.
6 „ = 3 fl. 30 kr.
80 „ = — „ 28 kr.
10 „ = — „ 3 kr. 2 pf.
4 „ = — „ 1 kr. $1^3/_5$ pf.
11 fl. 2 kr. $3^3/_5$ pf.

b. 18,83 M. = $\frac{18{,}94 \times 35}{60}$ =
= 11,048 fl.
= 11 fl. 2,88 kr.

§. 255. Umrechnung der süddeutschen Währung in die deutsche Reichswährung.

a. Süddeutsche Gulden in deutscher Reichswährung auszudrücken.

35 kr. = 1 Mark; 1 fl. oder 60 kr. = 35 kr. + 25 kr. = $1^{25}/_{35}$ oder $1^5/_7$ Mark. 1 Mark = 100 Pfg.; $^1/_7$ Mark = $14^2/_7$ Pfg. und $^5/_7$ Mark = 5 × $14^2/_7$ Pfg. = 70 + $1^3/_7$ = $71^3/_7$ Pfg. Also ist 1 Gulden = $1^5/_7$ Mark = 1 Mark $71^3/_7$ Pfennigen.

Ist **1** fl. = $1^5/_7$ = $^{12}/_7$ Mark, und $^1/_7$ Mark = $14^2/_7$ Pfg.; so sind
2 fl. = 2 × $^{12}/_7$ Mrk. = $3^3/_7$ Mrk. = 3 Mrk. $42^6/_7$ (=43) Pfg.
3 fl. = 3 × $^{12}/_7$ „ = $5^1/_7$ „ = 5 „ $14^2/_7$ (= 14) Pfg.
4 fl: = 4 × $^{12}/_7$ „ = $6^6/_7$ „ = 6 „ $85^5/_7$ (= 86) Pfg.
5 fl. = 5 × $^{12}/_7$ „ = $8^4/_7$ „ = 8 „ $57^1/_7$ (= 57) Pfg.
6 fl. = 6 × $^{12}/_7$ „ = $10^2/_7$ „ = 10 „ $28^4/_7$ (= 29) Pfg.
7 fl. = 7 × $^{12}/_7$ „ = 12 „

So vielmal 7 Gulden, so vielmal 12 Mark.

Ist Vorstehendes durch öftere Wiederholung in und außer der Ordnung den Schülern geläufig, dann:

1) Wie viele Mark betragen 14, 21, 35, 49, 28, 63 2c. fl.?

Ausr. 7 fl. = 12 Mark; also sind 14 oder 2 × 7 fl. = 2 × 12 oder 24 Mrk.; 21 oder 3 × 7 fl. = 3 × 12 oder 36 Mrk. u. s. w.

2) 9, 20, 25, 29, 38, 47, 60, 70 fl.. wie viele Mark?

Ausr. 9 fl. = 7 + 2 fl.; 7 fl. = 12 Mark; 2 fl. = 2 × $^{12}/_{7}$ = $^{24}/_{7}$ = $3^{3}/_{7}$ Mark; 12 + $3^{3}/_{7}$ = $15^{3}/_{7}$ M. = 15 Mark $42^{6}/_{7}$ Pfg.

20 fl. = 14 + 6 fl.; 14 fl. = 2 × 12 oder 24 Mark; 6 fl. = 6 × $^{12}/_{7}$ = $^{72}/_{7}$ = $10^{2}/_{7}$ Mark; 24 + $10^{2}/_{7}$ M. = $34^{2}/_{7}$ M. = 34 Mark $28^{4}/_{7}$ Pfg. u. s. w.

3) 240 fl., wie viele Mark und Zehnmarkstücke?

Mündlich. 240 fl. = 210 + 28 + 2 fl.; 210 fl. = 30 × 7 fl., also auch = 30 × 12 oder 360 Mark; 28 oder 4 × 7 fl. = 4 × 12 oder 48 Mark; 360 + 48 M. = 408 Mark; 2 fl. = 2 × $^{12}/_{7}$ = $^{24}/_{7}$ = $3^{3}/_{7}$ Mark; 408 + $3^{3}/_{7}$ = $411^{3}/_{7}$ M. = 411 Mark $42^{6}/_{7}$ Pfg. = 41 Zehnmarkstücke 1 Mark $42^{6}/_{7}$ (=43) Pfennige.

Schriftlich. 240 fl. = 210 + 28 + 2 fl.

210 fl. (= 30 × 7 fl. = 30 × 12 M.)	= 360 M.
28 fl. (= 4 × 7 fl. = 4 × 12 M.)	= 48 M.
2 fl. (= 2 × $^{12}/_{7}$ Mark.	= $3^{3}/_{7}$ M.
240 fl.	= $411^{3}/_{7}$ M.

Oder ich löse die 240 fl. durch 60 in Kreuzer auf und führe diese durch 35 auf Mark zurück. Steht:

$$240 \text{ fl.} = \frac{240 \times \overset{12}{\cancel{60}}}{\underset{7}{\cancel{35}}} = \frac{2880}{7} = 411^{3}/_{7} \text{ Mark.}$$

= 41 Zehnmarkstück 1 Mark 42,8 Pfg.

Durch den Zweisatz.

7 fl.	12 Mrk.
240 fl.	x

$$\frac{12 \,.\, 250}{7}$$

Durch die Proportion.

7 : 240 = 12 Mark : x

$$x = \frac{240 \,.\, 12}{7}$$

4) Eine Schuld von 1000 fl. wird in Reichsgoldmünzen und der Rest in süddeutschen Münzen bezahlt. Wie berechnet sich dieß?

$$1000 \text{ fl.} = \frac{1000 \,.\, \overset{12}{\cancel{60}}}{\underset{7}{\cancel{35}}} = \frac{12000}{7} = 1714^{2}/_{7} \text{ Mark}$$

= 171 Zehnmarkst. $4^{2}/_{7}$ Mark (= $4^{2}/_{7}$ × 35 kr. = 2 fl. 30 kr.)
= 85 Zwanzigmarkstücke + 1 Zehnmarkstück + 2 fl. 30 kr.

Probe: 1 Mark = 35 kr. = $^{7}/_{12}$ fl.: also sind $1714^{2}/_{7}$ Mark =

$$\frac{1714^{2}/_{7} \times {}^{7}/_{12} \text{ fl.}}{} \quad \frac{12000}{7} \times \frac{7}{12} = \frac{\overset{1000}{\cancel{12000}} \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times \cancel{12}} = 1000 \text{ fl.}$$

b. Gulden, Kreuzer und Pfennige in Reichswährung auszudrücken.

35 kr. oder 140 pf. südd. = 1 Mrk. = 100 Pfg. deutsch;
also sind

a. 35 kr. südd. = 100 Pfg. deutsch. b. 140 pf. südd. = 100 Pfg. deutsch.
7 kr. südd. = 20 Pfg. deutsch. 14 pf. „ = 10 Pfg. „
7 pf. „ = 5 Pfg. „

Aufgaben.

1) Wie v. betragen 14, 21, 28 2c. kr. in deutscher Reichswährung?

Ausr. 35 kr. = 100 Pfg. deutsch; 7 kr. = $^1/_5$ von 100 = 20 Pfg., und 14 kr. oder 2 × 7 = 2 × 20 oder 40 Pfg. Also sind 14 kr. = 40 Pfg. deutsch 2c.

2) 1 fl. 24 kr. sdd., wie v. Mark und Pfennige?

Ausr. 1 fl. 24 kr. = 84 kr.; 7 kr. = 20 Pfg.; 70 kr. = 200 Pfg.; 14 kr. = 40 Pfg.; 200 Pfg. + 40 Pfg. = 240 Pfg. = 2 Mark 40 Pfg.

Oder: 70 kr. oder 2 × 35 kr. = 2 Mark, und 14 oder 2 × 7 kr. = 40 Pfg.

3) 15 kr. 3 pf. sdd., wie viel Pfennige in deutscher Währung?

Ausr. 15 kr. 3 pf. = 63 pf.; 7 pf. sdd. = 5 Pfg. deutsch; 63 oder 9 × 7 pf. sdd. = 9 × 5 oder 45 Pfg. deutsch.

4) 19 fl. 48 kr, wie viel Mark und Pfennige?

Ausrechnung.

19 fl. 48 kr. =		5 fl. 48.
14 fl.	= 24 M.	60
+ 5 fl. 48 kr.	= 9 M. 94 Pfg.	35 | 348 | 9,94 . . Mark.
14 fl. 48 kr.	= 33 M. 94 Pfg.	

5) 27 fl. 43 kr. 2 pf., wie viel Mark und Pfennige?

Ausrechnung.

27 fl. 43 kr. 2 pf. =	
21 fl.	= 36 M.
+ 6 fl. $43^1/_2$ kr.	= 11 M. 53 Pfg.
27 fl. $43^1/_2$ kr.	= 47 M. 53 Pfg.

	6 fl. 43 kr. 2 pf.	
	60	
35	403 kr. 2 pf.	
4	4	
140	1614	11,528 . . Mark.

Zur Berechnung jeder Aufgabe dieser Art reichen folgende drei Sätze aus, welche sich nach den Reduktionszahlen 60 und 4 abstufen und daher auch leicht zu merken sind, nämlich:

a. 7 fl. sdd. = 12 Mrk. d., u. 12 Mrk. = 7 fl. sdd.
b. 7 kr. sdd. = 20 Pfg. d., u. 20 Pfg. = 7 kr. sdd.
c. 7 pf. sdd. = 5 Pfg. d., u. 5 Pfg. = 7 pf. sdd.

So rechnet Bayern, Württemberg, Baden, Großherzogthum Hessen, Frankfurt a. M., Hohenzollern, Meiningen, Koburg, Nassau und Schwarzburg-Rudolstadt.

§. 256. Die deutsche Reichswährung und die preußische, sächsische, österreichische und französische Münzwährung.

1) Die deutsche und die bisherige preuß. Währung.

a. 10 Mark gelten gesetzlich $3^1/_3$ oder $^{10}/_3$ Thlr.; 1 Mark hat also einen Werth von $^1/_3$ Thlr., oder, da 1 prß. Thlr. = 30 Sgr., einen Werth von 10 Sgr. Ist

1 Mark = $^1/_3$ Thlr. = 10 Sgr., so sind
2 Mark = $^2/_3$ Thlr. = 20 Sgr., und
3 Mark = 1 Thlr.

So vielmal 3 Mark, so vielmal 1 Thaler und umgekehrt.

24 oder 8 × 3 Mark = 8 × 1 Thlr. oder 8 Thlr.; 38 Mark oder 12 × 3 + 2 Mark = $12^2/_3$ Thlr. = 12 Thlr. 20 Sgr.

b. 1 Sgr. prß. = 12 Pfg.; 10 Sgr. (= 1 Mark) machen also 10 × 12 oder 120 Pfg. prß.; mithin sind

100 Pfg. deutsch = 120 Pfg. preußisch,
10 Pfg. „ = 12 Pfg. preußisch (= 1 Sgr.)
5 Pfg. „ = 6 Pfg. „
1 Pfg. „ = $1^1/_5$ Pfg. „

Aufgabe 1. 473 Mark 64 Pfg., wie viel in prß. Währung?

Ausrechnung.

300 Mark	. . . . .	=	100 Thlr.
+ 150 „	. . . . .	=	50 „
+ 21 „	. . . . .	=	7 „
+ 2 „	. . . . .	=	— „ 20 Sgr.
60 Pfg.	.	=	— „ 6 „
+ 4 „	.	=	— „ — „ $4^4/_5$ Pfg.
473 Mark 64 Pfg.		=	157 Thlr. 26 Sgr. $4^4/_5$ Pfg.

Oder: Mark werden in preuß. Thaler umgerechnet, indem man sie durch 3 dividirt.

$\frac{473,64}{3}$ = 157,88 Thlr. = 157 Thlr. 26 Sgr. 4,8 Pfg.
30 Thlr.
26,40 Sgr.
12
4,80 Pfg.

Aufg. 2. 67 Thlr. 25 Sgr. prß., wie v. in deutscher Währung?

Ausrechnung.

a.
67 Thlr.	=	67 × 3 M.	=	201 Mark
20 Sgr.	=	$^2/_3$ × 3 M.	=	2 Mark
5 Sgr.	=	$^1/_4$ × 2 M.	=	— Mark 50 Pfg.
				203 Mark 50 Pfg.

b. $67^5/_6$ × 3 M.
201 Mark
+ $2^1/_2$ „
$203^1/_2$ Mark.

Wie Preußen, so rechnet auch Anhalt, Gotha, Hessenkassel, Lippe, Oldenburg, Reuß, Schwarzburg-Sondershausen und Waldeck.

2) Die deutsche Reichswährung und die sächsische Währung.

Sachsen rechnet nach Thalern à 30 Neugroschen à 10 Pfg. Die Thaler und Groschen sind dieselben, wie in Preußen. Also ist 1 Mark = $^1/_3$ Thlr. = 10 Neugr.

Da in Sachsen 1 Gr. = 10 Pfg., so sind 10 Gr. oder 1 Mark = 100 Pfg. sächsisch. Es sind also

100 Pfg. deutsch = 100 Pfg. sächsisch
10 Pfg. „ = 10 Pfg. (= 1 Ngr.)
1 Pfg. „ = 1 Pfg. sächsisch.

87 Pfg. deutsch = 87 Pfg. sächsisch = 8,7 Ngr. = 8 Ngr 7 Pfg.
1 Mrk. 54 Pfg. = 154 Pfg. sächsisch = 15,4 Ngr. = 15 Ngr. 4 Pfg.
18 Ngr. = 18 × 10 = 180 Pfg. = 1,80 Mrk. = 1 Mrk. 80 Pfg. d.
23 Ngr. 8 Pfg. sächsisch = 238 Pfg. = 2,38 Mrk. = 2 Mrk. 38 Pfg. d.

1) 32 Mark 75 Pfg. deutsch = ? sächsisch.

30 Mark = 10 Thlr.
2 Mark = — „ 20 Ngr.
75 Pfg. deutsch = — „ 7 Ngr. 5 Pfg.
10 Thlr. 27 Ngr. 5 Pfg.

2) 47 Thlr. 26 Ngr. 7 Pfg. = ? deutsch.

47 Thlr. = 141 Mark
267 Pfg. = 2 Mark 67 Pfg.
143 Mark 67 Pfg.

Wie Sachsen, so rechnet auch Altenburg, Braunschweig und Hannover.

3) Die deutsche Reichswährung und die österreichische Währung.

1 Mark = 35 kr., 1 fl. österr. = 70 oder 2 × 35 kr. südd.; also ist 1 fl. österr. = 2 Mark deutsch, und 2 Mark deutsch = 1 fl. österreichisch.

Wie die Mark in 100 Pfg., so wird der österr. Gulden in 100 kr. eingetheilt. Da 2 Mark deutsch = 1 fl. österr., so sind also auch

200 Pfennige deutsch = 100 kr. österr. und
2 Pfennige deutsch = 1 kr. österr.

75 fl. österr. = 75 × 2 oder 150 Mark, und 75 kr. österr. = 75 × 2 oder 150 Pfg. = 1 Mark 50 Pfg. deutsch.

75 Mark = 75 : 2 = $37^1/_2$ fl., und 75 Pfg. = 45 : 2 = $37^1/_2$ kr. österr.

125 fl. 83 kr. österr. = 2 × 125,83 = 251,66 Mark, und
125 Mk. 83 Pfg. deutsch = $^1/_2$ × 125,83 = 62,915 fl.
= 62 fl. 91,5 kr. östr.

4) Die deutsche Reichswährung und die französische Währung.

1 Mark = 35 kr., und 1 Frank = 28 kr.; 35 = 5 × 7, und 28 = 4 × 7; die Mark hat also 5 Theile, wie der Frank 4 hat; die Mark verhält sich daher zum Frank wie 5 : 4; mithin sind 4 Mrk. = 5 Frk., und 1 Mark (= 28 + 7 kr.) = $1^1/_4$ Frk. oder 1 Frk. und 25 Centimenstücke.

32 Mark = 8 × 4 Mark, also auch = 8 × 5 oder 40 Frk.
45 Frank = 9 × 5 Frank, also auch = 9 × 4 oder 36 Mark.

Wie die Mark in 100 Pfennige, so wird der Frank in 100 Centimen eingetheilt. Sowie daher

4 Mark = 5 Frk., so sind
400 Pfg. = 500 Cent., also
40 „ = 50 „
4 „ = 5 „

Aufgabe 1. 565 Mark 72 Pfennige, wie viel in französischer Währung? (707 Frk. 15 Cent.)

Ausrechnung.

a.

400 Mk.	=	500 Frk.
100 „	=	125 „
40 „	=	50 „
20 „	=	25 „
5 „	=	6,25 „
0,72 „	=	0,90 „
565,72 Mk.	=	707,15 Frk.

b.

4 Mark — 5 Frk.
565,72 „ — ?

4 Mark
1 „
565,72 „

$$\frac{5 \cdot \overset{14143}{\cancel{56572}}}{\cancel{4} \cdot 100} = 707{,}15 \text{ Frk.}$$

Aufgabe 2. 356 Frk. 85 Cent., wie viel in deutscher Reichswährung? (285,48 Mk.)

Ausrechnung.

a.

300 Frk.	=	240 Mark
50 „	=	40 „
5 „	=	4 „
1 „	=	0,80 „
0,85 „	=	0,68 „
356,85 Fr.	=	285,48 Mark

b.

5 Franken — 4 Mk.
356,85 „ — ?

5 Frk.
1 „
356,85 „

$$\frac{4 \cdot \overset{7137}{\cancel{35685}}}{\cancel{5} \cdot 100} = 285{,}48 \text{ Mrk.}$$

§. 257. Ausländische Münzen, in deutscher Reichswährung ausgedrückt.

Arabien, 1 Piaster	3,55 Mark
Belgien, 1 Frank zu 100 Centimen . . .	0,80 "
Bolivia, 1 Piaster	4,05 "
Brasilien, 1 Milreis zu 1000 Reis . .	3,57 "
Chile, 1 Pesos oder Curantpiaster . . .	4,50 "
China, 1 Liang oder Tehl	6,05 "
Dänemark, 1 Reichsthaler zu 96 Schillingen .	2,27 "
Ecuador, 1 Peso	3,10 "
Egypten, 1 Piaster	0,21 "
England, 1 Pfd. Sterling zu 20 Schillingen à 12 Pence	20,45 "
Frankreich, 1 Frank zu 100 Centimen . .	0,80 "
Griechenland, 1 Drachme zu 100 Lepta . .	0,72 "
Holland, 1 Gulden zu 100 Cents . . .	1,70 "
Japan, 1 Tehl oder Tale	2,80 "
Italien, 1 Lira zu 100 Centesimi . . .	0,80 "
Marokko, 1 Peso oder spanischer Piaster . .	4,34 "
Mexiko, 1 Piaster zu 8 Realen . . .	4,36 "
Mittelamerikanische Freistaaten, 1 Piaster .	4,00 "
Montevideo, 1 neuer Peso	4,20 "
Neugranada, 1 Piaster	4,05 "
Nordamerikanische Union, 1 Dollar zu 100 Cents	4,20 "
Norwegen, 1 Speciesthaler zu 120 Schilling .	4,55 "
Ostindien, englisch, 1 Compagnie-Rupie . .	1,92 "
Persien, 1 Rupie	1,55 "
Peru, 1 Piaster	4,05 "
Portugal, 1 Milreis zu 1000 Reis . . .	4,50 "
Rußland, 1 Silber-Rubel zu 100 Kopeken . .	3,24 "
Schweden, 1 Thaler Banko zu 48 Schilling à 12 Pfennig	1,15 "
" 1 Reichsthaler Species . . .	4,60 "
Schweiz, 1 Frank zu 100 Rappen oder Centimen	0,80 "
Siam, 1 Tikal	2,62 "
Spanien, 1 neuer Piaster zu 2 Eskudo oder 5 Pesetas	4,20 "
Tunis, 1 Piaster	0,60 "
Türkei, 1 Piaster (500 Piaster = 1 Beutel) .	0,18 "
Venezuela, 1 Peso	3,10 "

Vorstehende Angaben lassen sich auf dreierlei Weise benützen.

a) Ausländisches Geld in deutsches Reichsgeld umzurechnen.

Beispiel: 475 persische Rupien, wie viel Mark?

Ausr. Da 1 pers. Rupie = 1,55 Mk., so betragen 475 dergleichen 475 × 1,55 Mk.

```
 2375
2375
475
736,25 Mark.
```

b) Deutsches Reichsgeld in ausländisches Geld umzurechnen.

Beispiel: Wie viel betragen 3475 Mk. in englischer Währung?

Ausrechnung.

20,45 Mk. = 1 Pfund Sterling; mithin machen 3475 Mk. so viele Pfund Sterling, als 20,45 Mk. in denselben enthalten sind.

```
20,45 | 3475,00 |         7
2045  | 347500  | 169,926.. Pfd. Sterling
        2045          ×20
        14300      18,540 Schilling
        12270         ×12
         20300       1080
         18405       540
          1895,0     6,480 Pence
          18405
            5450
            4090
            13600
            12270
            1330
```

Also sind 3475 Mk. = 169 Pfd. Sterl. 18 Schilling 6 Pence.

c) Ausländisches Geld gegenseitig umzurechnen.

Beispiel: Wie viel betragen 1500 schwedische Banko-Thaler in russischen Silber-Rubeln?

Ausrechnung.

1 schwed. Banko-Thlr. = 1,15 Mk. = 115 Pfg.
1 russ. Silber-Rubel = 3,24 Mk. = 324 „

Der schwedische Banko-Thaler verhält sich also zum russischen Silber-Rubel wie 115 : 324; mithin sind 324 Banko-Thaler = 115 Silber-Rubeln.

```
324 B.-Thlr.        115 S.-R.
1500  „               ?
```

$$\frac{115 \cdot 1500}{324} = 532{,}407 \ldots \text{ S.-R.}$$

Also sind 1500 schwed. Banko-Thlr. = 532 S.-R. 41 Kopeken.

II. Längenmaße.

(Bestimmungen.)

1 bayr. Fuß	= 0,2918592	Mtr.	1 Meter	= 3,42631	Fuß.
1 Zoll (12theilig)	= 2,43216	Ctm.	1 Ctm.	= 0,41116	Zoll.
1 Linie	= 2,0268	Mllm.	1 Mllm.	= 0,4934	Linie.
1 b. Klftr. z. 6 Fß.	= 1,751155	Mtr.	1 Kilom.	= 0,2666..	Stunde.
1 Ruthe zu 10 Fß.	= 2,918592	Mtr.	1 Meter	= 0,57105	Klafter.
1 bayr. Elle	= 0,833015	Mtr.	1 Meter	= 0,34263	Ruthe.
1 Poststunde	= 3,75	Kilom.	1 Meter	= 1,20046	bayr. Elle.

§. 258. Das Meter und der Fuß.

Aufgabe 1. 9 Fuß 8 Zoll, wie viel Meter, Dzm. ꝛc.?

Ausrechnung.

a. Wir berechnen sowohl die 9 Fuß, als die 8 Zoll besonders und addiren dann die Ergebnisse.

$$1 \text{ Zoll} = 2{,}43216^{cm} \times 8 = 19{,}45728^{cm} \;(8 \text{ Zoll})$$

$$1 \text{ Fuß} = 0{,}2918592^{m} \times 9 = 2{,}6267328^{m} \;(9 \text{ Fuß}) = 2^{m}\ 62^{cm}\ 6{,}7328^{mm}$$

$$+\ 19\text{,,}\ 4{,}5728\text{,,}$$

Also sind 9 Fuß 8 Zoll $= 2^{m}\ 82^{cm}\ 1{,}3056^{mm}$.

Da der Decimalbruch weniger als $0{,}5^{mm}$ beträgt, so lassen wir ihn außer Acht und sagen: 9 Fuß 8 Zoll $= 2^{m}\ 82^{cm}\ 1^{mm}$.

b. 9 Fuß 8 Zoll $= 9^{2}/_{3}$ Fuß; da 1 Fuß $= 0{,}2918592^{m}$ so sind $9^{2}/_{3}$ Fß. $= 9^{2}/_{3}$ oder $^{29}/_{3}$mal so viel.

$$\frac{29 \times 0{,}2918592}{3} = 29 \times 0{,}0972864^{m} = 2{,}8213056^{m}.$$

Einfacher ist die Berechnung, wenn man davon ausgeht, daß 24 Fuß $= 7^{m}$. Es ist dieß zwar nicht völlig genau; der Unterschied ist jedoch, wie sich's zeigen wird, verschwindend klein. Bei der bezeichneten Annahme stellt sich nämlich die Berechnung, wie folgt:

24 Fuß	7^{m}
$9^{2}/_{3}$ „	?

$$\frac{7 \times 29}{24 \times 3} = \frac{203^{m}}{72}$$

$$24 : 9^{2}/_{3} = 7^{m} : x$$

$$x = \frac{29 \times 7}{3 \times 24} = \frac{203^{m}}{72}$$

$$= 2^{m}\ 81^{cm}\ 9{,}4444^{mm}.$$

Dieß Resultat, mit dem vorigen verglichen, zeigt eine Differenz von 1,8612 Millimeter, also eine solche von nicht ganz 2 Millimeter, was bei 9 Fuß und 8 Zoll außer Beachtung fallen kann.

Daß 24 Fuß $= 7^{m}$ wird ganz besonders beim Kopfrechnen angenommen. Hiernach sind

48 Fuß $= 2 \times 7$ oder 14^{m}
72 Fuß $= 3 \times 7$ oder 21^{m}
12 Fuß $= ^{1}/_{2} \times 7$ oder $3^{1}/_{2}{}^{m}$
6 Fuß $= ^{1}/_{4} \times 7$ oder $1^{3}/_{4}{}^{m}$

1 Fuß $= ^{1}/_{24} \times 7$ oder $^{7}/_{24} = ^{6}/_{24} + ^{1}/_{24} = ^{1}/_{4} + ^{1}/_{24}{}^{m}$; mithin sind 40 Fuß $= 40 \times ^{1}/_{4} + 40 \times ^{1}/_{24} = 10 + 1^{2}/_{3}{}^{m}$ oder $11^{2}/_{3}{}^{m}$; 84 Fuß $= 84 \times ^{1}/_{4} + 84 \times ^{1}/_{24}{}^{m}$, oder auch $= 3^{1}/_{2} \times 7^{m}$.

Aufgabe 2. $3^{m}\ 75^{cm}$, wie viel Fuß?

Ausrechnung.

a. $3^{m}\ 75^{cm} = 3{,}75^{m} = 3^{3}/_{4}{}^{m}$; $1^{m} = 3{,}42631$ Fuß; 3,75 oder $3^{3}/_{4}{}^{m}$ machen 3,75 oder $^{15}/_{4}$ mal so viel.

3,42631 Fuß	oder	3,42631 Fß.
3,75		15
1713155		1713155
2398417		342631
1027893		4 | 51,39465 = 12,848 Fß.
12,8486625 Fuß.		

= 12 Fuß 8 Zoll 4,8 Linien (zehntheilig.)

b. Nach der Annahme, daß 7^m = 24 Fuß.

$7{,}00^m$ 24 Fß. $7 : 3{,}75 = 24$ Fß. : x

$3{,}75^m$?

$$\frac{\overset{6}{\cancel{24}} \cdot \overset{15}{\cancel{375}}}{\underset{\underset{7}{\cancel{28}}}{\cancel{700}}} = \frac{90}{7} \text{ Fß.} \qquad x = \frac{375 \times 24}{700} \text{ Fß.}$$

= 12,857 ... Fuß = 12 Fß. 8 Zll. 5,7 Lin.

Der Unterschied zwischen diesem und dem vorigen Ergebniß beträgt nicht 1 Linie.

Bei der Annahme, daß 7^m = 24 Fuß, ist die Zahl der Fuße $3\,^3/_7$ mal so groß als die Zahl der Meter; denn $24 = 3\,^3/_7 \times 7$. Die Zahl der Fuße wird daher auch gefunden, wenn man die Zahl der Meter $3\,^3/_7$ mal, d. i. wenn man sie 3mal nimmt und vom 3fachen $^1/_7$ zu diesem addirt. $21^m = 3\,^3/_7 \times 21$ Fuß; $3 \times 21 = 63$, und $^3/_7 \times 21$ oder $^1/_7 \times 63 = 9$; $64 + 9 = 72$; $21^m = 72$ Fuß.

§. 259. Das Meter und die Elle.

Da in Bayern bisher nicht bloß die bayerische Elle angewendet worden ist, sondern fast überall, wo in früherer Zeit eine andere Elle eingeführt war, diese sich auch im Gebrauche erhalten hat; so ist dem Bedürfnisse keineswegs genügt, wenn nur das Verhältniß zwischen dem Meter und der bayerischen Elle gegeben wird. Denn Jedermann will wissen, wie sich das Meter zu der ihm bekannten und von ihm bisher gebrauchten Elle verhält. Die Schule muß dieß berücksichtigen. Wir haben deßhalb die verschiedenen Ellen bayerischer Landestheile und Städte mit Angabe ihres Verhältnisses zum Meter, soweit es uns möglich war, zusammengestellt und geben zunächst diese Zusammenstellung, an welche sich dann die Berechnungen anreihen.

	a.	b.	c.
Ansbach	1 Elle = 0,624 Meter	1 Meter = 1,603 Ell.	8 Ellen = 5 Meter
Augsburg	1 „ = 0,606 „	1 „ = 1,65 „	5 „ = 3 „
Bamberg	1 „ = 0,668 „	1 „ = 1,497 „	3 „ = 2 „
Bayreuth	1 „ = 0,6 „	1 „ = 1,666 „	5 „ = 3 „
Erlangen	1 „ = 0,66 „	1 „ = 1,515 „	3 „ = 2 „
Hof	1 „ = 0,637 „	1 „ = 1,57 „	30 „ = 19 „
Ingolstadt	1 „ = 0,796 „	1 „ = 1,256 „	5 „ = 4 „
Kempten	1 „ = 0,679 „	1 „ = 1,473 „	25 „ = 17 „
Lindau	1 „ = 0,693 „	1 „ = 1,443 „	13 „ = 9 „
Marktbreit	1 „ = 0,585 „	1 „ = 1,709 „	12 „ = 7 „
Memmingen	1 „ = 0,701 „	1 „ = 1,427 „	10 „ = 7 „
München	1 „ = 0,833 „	1 „ = 1,2 „	6 „ = 5 „

	a.	b.	c.
Nürnberg	1 Elle = 0,656 Mtr.	1 Mtr. = 1,524 Ell	20 Ell. = 13 Mtr.
Oberpfalz	1 " = 0,832 "	1 " = 1,202 "	6 " = 5 "
Regensburg	1 " = 0,81 "	1 " = 1,235 "	16 " = 13 "
Rothenburg	1 " = 0,585 "	1 " = 1,709 "	12 " = 7 "
Schwabach	1 " = 0,756 "	1 " = 1,323 "	4 " = 3 "
Schweinfurt	1 " = 0,585 "	1 " = 1,709 "	12 " = 7 "
Speier	1 " = 0,55 "	1 " = 1,818 "	20 " = 11 "
Straubing	1 " = 0,808 "	1 " = 1,238 "	21 " = 17 "
Windsheim	1 " = 0,66 "	1 " = 1,515 "	3 " = 2 "
Würzburg	1 " = 0,587 "	1 " = 1,705 "	17 " = 10 "

Die bayerische Elle = der Münchener Elle.

Aufgaben mit Ausrechnung.

Mündlich.

Aufg. 15 Münchener Ellen, wie viel Meter?

Ausr. 6 Münchener Ellen = 5^m; 1 Elle beträgt den 6. Theil von 5^m, nämlich $\frac{5}{6}^m$; 15 Ellen machen 15 × $\frac{5}{6}^m$; 15 × $\frac{1}{6}$ = $2\frac{1}{2}$; 15 × $\frac{5}{6}$ = 5 × $2\frac{1}{2}$ = $12\frac{1}{2}$. Also 2c.

Aufg. 2. 18^m, wie viele bayr. Ellen?

Ausr. 5^m = 6 bayr. Ellen; 1^m beträgt den 5. Theil von 6 Ellen, nämlich $1\frac{1}{5}$ Elle; mithin machen 18^m 18 × $1\frac{1}{5}$ = 18+$3\frac{3}{5}$ = $21\frac{3}{5}$ Ellen.

Schriftlich.

Aufg. 1. Wie viel Meter machen $13\frac{3}{4}$ bayr. Ellen?

1. Nach der Tabelle unter a.

1 bayr. Elle = $0{,}833^m$; also sind $13\frac{3}{4}$ b. Ellen = $13\frac{3}{4}$ × $0{,}833^m$ =

$$\frac{55 \times 0{,}833}{4} = \frac{45{,}815}{4} = 11{,}45375^m =$$

$11^m\ 45^{cm}\ 3{,}75^{mm}$, nahe $11^m\ 45^{cm}\ 4^{mm}$.

2. Nach der Tabelle unter c.

6	Ell.	5^m
$13\frac{3}{4}$	"	?

$$\frac{5 \,.\, 55}{6 \,.\, 4} = \frac{275^m}{24}$$

$= 11{,}458\ ..^m = 11^m\ 45^{cm}\ 8^{mm}$.

$$6 : 13\tfrac{3}{4} = 5^m : x$$

$$x = \frac{55 \,.\, 5}{4 \,.\, 6} = \frac{275}{24}$$

Das Resultat der ersten Berechnung ist das genauere, wie denn überhaupt durch Zugrundlegung der Tabelle a genauere Ergebnisse erzielt werden, als durch Zugrundlegung der Tabelle c. Denn jedes Zahlenverhältniß, welches, wie hier durchgehends, auf eine andere Weise, als durch Kürzung mittelst gemeinschaftlicher Maße, in kleineren Zahlen ausgedrückt wird, verliert mehr oder weniger an Genauigkeit. Die Differenz ist jedoch, wenn die zu verwandelnde Ellenzahl nicht eine sehr große ist, von so geringem Belange, daß sie bei der Wahl, welche Tabelle zu benützen sei, ein Entscheidungsgrund nicht sein kann.

III. Hohlmaße für Flüssigkeiten.

§. 260. Verhältnißzahlen und Berechnungen.

1 bayer. Maß = 1,06903 Liter	1 Liter = 0,93543 Maß.
1 bayer. Eimer = 68,4177 Liter	1 Hltr. = 1,46161 b. Eimer.

Hiernach sind 64 Maß sehr nahe = 68,4 Liter,
aber 29 Maß noch genauer = 31 Liter.

Handelt es sich nur um kleine Quantitäten und will die Berechnung im Kopfe ausgeführt werden, so nimmt man an, daß 15 Maß = 16 Liter.

Aufg. 1. Wie viel Liter betragen hiernach 25 Maß?

Ausr. 15 Mß. = 16lt; 5 Mß. = $5^1/_3$lt; 25 oder 5 × 5 Mß. = 5 × $5^1/_3$ = $26^2/_3$ Liter.

Aufg. 2. Wie viel Maß machen 47 Liter?

Ausr. 16lt = 15 Mß.; 1lt beträgt den 16. Theil von 15 Maß = $^{15}/_{16}$ Mß.; 47lt machen also 47 × $^{15}/_{16}$ Mß.; 47 × $^{15}/_{16}$ = 47 × 1 — 47 × $^1/_{16}$ = 47 — $2^{15}/_{16}$ = $44^1/_{16}$. Also ꝛc.

Aufg. 3. 6 Eim. 48 Mß., wie viel Hektoliter und Liter?

Ausrechnung.

a. Wir berechnen die 6 Eim. 48 Mß. einzeln.

```
   1 Mß. = 1,069lt              1 Eim. =  68,4177lt
               48                               6
           ------                        ---------
             8552               6 Eim. = 410,5052lt
            4276                       +  51,312 lt
           ------                        ---------
  48 Mß. = 51,312lt                      461,8182lt
                    = 4Hl 61,8lt.
```

b. 6 Eim. 48 Mß. = $6^3/_4$ Eim. Nun rechne ich entweder $6^3/_4$ × 68,4177 lt, oder ich löse die Eimer in Maß auf und berechne es im Ganzen, davon ausgehend, daß 29 Mß. = 31 Liter.

```
   64 Mß. × 6            29 Mß.     31 lt
  ------------           432  „      ?
    384                  ----------------
   +48
  -----
   432 Maß
```

$$\frac{31 \cdot 432}{29} = \frac{13392}{29} = 461{,}8\ldots \text{ lt}$$

Aufg. 4. 7 Hektoliter 44 Liter, wie viel Eimer und Maß?

Ausrechnung.

7 Hl 44 lt = 744 lt, und 31 lt = 29 Mß.

```
  31 lt        29 Mß.
  744 „         ?
  -------------------
```

$$\frac{29 \cdot \overset{\overset{3}{93}}{\cancel{744}}}{\cancel{31} \cdot \underset{8}{\cancel{64}}} = \frac{87 \text{ Eim.}}{8} = 10{,}875 \text{ Eim.} = 10 \text{ Eim. } 56 \text{ Mß.}$$

744 lt = 744 × 29 Mß., getheilt durch 31. So oft hierin 64 Mß. enthalten sind, so viele Eimer gibt es.

IV. Getreidemaße.

§. 261. Verhältnißzahlen und Berechnungen.

1 Schffl.	= 222,358 lt	1 Hl	=	0,44973	Scheffel
1 Mtz.	= 37,0596 lt	1 „	=	2,69836	Metzen
1/2 „	= 18,5298 lt	1 „	=	5,3967	halbe Mtz.
1/4 „	= 9,2649 lt	1 „	=	10,79342	4tel-Mtz.
1/8 „	= 4,6325 lt	1 „	=	21,58685	8tel-Mtz.
1/16 „	= 2,3162 lt	1 „	=	43,17370	16tel-Mtz.
1/32 „	= 1,1581 lt	1 „	=	86,34739	32tel-Mtz.

27 Mtz. sind sehr nahe = 10 Hl

Aufg. 1. Wie viel Metzen betragen 7 Hl?

Ausr. 10 Hl = 27 Mtz.; 1 Hl = 2,7 Mtz.; also machen 7 Hl 7 × 2,7 Mtz. = 18,9 Mtz.

Aufg. 2 Wie viel Hektoliter sind 36 Mtz.?

Ausr. Da 27 Mtz. = 10 Hl, so sind 9 Mtz. 1/3 von 10 Hl = 3 1/3 Hl, und 36 Mtz. = 4 × 3 1/3 = 13 1/3 Hl = 13 Hl 33 1/3 lt.

Aufg. 3. Wie viel Hektoliter sind 6 Schff. 3 3/4 Mtz.?

Ausrechnung.

6 Schffl. 3 3/4 Metz = 39 3/4 Mtz., und 27 Mtz. = 10 Hl.

27 Mtz. 10 Hl 27 : 39 3/4 = 10 Hl : x
39 3/4 „ ? x = 14,722 . . Hl
 = 14 Hl 72,2 lt.

Aufg. 4. 25 Hl 32 lt, wie viel Scheffel und Metzen?

Ausrechnung.

10 Hl 27 Mtz.
2532 lt ?

10 Hl
1 „
1 lt
2532 „

$$\frac{\overset{9}{\cancel{27}} \cdot \overset{1266}{\cancel{2532}}}{10 \cdot 100 \cdot \underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{11394}{1000} \text{ Schff.}$$

= 11 Schff. 2 Mtz. 1 Vrtl. und nahe 1,8 Sz.

V. Handelsgewicht.

§. 092. Verhältnißzahlen und Berechnungen.

1 altes Pfund	= 560 gr	1 Kgr	= 1,785715	alte Pfund.
1 Loth	= 17,5 gr	1 Dgr	= 2,2857	Quint
1 Quint	= 4,375 gr	1 gr	= 0,22857	Quint
1 alter Centner	= 56 Kgr			

Da das alte Pfund = 560 gr, und das neue oder Zollpfund = 1/2 Kgr, also = 500 gr; so verhält sich das alte Pfund zum neuen, wie 560 : 500 = 112 : 100 = 56 : 50 = 28 : 25. Mithin sind

100 alte ℔. = 112 neue ℔.
50 „ ℔. = 56 „ ℔.
25 „ ℔. = 28 „ ℔.

Dieß ist den Schülern zum klaren Verständniß zu bringen und von ihnen festzuhalten.

Aufg. 1. 70 alte ℔., wie viel neue?

Ausr. 100 alte ℔. = 112 neue ℔.; 10 alte ℔. = 11,2 neue ℔.; also machen 70 alte ℔. 7 × 11,2 = 78,4 neue ℔. = 78 ℔. 20 Dgr.

Aufg. 2. 70 neue ℔., wie viel alte?

Ausr. 28 neue ℔. = 25 alte ℔.; 14 neue ℔. = $12^1/_2$ alte ℔.; 70 oder 5 × 14 neue ℔. machen also $5 \times 12^1/_2 = 62^1/_2$ alte ℔.

Aufg. 3. Wie viel betragen 12 Ctr. 75 ℔. alten Gewichts nach dem neuen Gewichte?

Ausrechnung.

a. Da 100 alte ℔. = 112 neue ℔., so machen 1275 alte ℔. $12^3/_4 \times 112$ neue ℔. =

$$\frac{51 \cdot \overset{28}{\cancel{112}}}{\cancel{4}} = 1428 \text{ ℔.} = 714 \text{ Kilogramm.}$$

b. 100 ℔. a. 112 ℔. n.
1275 „ „ ?

$$\frac{\overset{28}{\cancel{112}} \cdot \overset{51}{\cancel{1275}}}{\underset{4}{\cancel{100}}} = 1428 \text{ ℔.} = 714 \text{ Kilogr.}$$

Aufg. 4. 2 Ctr. 78 ℔. 20 Loth, wie viel Kilogramm?

Ausrechnung.

2 Ctr. 78 ℔. 20 Lth. = $278^5/_8$ ℔.

100 ℔. a. 112 ℔. n.
$278^5/_8$ „ ?

100 ℔. a.
1 „
$^1/_8$ „
$^{2229}/_8$ „

$$\frac{\overset{14}{\cancel{112}} \cdot 2229}{100 \cdot 8} = \frac{31206}{100} = 312{,}06 \text{ ℔.}$$
$$= 156{,}03 \text{ Kilogramm.}$$

VI. Verwandlungen mit Preisberechnung.

§. 263.

A. Mündlich.

Aufg. 1. Der laufende Fuß eines Baumstammes (also ohne

Rücksicht auf dessen Dicke oder Umfang) wurde für 1 Mark 12 Pfg. verkauft; wie hoch berechnet sich das Meter?

Ausr. a. 24 Fuß = 7^m. Was 24 Fuß kosten, das kosten auch 7^m. Da 1 Fuß 1 Mrk. 12 Pfg. kostet, so kosten 24 Fß. 24 × 1 Mrk. 12 Pfg. = 26 Mrk. 88 Pfg. Eben so viel kosten 7^m. Also kommt 1^m auf den 7. Theil von 26 Mrk. 88 Pfg. = 3 M. 84 Pfg.

b. Das Meter ist $3\frac{3}{7}$ mal so groß als der Fuß; also kostet es auch $3\frac{3}{7}$mal so viel, als dieser, nämlich $3\frac{3}{7}$×1 Mrk. 12 Pfg.; 3 × 1 Mrk 12 Pfg = 3 M. 36 Pfg.; $\frac{3}{7}$×1 Mark 12 Pfg. = $\frac{1}{7}$ von 3 Mrk. 36 Pfg. = 48 Pfg.; 3 M. 36 Pfg + 48 Pfg. = 3 M. 84 Pfg.

Aufg. 2. Wie hoch kommt das Meter, wenn die bayer. Elle um 3 Mrk. 75 Pfg. verkauft wird?

Ausr. a. 6 bayr. Ellen = 5^m. Wenn ich weiß, wie viel 6 bayr. Ellen kosten, so weiß ich auch, was 5^m kosten. 1 Elle kostet $3\frac{3}{4}$ Mrk.; also kosten 6 Ellen 6 × $3\frac{3}{4}$ Mark = $22\frac{1}{2}$ Mrk. So viel kosten auch 5^m; folglich kostet 1^m den 5. Theil von $22\frac{1}{2}$ Mark = $4\frac{1}{2}$ Mark.

Ausr. b. 1 Elle |——|——|——|——|——| = 5 Th.
1 Mtr. |——|——|——|——|——|——| = 6 Th.

Nun heißt es: 5 Theile kosten 3 Mrk. 75 Pfg.; was kosten 6 Theile?

Aufg. 3. Die Maß Wein zu 80 Pfg.; wie berechnet sich das Liter?

Ausr. a. Wir nehmen an, daß 15 Mß. = 16lt, und berechnen zuerst, was 15 Mß. kosten. Diese kosten 15 × 80 Pfg. = 12 Mrk. So viel kosten auch 16lt. Also berechnet sich 1lt auf $\frac{1}{16}$ von 12 M.; $\frac{1}{16}$ von 8 M. = 50 Pfg., und $\frac{1}{16}$ von 4 M. = 25 Pfg.; 50 + 25 Pfg. = 75 Pfg.

b. 16lt = 15 Mß.; also ist 1lt der 16. Theil von 15 Mß. = $\frac{15}{16}$ Mß; 1lt ist sonach um $\frac{1}{16}$ Mß. kleiner, als 1 Mß., mithin kostet es auch $\frac{1}{16}$ weniger als 1 Mß.; $\frac{1}{16}$ von 80 Pfg. = 5 Pfg.; 80 Pfg. — 5 Pfg. = 75 Pfg.

Aufg. 4. Der Metzen Kartoffeln zu 45 kr.; wie hoch kommt das Hektoliter?

Ausr. a. 27 Mtz. = 10Hl. Wenn 1 Mtz. 45 kr. kostet, so kosten 27 Mtz. 27 × 45 kr. = 20 fl. 15 kr. So viel kosten auch 10Hl. Also kostet 1Hl $\frac{1}{10}$ von 20 fl. 15 kr. = 2 fl. $1\frac{1}{2}$ kr.

b. Da 10Hl = 27 Mtz., so ist 1Hl = $2\frac{7}{10}$ Mtz.; also kostet 1Hl auch $2\frac{7}{10}$mal so viel als 1 Mtz.; 2 × 45 kr. = 1 fl. 30 kr.; $\frac{7}{10}$ oder 7 × $\frac{1}{10}$ von 45 kr. = 7 × $4\frac{1}{2}$ kr. = $31\frac{1}{2}$ kr.; 1 fl. 30 kr. + $31\frac{1}{2}$ kr. = 2 fl. $1\frac{1}{2}$ kr.

Aufg. 5. Das alte Pfund zu 42 kr.; wie berechnet sich das neue Pfund?

Ausr. a. 25 alte ℔. = 28 neue ℔. Wenn 1 ℔. 42 kr. kostet, so kosten 25 ℔. 25 × 42 kr. = 25 × 7 Sechser = 175 S. = 17 fl. 30 kr. So viel kosten 25 alte ℔. und auch 28 neue ℔. Also kostet 1

℔. hievon $^1/_{28}$ von 17 fl. 30 kr.; $28 = 4 \times 7$; $^1/_7$ von 17 fl. 30 kr. = 2 fl. 30 kr., und $^1/_4$ von 2 fl. 30 kr. = $37^1/_2$ kr. Also ꝛc.

b. Da 38 neue ℔. = 25 alte ℔., so ist ein neues ℔. der 28. Theil von 25 alten ℔. = $^{25}/_{28}$ alte ℔. Also kostet 1 neues ℔. auch so viel, als $^{25}/_{28}$ des alten Pfundes. Nun heißt die Aufgabe: 1 Pfd. zu 42 kr.; was kosten $^{25}/_{28}$ desselben? Wenn 1 ℔. 42 kr. kostet, so kostet $^1/_{28}$ ℔. den 28. Theil von 42 kr. = $1^1/_2$ kr., und $^{25}/_{28}$ ℔. kosten $25 \times 1^1/_2$ kr. = $25 + 12^1/_2$ oder $37^1/_2$ kr.

Aufg. 6. Wie berechnen sich 70 neue ℔., wenn 25 alte ℔. 10 fl. 30 kr. kosten?

Da 25 alte ℔. = 28 neue ℔., so kosten diese auch eben so viel als 25 alte ℔. Also heißt es: 28 neue ℔. kosten 10 fl. 30 kr.; wie hoch kommen 70 neue ℔.? Ich schließe von 28 ℔. auf 14 ℔. und von 14 ℔. auf 70 ℔. Resultat: 26 fl. 15 kr.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. 32 laufende Fuß einer Mauer kosteten 126 Mrk.; wie berechnen sich hiernach 25 Meter, wenn 7 m = 24 Fuß?

Ausrechnung.

Ich verwandle die 25 Meter in Fuß und berechne dann, was diese kosten.

a. 7 m — 24 Fß.
25 „ — ?

7 m
1 „
25 „ $\frac{24.25}{7} = \frac{600}{7}$ Fß.

b. 32 Fß. — 126 Mk.
$^{600}/_7$ „ — ?

32 Fß.
1 „
$^{600}/_7$ „ $\frac{126.600}{32.7} = 337{,}5$ Mk.

In einem Ansatze.

$$\frac{25 \,.\, 24 \,.\, 126}{7 \,.\, 32} = \frac{675}{2} = 337{,}5 \text{ Mrk.}$$

So oft in 25 Meter 7 Mtr. enthalten sind, so vielmal 24 Fuß kommen, und so oft hierin 32 Fß. enthalten sind, so vielmal 126 Mk. betragen die Kosten.

Beispiel 2. Ein Seiler kauft 4900 ruff. Pfd. Hanf für 560 Silberrubel; wie berechnet sich das deutsche Pfund, wenn 50 russ. Pfd. = 41 deutsche Pfd. und 1 Silberrubel = 3,24 Mk.?

a. 50 russ. Pfd. — 41 d. Pfd.
4900 „ „ — ?

$\frac{41 \,.\, 4900}{50} = 4018$ d. Pfd.

b. 3,24 Mk. × 560
19440
1620
1814,40 Mrk.

c. 4018 | 1814,40 | 0,45 .. Mrk.

Procent-Rechnung.

§. 264. Vorbemerkung.

Der Werth der Schnittwaaren wird per Meter, der Flüssigkeiten per Liter und Hektoliter, der Materialwaaren per Kilo, Pfd., Dekagramm

und Gramm, vieler zählbaren Dinge per Stück, Dutzend, Mandel und Schock festgesetzt. Zins und Rabatt, oft auch Gewinn und Verlust, sowie die chemischen Bestandtheile mancher Dinge u. s. w. pflegt man vom Hundert (= pro cent = %) zu bestimmen. Was also z. B. bei den Schnittwaaren das Meter ist, das ist in den Fällen, wo der Werth nach Procenten bestimmt zu werden pflegt, das Hundert. Und wie dort der Werth gewöhnlich von 1 Meter gegeben und von einer größeren oder kleineren Länge zu berechnen ist, oder umgekehrt; so ist hier entweder der Werth vom Hundert gegeben und von einer größeren oder kleineren Summe zu suchen, oder es ist der Werth von einer größeren oder kleineren Summe als 100 gegeben und vom Hundert zu berechnen.

A. Mündlich.

§. 266. Der Werth vom Hundert wird bestimmt.

1) Ein Handelsmann verkauft für 200 fl. Waaren und gewinnt damit 42 fl.; wie viel proc., d. i. wie viel gewinnt er mit 100 fl.? (Gewinnt man mit 200 fl. 42 fl., so gewinnt man mit 100 fl. die Hälfte von 42 fl., nämlich 21 fl.; also ist der Gewinn 21%.) — 2) Ein Weinhändler kauft für 800 Mark Wein, verliert aber beim Verkaufe 75 Mark; wie viel proc. also? (Verliert man an 800 Mark 75 Mark, so verliert man an 100 Mark $^1/_8$ von 75 = $9^3/_8$ Mark, der Verlust = $9^3/_8$%.) — 3) Von 400 Pfd. Kartoffeln erhält man nur 98 Pfd. getrocknete Scheiben; wie viel proc.? ($^1/_4$ von 98 Pfd. = $24^1/_2$ Pfd.) — 4) 1000 Pfd. Winterreps geben 330 Pfd. Oel, wie viel proc.? ($^1/_{10}$ von 330 = 33%.) — 5) 1200 Pfd. Rohflachs ergeben 210 Pfd. geschwungenen Flachs, wie viel proc.? ($^1/_{12}$ von 210 = $17^1/_2$%.) — 6) Von 2500 Mann Soldaten fielen in einem Gefechte 200 Mann; wie viel proc. beträgt der Verlust? ($^1/_{25}$ von 200 = 8%.)

---

7) 50 Pfd. Leinsamen geben 14 Pfd. Oel, wie viel proc.? (Geben 50 Pfd. Leinsamen 14 Pfd. Oel, so geben 100 oder 2 × 50 Pfd. Leinsamen 2×14 oder 28 Pfd.) — 8) $33^1/_3$ Pfd. Sonnenblumen geben 5 Pfd. Oel; wie viel proc.? (15%.) — 9) 25 Pfd. Buchecker geben 4 Pfd. Oel; wie viel proc.? (16%.) — 10) 20 Pfd. Kartoffeln enthalten 14 Pfd. Wasser; wie viel proc.? (70%.) — 11) Von 10 Pfd. Rindfleisch gehen durchs Kochen 2 Pfd., durchs Braten $1^1/_2$ Pfd. ab; wie viel beträgt der Verlust proc.? (20%, 15%.) — 12) Mit 5 kr. gewinnt man $1^1/_2$ kr.; wie viel proc.? (30%.) — 13) $66^2/_3$ Pfd. Schweinefleisch enthalten 16 Pfd. nährenden Stoff; wie viel proc.? ($66^2/_3$ = 2 × $33^1/_3$, 100 = 3 × $33^1/_3$. Man geht also von $66^2/_3$ auf $33^1/_3$ und dann auf 100; $66^2/_3$ Pfd. enthalten 16 Pfd. Nahrungsstoff; $33^1/_3$ enth. $^1/_2$ von 16 Pfd. = 8 Pfd, 100 Pfd. enth. 3×8 oder 24 Pfd.) — 14) Mit 75 Pfg. gewinnt Jemand 36 Pfg.; wie viel proc.? (48%.) — 15) Von 40 Kindern starben in ihrem ersten Lebensjahre 7, wie viel proc.? ($17^1/_2$%.) — 16) Eine Hausfrau mischt unter 50 Pfd. Kornmehl 30 Pfd. Gerstenmehl; wie viel proc. Gerstenmehl sind unter der Mischung? ($37^1/_2$%.) — 17) Ein Fabrikherr erhöhte

den Tagelohn seiner Arbeiter von 48 kr. auf 54 kr., um wie viel proc. also? (48 macht 6, 4 macht $^1/_2$, 100 macht $12^1/_2$.) — 18) Der Bauer A erntet von einem Ackerfeld 15 Hl Korn, sein Nachbar von einem gleichgroßen Acker 18Hl; wie viel proc. erntet dieser mehr als jener? (15 macht 3, 5 macht 1, 100 macht 20 × 1 = 20, also 20%.)

---

19) 150 Pfd. Weizenkörner gaben $1^7/_8$ Pfd. Asche, die im Wasser löslich war; wie viel proc.? (150 = $1^7/_8$ Pfd., 50 = $^1/_3$ von $1^7/_8$ = $^5/_8$ Pfd., 100 = 2 × $^5/_8$ Pfd. = $1^1/_4$ Pfd.; also $1^1/_4$%.) — 20) 125 Pfd. getrocknete Kartoffelknollen enthalten 8 Pfd. lösliche Asche, wie viel proc.? ($6^2/_5$%.) — 21) A stieg von 450 fl. Gehalt auf 525 fl.; wie viel proc. beträgt seine Einnahme jetzt mehr? ($16^2/_3$%.) — 22) Von 750 fl. Kapital rettete A bei einem Concurse 600 fl.; wie viel betrug sein Verlust proc.? (750 — 600 = 150; an 750 fl. verliert A 150 fl., an 50 fl. also $^1/_{15}$ von 150 fl. = 10 fl., an 100 fl. 2 × 10 = 20 fl.) — 23) $1^1/_4$Hl Aussaat geben 18Hl Ernte; wie viel proc. also? (Erntet man von $1^1/_4$ oder $^5/_4$Hl 18Hl, so macht es auf $^1/_4$Hl $3^3/_5$Hl, auf 1Hl 4 × $3^3/_5$ = $14^2/_5$Hl und auf 100Hl 100 × $14^2/_5$ = 1440Hl.) — 24) Aus $12^1/_2$ Pfd. rohem Hanfe erhält man 7 Pfd. langen Hanf; wie viel proc.? (56%.)

§. 266. Der Werth von Hundert ist gegeben.

1) A kauft 1 Mrg. Wiesen um 400 fl. und berechnet, daß ihm so sein Geld 8% abwirft, wie viel Gulden also? (Werfen 100 fl. 8 fl. ab, so 400 fl. 4 × 8 oder 32 fl.) — 2) Das Fleisch hat durchschnittlich 26% nährende Stoffe; wie viel Pfd. Nahrungsstoffe enthalten demnach 200 Pfd. Fleisch? 500 Pfd. Fl.? 50 Pfd. Fl.? 25 Pfd. Fl.? (52, 130, 13, $6^1/_2$ Pfd. Nahrungstheile.) — 3) Im Allgemeinen rechnet man von dem in die Mühle gegebenen Getreide auf die Mahlgebühr oder Mitze 10 %, auf das Verstäuben 6 %, auf Kleie 14 % und auf Mehl 70 %; wie viel Pfund macht jedes von 300 Pfd. Weizen? (30 Pfd. Mitze, 18 Pfd. Mehlstaub, 42 Pfd. Kleie, 210 Pfd. Mehl.) — 4) Durch Eintrocknen gehen beim Aufspeichern von Körnerfrüchten in dem ersten Jahre 3 % verloren; wie viel wird von 80Hl neuer Frucht nach 12 Monaten noch vorhanden sein? (100Hl machen 3, 20 machen $^3/_5$, 80 machen 4 × $^3/_5$ = $2^2/_5$; 80 — $2^2/_5$ = $77^3/_5$.) — 5) Neues Wiesenheu verliert in den ersten 5 Monaten $11^1/_2$ % am Gewichte; wie viel beträgt der Verlust von 15 Wagen Heu à 30 Ctr. in dieser Zeit? (15 × 30 = 450; $4^1/_2$ × $11^1/_2$ = $51^3/_4$.) — 6) Ein Landmann hat seine Früchte auf dem Halme gegen Hagelschlag mit 1275 fl. versichern lassen und zahlt dafür 4 % an Prämie; wie viel also? (1275 = $12^3/_4$ Hundert; $12^3/_4$ × 4 = 51.)

§. 267. Fortsetzung.

Bisher haben wir, im Ganzen genommen, immer eine und dieselbe Berechnungsweise angewendet. Es ist dieß diejenige, welche der schrift-

lichen Berechnung zu Grunde liegt. Für das Kopfrechnen gibt es jedoch eine zweite, welche in vielen Fällen jener vorzuziehen ist. Damit nun der Lehrer die Eigenthümlichkeit der einen wie der andern kennen lerne und hiedurch zugleich des Unterschiedes derselben sich klar bewußt werde, so stellen wir beide an einem Beispiele neben einander. Die Aufgabe sei: Wie viel Pfund Oel erhält man von 360 Pfd. Mohnsamen, wenn dessen Oelgehalt $33\frac{1}{3}$ % beträgt?

Der Oelgehalt beträgt $33\frac{1}{3}$ %, d. 100 Pfd. Mohnsamen geben $33\frac{1}{3}$ Pfd. Oel. Hieraus ist nun zu berechnen, wie viel Pfd. Oel 360 Pfd. Mohnsamen geben. Der leichteren Uebersicht wegen setzen wir

100 ℔. Mohn	$33\frac{1}{3}$ ℔. Oel
360 ℔. Mohn	? ℔.

a. Bisherige Weise. Wir vergleichen die 100 ℔. Mohn mit den 360 ℔ Mohn. Wie kommen wir von 100 auf 360? Wir schließen von 100 auf 10 und von 10 auf 360. Wenn 100 ℔. Mohn $33\frac{1}{3}$ ℔. Oel geben, so geben 10 ℔. Mohn den 10. Theil von $33\frac{1}{3}$ ℔. oder $3\frac{1}{3}$ ℔. Oel; und wenn 10 ℔. Mohn $3\frac{1}{3}$ ℔. Oel geben, so geben 360 ℔. Mohn $36 \times 3\frac{1}{3}$ ℔. oder 120 ℔. Oel.

b. Andere Weise. Wir vergleichen die Quantität des Mohns, von welcher der Oelbetrag bekannt ist, mit der Quantität des daraus gewonnenen Oels selbst, die 100 ℔. also mit den $33\frac{1}{3}$ ℔. Was springt da sofort in die Augen? Daß $33\frac{1}{3}$ der dritte Theil von 100 ist, und daß also das Gewicht des Oels $\frac{1}{3}$ von dem Gewichte des Mohns beträgt. Und was können wir daraus schließen? Daß auch das Oel von 360 ℔. Mohn $\frac{1}{3}$ von 360 ℔., nämlich 120 ℔. betragen wird.

Die zweite Weise ist hier unstreitig die bessere. Und warum? Weil $33\frac{1}{3}$ (die Zahl der Procente) ein einfacher Theil, von 100 ist, während 360 weder ein einfacher Theil, noch ein reines Vielfaches von 100 ist. Dieselbe wird daher in allen Fällen mit Vortheil angewendet, wo die Zahl der Procente einen bequemen Bruchtheil vom Hundert bildet.

So ist's auch, wenn wir die Aufgabe umkehren und setzen: Von 360 Pfd. Mohn erhielt man 120 Pfd. Oel; wie viel proc.?

360 ℔. Mohn	120 ℔. Oel
100 ℔. Mohn	?

a. Bisherige Weise. Man vergleicht die 360 Pfd. Mohn mit den 100 Pfd. Mohn, und da 100 weder ein reines Vielfaches, noch ein einfacher Theil von 360 ist, so geht man von 360 Pfd. auf 10 Pfd. und von 10 auf 100 Pfd. Facit $33\frac{1}{3}$ %.

b. Andere Weise. Man vergleicht die 360 Pfd. Mohn mit den daraus gewonnenen 120 Pfd. Oel, woraus sich ergibt, daß die Quantität des Oels $\frac{1}{3}$ von der Quantität des Mohns ist. Also, so schließen wir nun, muß auch das Oel von 100 Pfd. Mohn $\frac{1}{3}$ von 100 Pfd., d. i. $33\frac{1}{3}$ Pfd. betragen.

Die zweite Weise führt auch hier leichter und schneller zum Ziele, als die erste. Darum ist der Schüler auch besonders darin zu üben. Als Vorübung dient das Folgende:

a.	50 procent	= 50 von 100	= $\frac{1}{2}$	vom Ganzen.
	$33\frac{1}{3}$ "	= $33\frac{1}{3}$ v. 100	= $\frac{1}{3}$	" "
	25 "	= 25 von 100	= $\frac{1}{4}$	" "
	20 "	= 20 von 100	= $\frac{1}{5}$	" "
	$12\frac{1}{2}$ "	= $12\frac{1}{2}$ v. 100	= $\frac{1}{8}$	" "
	10 "	= 10 von 100	= $\frac{1}{10}$	" "
	5 "	= 5 von 100	= $\frac{1}{20}$	" "
	4 "	= 4 von 100	= $\frac{1}{25}$	" "
	2 "	= 2 von 100	= $\frac{1}{50}$	" "
	1 "	= 1 von 100	= $\frac{1}{100}$	" "

---

b.	$\frac{1}{2}$ vom Ganzen	= 50 proc.	$\frac{1}{7}$ vom Ganzen	= $14\frac{2}{7}$ proc.
	$\frac{1}{3}$ " "	= $33\frac{1}{3}$ "	$\frac{1}{8}$ " "	= $12\frac{1}{2}$ "
	$\frac{2}{3}$ " "	= $66\frac{2}{3}$ "	$\frac{1}{9}$ " "	= $11\frac{1}{9}$ "
	$\frac{1}{4}$ " "	= 25 "	$\frac{1}{10}$ " "	= 10 "
	$\frac{3}{4}$ " "	= 75 "	$\frac{1}{15}$ " "	= $6\frac{2}{3}$ "
	$\frac{1}{5}$ " "	= 20 "	$\frac{1}{20}$ " "	= 5 "
	$\frac{2}{5}$ " "	= 40 "	$\frac{1}{25}$ " "	= 4 "
	$\frac{3}{5}$ " "	= 60 "	$\frac{1}{30}$ " "	= $3\frac{1}{3}$ "
	$\frac{4}{5}$ " "	= 80 "	$\frac{1}{40}$ " "	= $2\frac{1}{2}$ "
	$\frac{1}{6}$ " "	= $16\frac{2}{3}$ "	$\frac{1}{50}$ " "	= 2 "

Wird durchgesprochen und eingeübt, wie folgt:

50% gewinnen heißt, mit 100 fl. 50 fl., mit 100 kr. 50 kr., mit 100 Mrk. 50 Mrk., mit 100 pf. 50 pf., überhaupt mit 100 50 oder die Hälfte gewinnen; wer also 50% gewinnt, der gewinnt mit 200 fl. die Hälfte von 200 fl., mit 300 fl. die Hälfte von 300 fl., mit 400 Mrk. die Hälfte von 400 Mrk., mit 48 kr. $\frac{1}{2} \times 48$ kr., mit 13 Gr. $\frac{1}{2} \times 13$ Gr., mit 6 pf. $\frac{1}{2} \times 6$ pf., also immer die Hälfte vom Ganzen.

1) A verliert durch einen Bankerott die Hälfte seines Vermögens; wie viel proc. also? (50%.) — 2) Ein Wohlthäter schenkt zur Armenstiftung seines Ortes $\frac{3}{8}$ seines Geldes, wie viel proc.? ($\frac{1}{8}$ von 100 $= 12\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8} = 3 \times 12\frac{1}{2} = 37\frac{1}{2}$; also $37\frac{1}{2}$ %.) — 3) Ein Kaufmann gewinnt mit 10 Pfg. 4 Pfg., wie viel Theile vom Ganzen also und wie viel proc.? ($4 = \frac{2}{5}$ von 10; $\frac{2}{5}$ von $100 = 40$; also 40%.) 4) Der Kopf, die Zunge und die Füße eines Ochsen betragen $\frac{1}{20}$, die Haut $\frac{1}{12}$ des lebenden Gewichts; wie viel proc.? (5%, $8\frac{1}{3}$ %.) — 5) Bei einem Schweine rechnet man, daß das Fleischgewicht 75% des lebenden betrage; welchen Theil also? ($\frac{3}{4}$.) — 6) Das Hammelfleisch verliert beim Braten 24 %, welchen Theil also vom Ganzen? (1 % $= \frac{1}{100}$, 24 % $= \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$.) — 7) In England leben 50 % der Einwohnerzahl in Städten, im Königreich Sachsen $33\frac{1}{3}$ %, in Frankreich 25%, in Bayern 24%; welche Theile also vom Ganzen? ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{25}$.) — 8) A, der 80 Mk. Miethe zahlte, wird um 20 Mk. gesteigert, mithin um wie viel %? (20 Mrk. sind $\frac{1}{4}$ von 80 Mrk.; A wird also um $\frac{1}{4}$ gesteigert; das macht vom Hundert $\frac{1}{4}$ mal 100 oder 25; die Erhöhung des Miethzinses beträgt also 25 %.) — 9) B bietet das

Meter zu 2 Mark 40 Pfg., gibt es aber um 2 Mrk. 10 Pfg., wie viel proc. also billiger? (2 Mrk. 40 Pfg. — 2 Mrk. 10 Pfg. = 30 Pfg.; 30 Pfg. sind $^1/_8$ von 2 Mrk. 40 Pfg.; das macht vom Hundert $^1/_8$mal 100 oder $12^1/_2$; er gibt das Meter also um $12^1/_2$% billiger, als er es bot.

B. Schriftlich.

§. 268.

1) Jemand kauft sich für 775 Mrk. ein Grundstück; dasselbe gewährt ihm jährlich durch Verpachtung einen Reinertrag von 51 Mark 30 Pfg.; wie viel proc. wirft ihm die Kaufsumme ab?

Aufl. Berechnen soll ich, wie viel 100 Mrk. von der Kaufsumme jährlich abwerfen, und die Aufgabe sagt mir, wie viel die ganze Kaufsumme abwirft. Die Aufgabe ist also die: 775 Mrk. werfen $51^1/_2$ Mrk. ab, wie viel 100 Mrk.?

Zweisatz.		Proportion.
775 Mrk. K.	$51^1/_2$ Mrk.	775 : 100 = $51^1/_2$ Mrk. : x
100 Mrk. K.	?	x = $6^{20}/_{31}$ %.

2) A verkauft den Ctr. Weizen einmal für 18 Mrk. 60 Pfg. und dann für 16 Mrk. 70 Pfg.; wie viel proc. löst er diesmal weniger?

Ausr. 18 Mrk. 60 Pfg.
16 „ 70 „
1 Mrk. 90 Pfg.

Von $18^3/_5$ Mark betrug der Mindererlös $1^9/_{10}$ Mark; wie viel von 100 Mark?

$18^3/_5$ Mrk.	$1^9/_{10}$ Mrk.	$18^3/_5$: 100 = $1^9/_{10}$: x
100 „	?	x = $10^{20}/_{93}$ %.

3) Nach Angabe der Chemiker enthält die Eichenrinde 15% Gerbestoff; wie viel Gerbestoff enthalten demnach 8 Ctr. 65 Pfd. Eichenrinde?

Aufl. Wenn man 100 Pfd. trockene Eichenrinde mahlt und durch Wasser den Gerbestoff herauszieht, die Rinde dann wieder trocknet und wiegt, so hat sie nur noch ein Gewicht von 85 Pfd. Die 100 Pfd. Eichenrinde enthielten also 15 Pfd. Gerbestoff. Nach der Aufgabe ist zu berechnen, wie viel solchen Stoff 8 Ctr. 65 Pfd. oder 865 Pfd. Eichenrinde enthalten.

100 ℔. R.	15 ℔. G.	100 : 865 = 15 ℔. : x
865 ℔. „	?	x = $129^3/_4$ ℔.

4) A betheiligte sich bei einem Eisenbahn-Unternehmen mit 3500 M. und verkaufte seine Aktien wieder, nachdem sie um $13^1/_2$ % gestiegen waren; wie viel betrug sein Erlös?

Aufl. A trat einer Gesellschaft bei, welche auf ihre Kosten einen Eisenbahnbau unternahm, und zahlte zu diesem Zwecke 3500 M. Dafür

erhielt er Aktien, d. h. gleichlautende schriftliche Scheine (etwa über je 500 M. einen), worin ihm zugleich ein verhältnißmäßiger Antheil an dem jährlichen Reinertrage der Bahn zugesichert ward. Da später die Bahn eine hohe Einnahme und daher auch einen guten Antheil (eine gute Dividende) für die Aktienbesitzer abwarf; so wurden die Aktien von Andern zu kaufen gesucht. Sie stiegen deßhalb im Preise. Gewöhnlich wird dieß nun nach Procenten bestimmt. Zahlt man z. B. für eine Actie, welche auf 500 M. lautet, 500 + 5 M.; so macht das für 100 M. 100 + 1 M. Die Aktien sind also um 1% gestiegen; sie stehen 1% über pari = 101. Sind also die Aktien des A um $13\frac{1}{2}$ proc. gestiegen, so kostet jedes Hundert 100 + $13\frac{1}{2}$ = $113\frac{1}{2}$ M.

100 M.	$113\frac{1}{2}$ M.	100 : 3500 = $113\frac{1}{2}$ M. : x
3500 M.	?	x = $3872\frac{1}{2}$ M.

Gewinn- und Verlustrechnung.

§. 269. Allgemeines.

Werden erkaufte Gegenstände wieder verkauft, so beträgt der Erlös daraus entweder eben so viel, oder mehr oder weniger als der Einkaufspreis. Der Mehrerlös ist der Gewinn, der Mindererlös Verlust. Gewinn und Verlust sind also der Unterschied zwischen der Ausgabe für den Einkauf und der Einnahme aus dem Verkaufe. Demnach kommen bei der Gewinn- und Verlustrechnung zunächst dreierlei Werthe vor: der Einkaufspreis, der Verkaufspreis und der Unterschied zwischen beiden — Gewinn und Verlust. Sind zwei dieser Stücke gegeben, so läßt sich das dritte durch Rechnung finden. Also sind, da jedes derselben in Frage stehen kann, drei Formen von Aufgaben möglich. Sie lassen sich, wenn man den Einkaufspreis mit a, den Verkaufspreis mit b und den Unterschied mit c bezeichnet, wie folgt darstellen:

Gegeben,	gesucht.	Gegeben,	gesucht.	Gegeben,	gesucht.
a. b.	c.	b. c.	a.	b. c.	a.

Gesetzt, man habe Gelegenheit, bei einem Geschäfte mit je 25 M. 8 M. und bei einem anderen Geschäfte mit je 40 M. 13 M. zu gewinnen; so entsteht die Frage: welches derselben bietet den größeren Vortheil? Um dieß bestimmen zu können, so muß man wissen, wie viel in beiden Fällen mit einer gleichen Summe gewonnen wird. Als solche läßt sich jede beliebige Zahl annehmen. Gewöhnlich setzt man 100. Man sucht also den Gewinn pro cent. Gewinnt man mit 25 M. 8 M., so werden mit 100 oder 4mal 25 M. 4mal 8 oder 32 M. gewonnen. Gewinnt man aber mit 40 M. 13 M., so beträgt der Gewinn vom 100, d. i. von $2\frac{1}{2}$mal 40 M. $2\frac{1}{2}$mal 13 oder $32\frac{1}{2}$ M., mithin $\frac{1}{2}$% mehr als im vorigen Falle. — Der Gewinn und Verlust pro cent ist daher in besonderen Fällen eben so wohl zu wissen nöthig, als der Gewinn und Verlust überhaupt. Es ist der vierte Begriff in der

Gewinn- und Verlustrechnung und kann in den vorhin bezeichneten drei Formen an die Stelle jedes der drei Werthe treten. Dadurch lassen sich, wie folgende Uebersicht ergibt, wieder 3mal 3 oder 9 verschiedene Formen von Aufgaben bilden.

Gegeben,	gesucht.	Gegeben,	gesucht.	Gegeben,	gesucht.
a b.	%	a. c.	%.	b. c.	%.
a. %.	c.	a. %.	b.	b. %.	a.
% b.	c.	% c.	b.	%. c.	a.

Die Mannigfaltigkeit der Aufgaben dieser Art wird aber noch vermehrt, wenn man die Aufgaben zum Theil auf die ganze Quantität, zum Theil auf einen Theil derselben, und die Procente auf eine bestimmte Zeit bezieht.

Bevor man zu dem Nachstehenden übergeht, wird es gut sein, die Aufgaben unter §. 144 nochmal durchzunehmen.

A. Aufgaben ohne Procent-Bestimmung.

Mündlich.

§. 270. **Der Gewinn oder Verlust wird gesucht.**

Beispiel 1. A kauft 25 Meter zu 70 Mrk. und gibt das Mtr. um 4 Mrk. 20 Pfg.; wie viel hat er Gewinn?

Aufl. Um den Gewinn von einer gewissen Sache oder Quantität Waare bestimmen zu können, so muß man wissen, was sie im Einkaufe und Verkaufe kostet. Nach unserer Aufgabe ist zu suchen, wie viel A an 25 m gewinnt. Also muß ich wissen, was ihn diese gekostet haben, und was er dafür löst. Was ihn die 25 m gekostet haben, ist uns aus der Aufgabe bekannt, nämlich 70 Mark; wie viel er aber dafür einnimmt, ist nicht geradezu gesagt; sondern es ist nur angegeben, was er für ein Meter löst. Also müssen wir's berechnen. Für das Meter erhält er 4 Mark 20 Pfg.; mithin für 25 Meter 25×4 Mrk. 20 Pfg. oder 105 Mrk. Was A über 70 Mark löst, ist Gewinn. Da er 105 Mark löst, so beträgt sein Gewinn 105—70 oder 35 Mark.

Beispiel 2. B kauft das Hektoliter Linsen für 12 Mrk. 50 Pfg. und verkauft das Liter um 20 Pfg.; wie viel wird er an $4\frac{1}{2}$ Hl gewinnen oder verlieren?

Aufl. Hier ist zu suchen, wie viel der Gewinn oder Verlust von $4\frac{1}{2}$ Hl beträgt. Das kann ich finden, wenn ich weiß, was dieselben im Einkaufe und im Verkaufe kosten. Aus der Aufgabe wissen wir weder das eine, noch das andere. Also müssen wir beides berechnen. Das gibt zwei besondere Aufgaben. Die erste ist: B bezahlt für das Hektoliter 12 Mark 50 Pfg., wie viel für $4\frac{1}{2}$ Hl? Antwort: $4\frac{1}{2}$×12 Mark 50 Pfg. = 56 Mrk. 25 Pfg. Die andere Aufgabe ist: Für 1 lt löst B 20 Pfg.; wie viel für $4\frac{1}{2}$ Hl? Antwort: 450 × 20 Pfg. = 90 Mrk. Der Ankauf beträgt 56 Mark 25 Pfg., der Erlös 90 Mrk.; also verkauft B mit Gewinn. Er gewinnt an $4\frac{1}{2}$ Hl 90 Mrk. — 56 Mrk. 25 Pfg. = 33 Mrk. 75 Pfg.

Die Aufgabe läßt sich noch auf eine zweite und dritte Weise berechnen. Wie viel B an $4\frac{1}{2}$ Hl gewinnt, kann nämlich auch gefunden werden, wenn man weiß, wie viel er an einem Hektoliter gewinnt, oder wenn man weiß, wie viel er an einem Liter gewinnt Will man zuerst suchen, wie viel B an dem Hektoliter gewinnt, so muß man den Einkaufspreis und den Verkaufspreis von dem Hektoliter kennen;

und will man zuerst suchen, wie viel B an dem Liter gewinnt, so muß man sowohl den Einkaufspreis als den Verkaufspreis von dem Liter wissen.

Hieraus geht überhaupt hervor: um den Gewinn oder Verlust bestimmen zu können, so muß man den Einkaufspreis und den Verkaufspreis **von einer gleichen Quantität** Waare kennen, und ist dieß in der Aufgabe nicht gegeben, so ist das Erste, es zu suchen.

§. 271. Der Verkaufspreis wird gesucht.

Beisp. 1. Ein Kaufmann zahlt für 20 Kilo Gewürz 600 Mrk. und will am Kilo 5 Mrk. gewinnen; wie muß er das Dekagramm verkaufen?

Aufl. Der Verkaufspreis beträgt so viel, als der Einkaufspreis und der Gewinn zusammen genommen. Will ich also finden können, wie das Dekagramm zu verkaufen ist, so muß ich den Einkaufspreis und den Gewinn von 1Dgr wissen, und da die Aufgabe dieß nicht sagt, so muß ich es berechnen. Das gibt wieder 2 besondere Aufgaben. Die erste ist: 20 Kilo kosten im Einkaufe 600 Mrk.; wie hoch kommt das Dkgr.? Die andere: Am Kilo will man 5 Mark gewinnen; wie viel am Dekagramm?

Ausr. 20 Kilo machen 600 Mrk.; 1 Kilo macht $\frac{1}{20}$ davon; $\frac{1}{20}$ von 600 Mrk. = 30 Mrk.; 1 Dkgr. macht $\frac{1}{100}$ von 30 Mrk. = 30 Pfg. So viel kostet das Dekagr. im Einkaufe. Nun berechne ich den Gewinn. Dieser beträgt vom Kilo 5 Mrk., vom Dekagramm also $\frac{1}{100}$ von 5 Mrk. = 5 Pfg. Kauft man das Dekagr. um 30 Pfg. und will 5 Pfg. daran gewinnen, so muß man es um 30 + 5 = 35 Pfg. verkaufen.

Wie das Dekagramm zu verkaufen ist, kann übrigens auch gefunden werden, wenn man weiß, wie das Kilo oder wie die 20 Kilo zu verkaufen sind. Also noch auf zweierlei Weise. Im ersteren Falle muß man den Einkaufspreis und den Gewinn vom Kilo kennen, im anderen Falle den Einkaufspreis und den Gewinn von 20 Kilo, mithin immer den Einkaufspreis und den Gewinn von einer gleichen Quantität.

Beisp. 2. Ein Melber kauft 5 Ctr. Mehl, den Ctr. zu 17 Mrk. 20 Pfg.; die Mehlpreise fallen, und er muß das Pfund mit 5 Pfg. Schaden verkaufen; wie viel wird er für 5 Ctr. lösen?

Auf zweierlei Weise:

a. Die 5 Ctr. kosten 5 × 17 Mrk. 20 Pfg. = 86 Mrk.; daran werden verloren 5 × 100 × 5 Pfg. = 25 Mark; 86 Mark — 25 Mark = 61 Mark.

b. Aus dem Ctr. werden gelöst 17 Mrk. 20 Pfg. weniger 100 × 5 Pfg. = 17 Mark 20 Pfg. — 5 Mrk. = 12 Mrk. 20 Pfg.; aus 5 Ctr. 5 × 12 Mark 20 Pfg. = 61 Mark.

§. 272. Der Einkaufspreis wird gesucht.

Beisp. 1. Ein Händler verkauft 12 Ctr. Hopfen, den Ctr. zu 160 Mrk.; wie hat er den Ctr. gekauft, wenn er im Ganzen 252 Mrk. gewinnt?

Aufl. So viel der Händler am Ctr. gewinnt, um eben so viel hat er ihn billiger eingekauft, als verkauft. Um daher den Einkaufspreis zu finden, so muß

man den Gewinn vom Verkaufspreis abziehen. Daher muß man auch den Verkaufspreis und den Gewinn kennen und zwar von einer und derselben Quantität der Waare, hier also entweder a. von 1 Ctr., oder b. von 12 Ctr.

a. Im ersteren Falle heißt die Frage: Wie wurde der Ctr. verkauft und wie viel wurde daran gewonnen? Verkauft wurde der Ctr. um 160 Mrk., und gewonnen wurde am Ctr. $^1/_{12}$ von 252 Mrk. = 21 Mrk.; der Ankauf betrug also per Ctr. 160 Mrk. — 21 Mrk. = 139 Mrk.

b. Im andern Fall heißt die Frage: Wie wurden die 12 Ctr. verkauft, und wie viel wurde daran gewonnen? Verkauft wurden die 12 Ctr. um 12 × 160 Mark = 1920 Mrk.; gewonnen wurden daran 252 Mrk.; also sind sie um 1920 — 252 = 1668 Mrk. eingekauft worden. Der Ctr. hat ihm demnach $^1/_{12}$ von 1668 Mrk. = 139 Mrk. gekostet.

Beisp. 2. A verkauft 5 Hl Wein um 144 Mrk. und verliert dabei am Hektoliter 4 Mrk. 20 Pfg.; wie hat er dasselbe eingekauft?

Aufl. So viel A am Hektoliter verliert, um so viel hat er es höher eingekauft, als verkauft. Um also den Einkaufspreis zu finden, so muß man den Verlust zum Verkaufspreise addiren. Zuvor aber muß ich beide kennen.

a. Wie viel betragen Verkaufspreis und Verlust von 1 Hl? Verkauft wurde das Hl um $^1/_5$ von 144 Mrk. = $28^4/_5$ Mrk.; verloren wurden an demselben 4 Mrk. 20 Pfg. Mithin beträgt der Einkaufspreis 28 Mrk. 80 Pfg. + 4 Mrk. 20 Pfg. = 33 Mrk.

b. Wie v. betragen der Verkaufspreis und der Verlust von 5 Hl? Verkauft wurden sie um 144 Mrk. und verloren wurden daran 5 × 4 Mark 20 Pfg. oder 21 Mrk.; der Ankauf der 5 Hl beträgt also 144 + 21 oder 165 Mrk. Mithin kostete den A das Hl $^1/_5$ von 165 Mrk. = 33 Mrk.

§. 273. Aus dem Gewinne oder dem Verluste die Quantität der Waare zu berechnen.

Beisp. 1. Ein Obsthändler kaufte eine Partie Aepfel, das Hl zu 3 Mark 20 Pfg.; er verkaufte dieses wieder um 5 Mrk. und gewann im Ganzen 36 Mrk.; wie viel Hl Aepfel sind es gewesen.

Aufl. An 1 Hl gewann er 5 Mark — 3 Mark 20 Pfg. = 1 Mark 80 Pfg. So vielmal 1 Hl Aepfel er kaufte und verkaufte, so vielmal $1^4/_5$ Mark beträgt sein Gewinn. Da er nun im Ganzen 36 Mrk. gewann, so waren es so vielmal 1 Hl Aepfel, als $1^4/_5$ Mrk. in 36 Mrk. enthalten ist. $1^4/_5 = {}^9/_5$; 9 Mrk. sind in 36 Mrk. 4mal, $^9/_5$ Mrk. 5mal so oft, also 5 × 4 oder 20mal enthalten. Mithin sind es 20 Hl Aepfel gewesen.

Probe: Bezahlt hat der Obsthändler 20 × $3^1/_5$ Mrk. = 64 Mrk.; eingenommen hat er 20 × 5 Mrk. = 100 Mrk.; 100 Mrk. — 64 Mrk. = 36 Mrk. Gewinn.

Beispiel 2. Ein Pfund kostete im Einkaufe 6 Mrk. 25 Pfg. und 1 Dgr im Verkaufe 17 Pfg.; wie viel wurde verkauft, wenn der Gewinn im Ganzen 54 Mrk. betrug?

Aufl. Im Allgemeinen wurden so viele Pfund verkauft, als der Gewinn von 1 Pfd. in 54 Mrk. enthalten ist. Der Einkaufspreis von 1 Pfd. beträgt 6 Mrk. 25 Pfg.; der Verkaufspreis von 1 Pfd. beträgt 50 × 17 Pfg. = 8 Mrk. 50 Pfg.; der Gewinn von 1 Pfd. ist also 8 Mrk. 50 Pfg. — 6 Mrk. 25 Pfg. = 2 Mrk. 25 Pfg. Es waren daher so viele Pfund, als 2 Mrk. 25 Pfg. oder $2^1/_4$ Mrk. in 54 Mrk. enthalten sind. $2^1/_4 = {}^9/_4$; $^9/_4$ Mrk. sind in $^{54}/_4$ Mrk. 6mal, in 54 ganze Mark 4 × 6 oder 24mal enthalten. Die Waare betrug also 24 Pfd.

Schriftlich.

§. 274.

1) Ein Wirth kauft 8Hl 48lt Wein, das Hektoliter zu 43 Mark 75 Pfg.; der Fuhrlohn und die andern Unkosten betragen im Ganzen 12 Mark 50 Pfg.; wie viel gewinnt er daran, wenn er das Liter um 70 Pfg. gibt? (Ich berechne zuerst die Auslagen, dann den Erlös, dann den Gewinn.)

a. Berechnung der Auslagen.

8Hl à 43 Mrk. 75 Pfg.	= 350 Mrk.		100lt $43^3/_4$ Mrk.
48lt . .	= 21 „		48 „ ?
Andere Unkosten	= 12 „	50 Pfg.	$\frac{175 \times 48}{4 \times 100} = 21$ Mrk.
	383 Mrk.	50 Pfg.	

b. Berechnung des Erlöses.

8Hl 48lt = 848lt à 0,7 Mrk.
0,7
593,6 Mrk. = 593 M. 60 Pfg.
— 383 M. 50 Pfg.
c. Gewinn = 210 M. 10 Pfg.

2) A kauft $1^5/_8$ Ctr. Zucker um 81 Mrk. 25 Pfg. und will am Pfunde 20 Pfg. gewinnen; wie muß er es verkaufen?

Ich berechne zuerst, was ihn selbst das Pfd. kostet, und zähle dann die 20 Pfg. dazu.

$1^5/_8$ Ctr. — $81^1/_4$ Mark
1 Pfd. — ?

$^{13}/_8$ Ctr.
$^1/_8$ „
1 „
1 Pfd.

$$\frac{325 \cdot 8}{4 \cdot 13 \cdot 100} = {}^1/_2 \text{ Mrk. oder 50 Pfg.}$$

(gekürzt: 13, 2; 4, 2)

Oder: 162,5 | 81,25 |
1625 | 812,5 | 0,5 M.

Also muß A das Pfund um 50 + 20 oder 70 Pfg. verkaufen.

3) Ein Händler verkaufte $15^1/_2$ Ctr. Wolle, den Ctr. zu 196 Mk. und gewann im Ganzen 85 Mk. 25 Pfg.; wie hat er den Ctr. eingekauft?

Ich suche, wie viel er am Ctr. gewonnen hat, und ziehe dieß vom Verkaufspreise ab.

$15^1/_2$ Ctr. — $85^1/_4$ Mrk.
1 „ — ?

Oder: 15,5 | 85,25 |
155 | 852,5 | 5,5 Mk.

Verkauf = 196,0 Mrk.
Gewinn = 5,5 „
Ankauf = 190,5 Mrk.

B. Aufgaben mit Procent-Bestimmung.

Mündlich.

§. 275. Der Gewinn oder Verlust procent wird gesucht

a. Aus dem Einkaufspreise und dem Gewinn oder Verlust.

Beisp. 1. A kauft das Meter zu 1 Mrk. 50 Pfg. und verkauft es wieder mit 30 Pfg. Gewinn; wie viel proc. gewinnt er?

Aufl. Berechnet soll werden, wie viel procent, d. h. wie viel am Hundert gewonnen wird, und gegeben ist, wie viel der Gewinn von 1 Mrk. 50 Pfg. beträgt. Die Zahl 1 Mrk. 50 Pfg. ist eine zweifach benannte; sie besteht in Mark und Pfennigen. Die Frage: wie viel mit 100? kann daher genommen werden: wie viel mit 100 Mark? und auch: wie viel mit 100 Pfennig? Um zu finden, wie viel mit 100 Pfg. gewonnen wird, so muß ich 1 Mrk. 50 Pfg. zu Pfennig machen. Um aber zu finden, wie viel B mit 100 Mrk. gewinnt, so muß man die 1 Mark 50 Pfg., sowie die 30 Pfg. Gewinn in Mark verwandeln.

a. 1 Mrk. 50 Pfg. = 150 Pfg. Mit 150 Pfg. gewinnt B 30 Pfg., wie viel mit 100 Pfg. Das läßt sich auf verschiedene Weise berechnen.

α. Man schließt von 150 Pfg. auf 50 Pfg. und von 50 Pfg. auf 100 Pfg. Gewinnt B mit 150 Pfg. 30 Pfg., so gewinnt er mit 50 Pfg. $^1/_3$ von 30 = 10 Pfg. und mit 100 Pfg. 2 × 10 oder 20 Pfg. Er gewinnt also 20%.

β. Man sucht, wie sich der Gewinn zum Einkaufspreis verhält. 30 Pfg. bilden $^1/_5$ von 150 Pfg. Gewinnt B mit 150 Pfg. $^1/_5$ von 150 Pfg., so gewinnt er mit 100 Pfg. $^1/_5$ von 100 Pfg.; $^1/_5$ von 100 Pfg. = 20 Pfg. = 20%.

b. 1 Mrk. 50 Pfg. = $1^1/_2$ Mark, und 30 Pfg. = $^3/_{10}$ Mrk. Nun heißt es: Mit $1^1/_2$ Mark gewinnt man $^3/_{10}$ Mrk.; wie viel mit 100 Mark?

Die Berechnung kann wieder auf zweierlei Weise ausgeführt werden.

Beisp. 2. B muß das Kilo einer Waare, das ihn 3 Mk. 75 Pfg. kostete, mit 50 Pfg. Schaden verkaufen; wie viel proc. beträgt sein Verlust?

a. An 3 Mk. 75 Pfg. oder 375 Pfg. verliert B 50 Pfg.; wie viel an 100 Pfg.?
α. Verliert B an 375 Pfg. 50 Pfg., so verliert er an 25 Pfg. $^1/_{15}$ von 50 Pfg. = $3^1/_3$ Pfg. und an 100 Pfg. 4×$3^1/_3$ od. $13^1/_3$ Pfg. = $13^1/_3$ %.
β. 375 = 15 × 25, und 50 = 2 × 25. Der Verlust beträgt also überhaupt $^2/_{15}$ vom Einkaufspreise, von 100 also $^2/_{15}$ × 100 = $13^1/_3$.
b. An 3 Mk. 75 Pfg. oder $3^3/_4$ Mrk. verliert B $^1/_2$ Mk.; wie viel an 100 Mk.? Auch dieß läßt sich wieder auf zweierlei Weise rechnen.

b. Aus dem Einkaufs- und Verkaufspreise.

Beisp. 1. Den Obsthändler A kommt das Pfund Kirschen auf 12 Pfg.; wie viel proc. gewinnt (oder verliert) er, wenn er es um 13 (10, 15, 8, 18, 6, 24) Pfg. wieder verkauft?

Ausr. Wenn A das Pfund um 12 Pfg. einkauft und um 13 Pfg. verkauft, so gewinnt er mit 12 Pfg. 1 Pfg., also $^1/_{12}$ vom Ganzen; folglich gewinnt er an 100 Pfg. $^1/_{12}$ von 100 Pfg. oder $8^1/_3$ Pfg., d. i. $8^1/_3$ %. — Verkauft er das Pfd. um 10 Pfg., so verliert er an 12 Pfg. 2 Pfg., also $^1/_6$ von 12 Pfg.; folglich verliert er an 100 Pfg. $^1/_6$ von 100 Pfg. oder $16^2/_3$ Pfg., d. i. $16^2/_3$ %. So fort.

Beispiel 2. Ein Händler kauft das Hektoliter um 3 Mrk.; wie viel procent gewinnt (oder verliert) er, wenn er dasselbe um $3^1/_2$ ($2^3/_4$, $3^3/_4$, $2^2/_5$) Mark wieder verkauft?

Ausr. Wenn der Händler das Hektoliter um 3 Mk. einkauft und um $3^1/_2$ Mk. verkauft, so gewinnt er mit 3 Mk. $^1/_2$ Mk., mit 1 Mk. $^1/_6$ Mk. und mit 100 Mk. $100 \times {}^1/_6 = {}^{100}/_6$ oder $16^2/_3$ Mk., mithin $16^2/_3$ %. Oder: Da er mit 3 Mk. $^1/_2$ Mk., also $^1/_6$ von 1 Mk. gewinnt, so gewinnt er mit 100 auch $^1/_6$ von $100 = 16^2/_3$. — Verkauft er das Hektoliter um $2^3/_4$ Mk., so verliert er an 3 Mk. $^1/_4$ Mk., an 1 Mk. $^1/_{12}$ Mk. und an 100 Mk. $100 \times {}^1/_{12} = {}^{100}/_{12}$ oder $8^1/_3$ Mk., also $8^1/_3$ %. Oder?

Beisp. 3. A kauft 36 Meter um 126 Mrk. und verkauft das Meter um 4 Mark; wie viel beträgt sein Gewinn oder Verlust proc.?

a. Ich suche zuerst, was A **an dem Meter** gewinnt oder verliert. Das kann ich finden, wenn ich weiß, wie A das Meter einkauft und wieder verkauft. 36 Meter kosten ihn 126 Mark. 1 Meter kostet $^1/_{36}$ davon; $^1/_6$ von 126 M. = 21 Mrk., und $^1/_6$ von 21 Mrk. = 3 Mrk. 50 Pfg. Das Meter kostet ihn also 3 Mrk. 50 Pfg. Sein Erlös dafür beträgt 4 Mrk.; demnach gewinnt er an dem Meter 50 Pfg. Womit gewinnt denn aber A die 50 Pfg.: mit den 3 M. 50 Pfg. oder mit den 4 Mrk.? Antwort: Mit dem Gelde, das er für das Meter gezahlt hat, also mit 3 Mrk. 50 Pfg. Die Aufgabe ist nun: Mit 3 Mrk. 50 Pfg. gewinnt A 50 Pfg.; wie viel proc.? 50 Pfg. sind $^1/_7$ von 3 Mrk. 50 Pfg.; also gewinnt er auch mit 100 $^1/_7$ von 100, d. i. $14^2/_7 = 14^2/_7$ %. Oder:

b. Ich suche, wie viel er mit den **36 Metern** gewinnt. In diesem Falle muß ich wissen, was ihn die 36^m gekostet haben, und was er dafür löst. Gekostet haben sie ihn 126 Mrk. Sein Erlös dafür ist 36×4 oder 144 Mrk. Sein Gewinn an den 36 Metern beträgt also überhaupt 144 M. — 126 M. = 18 M. Diese gewinnt er mit 126 Mrk. Nun suchen wir den Gewinn proc. Da der Weg von 126 auf 100 nicht bequem ist, so untersuchen wir, was für ein Theil die 18 M. von den 126 Mrk. sind. 18 Mrk. sind in 126 Mrk. so oft enthalten, als die Hälfte von 18 Mrk. in der Hälfte von 126 Mrk., d. i. so oft als 9 Mrk. in 63 Mrk., nämlich 7mal. Also sind 18 Mrk. $^1/_7$ von 126 Mrk.; folglich gewinnt A mit 100 Mrk. $^1/_7$ von 100 Mrk. $= 14^2/_7$ Mrk.

c. Aus dem Verkaufspreis und dem Gewinn oder Verlust.

Beisp. 1. A verkauft den Ctr. Heu mit 90 Pfg. Mehrerlös um 2 Mrk. 40 Pfg; wie viel macht der Gewinn procent?

Aufl. Wenn ich den Gewinn proc. berechnen will, so muß ich den Einkaufspreis und den Gewinn kennen. Der Gewinn ist bekannt; er ist = 90 Pfg.; der Einkaufspreis aber beträgt 2 Mrk. 40 Pfg. — 90 Pfg., d. i. 1 Mrk. 50 Pfg. Mit 1 Mrk. 50 Pfg. werden also 90 Pfg., d. i. $^3/_5$ von 1 Mrk. 50 Pfg. gewonnen. Folglich beträgt der Gewinn am Hundert $^3/_5$ von 100 oder 60. A gewinnt also 60 %.

Beisp. 2. Eine Quantität Kaffee wird mit 56 Thlr. Verlust um 344 Thlr. verkauft; wie viel proc. werden verloren?

Aufl. Bevor ich berechnen kann, wie viel der Verlust vom Hundert macht, muß ich die Summe kennen, an welcher die 56 Thaler verloren werden. Woran werden nun denn aber diese verloren? (An der Summe, welche die Waare im Einkauf kostete.) Und wie findest du diese? Da die Waare mit 56 Thlr. Verlust verkauft wird, so ist sie um 56 Thlr. höher eingekauft worden, als der Erlös dafür ist. Der Ankauf betrug daher 344 + 56 oder 400 Thlr. An diesen 400 Thalern also werden die 56 Thlr. verloren. Mithin beträgt der Verlust von 100 Thlrn. $^1/_4$ von 56 Thlr., nämlich 14 Thlr.

§. 276. Aus dem Einkaufspreise und dem Gewinn oder Verlust procent wird gesucht:

a. Der Gewinn oder Verlust.

Beisp. 1. Ein Landmann kaufte eine Wiese um 820 Mrk. und verkauft sie wieder mit 15% Gewinn; wie viel beträgt sein Mehrerlös?

Aufl. Zu berechnen ist, wie viel der Mehrerlös oder der Gewinn von 820 Mark beträgt. Der Ausdruck „15 proc." zeigt an, wie viel derselbe von 100 Mark macht. Von 100 Mark macht der Gewinn 15 Mrk.; von 820 oder $8\frac{1}{5}$ Hundert macht er $8\frac{1}{5} \times 15$ oder 123 Mark.

Beisp. 2. A verkauft ein Haus, das ihn 1500 Thlr. gekostet, mit $7\frac{1}{2}$ procent Verlust; wie viel beträgt der Mindererlös?

Aufl. Gesucht soll werden, was der Mindererlös oder Verlust von 1500 Thlr. beträgt; der Ausdruck „$7\frac{1}{2}$ proc." sagt uns, wie viel derselbe von 100 Thlr. macht. Von 100 Thlr. macht der Verlust $7\frac{1}{2}$ Thlr,; mithin beträgt er von 1500 Thlr. $15 \times 7\frac{1}{2}$ oder $112\frac{1}{2}$ Thlr.

b. Der Verkaufspreis.

Beisp. 1. B kauft das Hektoliter Linsen um 12 Mrk. 50 Pfg.; wie muß er das Liter verkaufen, um 20% zu gewinnen.

Aufl. Ich suche zuerst, wie B das Hektoliter verkaufen muß, um 20% zu gewinnen. 20% gewinnen, heißt $\frac{1}{5}$ gewinnen. $\frac{1}{5}$ von 12 Mrk. 50 Pfg. = 2 Mrk. 50 Pfg. Er muß also das Hektoliter um 12 M. 50 Pfg + 2 Mrk. 50 Pfg. = 15 Mark, das Liter also um den 100. Theil von 15 Mrk. d. i. um 15 Pfg. verkaufen.

Beisp. 2. Wie theuer hat C das Kilo, das ihn selbst 3 Mk. 20 Pfg. gekostet hat, wieder verkauft, da er 25% dabei verlor?

Aufl. 3 Mk. 20 Pfg. = 320 Pfg.; an 100 Pfg. verlor C 25 Pfg., an 320 Pfg. also $3\frac{1}{5} \times 25 = 80$ Pfg.; folglich hat er das Kilo nur um $320 - 80 = 240$ Pfg. oder 2 Mk. 40 Pfg. wieder verkauft. — Oder: C verlor 25%, er hat also für 100 Pfg., die er ausgegeben, nur 75 Pfg. im Verkaufe wieder eingenommen; mithin bekam er für 320 Pfg. nur $3\frac{1}{5} \times 75$ oder 240 Pfg. = 2 Mk. 40 Pfg. — Oder: Wer 25% verliert, der verliert genau $\frac{1}{4}$ von dem Einkaufspreise; C verlor also $\frac{1}{4}$ von 3 Mk. 20 Pfg., nämlich 80 Pfg.; mithin gab er das Kilo um 3 Mk. 20 Pfg. — 80 Pfg., d. i. um 2 Mk. 40 Pfg. — Oder: Verlor C $\frac{1}{4}$, so betrug sein Erlös $\frac{3}{4}$, nämlich $\frac{3}{4}$ von 3 Mk. 20 Pfg. = 3×80 oder 240 Pfg. = 2 Mk. 40 Pfg.

Schriftlich.

§. 277.

1) Ein Kaufmann bezieht 75 Meter Tuch à 5 Mrk. 95 Pfg.; die Fracht macht 3 Mrk. 75 Pfg.; wie viel proc. gewinnt er, wenn er das Meter um 7 Mrk. 20 Pfg. verkauft?

Ausr. Zuerst suche ich die Auslage und den Erlös für eine und dieselbe Quantität, hier für die 75 Meter; dann suche ich den Gewinn im Ganzen und zuletzt den Gewinn procent.

a. Auslage.	b. Erlös.
75 × 5,95 Mrk. = 446,25 Mrk.	75 × 7,2 Mrk. = 540 Mrk.
+ 3,75 Mrk.	— 450
450 Mrk.	c. Gewinn = 90 Mrk.

d. Gewinn procent.

450 Mrk.	90 Mrk.	450 : 100 = 90 : x
100 „	?	x = 20%

Beisp. 2. A verkauft den Ctr. Waare um 154 Mrk. und verliert dabei 18 Mrk.; wie viel proc. also?

Ausr. Ehe ich den Verlust vom Hundert berechnen kann, muß ich erst die Summe kennen, an welcher die 18 Mrk. verloren werden. Dieselbe beträgt 18 Mrk. mehr als 154 Mrk.

Verkauf = 154 Mrk.
Verlust = 18 Mrk.
Einkauf = 172 Mrk.

172 Mrk.	18 Mrk. Verl.	172 : 100 = 18 : x
100 „	?	$x = 10^{20}/_{43}\%$

Beisp. 3. Fünf Aktien einer Baumollenspinnerei werden per Stück zu 187 Mk. gekauft und später mit $16^3/_4$ proc. Gewinn wieder abgegeben; wie viel wurde gewonnen? Antwort: 156 Mk. 61 Pfg.

Ausr. Ich suche zuerst, was die 5 Aktien gekostet haben. Die Auslage dafür betrug 5 × 187 Mrk. = 935 Mrk.

Nun suche ich, wie viel damit gewonnen wird. Die Aufgabe heißt: Mit 100 Mrk. werden $16^3/_4$ Mk. gewonnen; wie viel mit 935 Mrk.?

100 Mrk. Ekf.	$16^3/_4$ Mk. Vkf.	Oder: $\frac{9^7/_{20} \times 16^3/_4}{^{187}/_{20} \times ^{67}/_4} = \frac{12529}{80}$
935 „	?	

Beisp. 4. Wie ist das Pfund zu verkaufen, wenn $3^3/_8$ Ctr. 175 Mrk. kosten und 24% gewonnen werden sollen? ($64^8/_{27}$ Pfg.)

Ausr. Zuerst suche ich, wie die $3^3/_8$ Ctr. zu verkaufen sind, damit 24% gewonnen werden.

100 Mrk.	124 Mrk.	100 : 124 = 175 Mrk. : x
175 „	?	x = 217 Mrk.

Nun berechne ich den Verkaufspreis von 1 Pfunde.

$3^3/_8$ Ctr.	217 Mrk.	Oder: 337,5	217,0	
1 Pfd.	?	3375	2170,0	0,64.. Mk.

Oder man sucht zuerst den Einkaufspreis von 1 Pfd. und dann im Anschlusse hieran den Verkaufspreis. So geht es in einem Ansatze.

$3^3/_8$ Ctr.	175 Mk.
1 Pfd.	?

$$\frac{175 \,.\, 8 \,.\, 124}{27 \,.\, 100 \,.\, 100} = 0{,}64 \,.\,.\ \text{Mrk.}$$

Der Einkaufspreis von 1 Pfd. = 175 . 8 Mk., getheilt durch 27 . 100. Um 24% zu gewinnen, so muß dieselbe Quantität Waare, welche für

100 Mrk. gekauft wurde, um 100 + 24, d. i. um 124 Mrk. verkauft werden. So oft daher 100 Mrk. im Einkaufspreis enthalten sind, so vielmal 124 Mrk. muß der Verkaufspreis betragen.

---

§. 278. Die übrigen Fälle.

Das Bisherige kann und soll in jeder Schule durchgenommen werden. Von dem Folgenden wird nur unter Umständen Gebrauch gemacht. Während bisher das Gesuchte fast ohne Weiteres aus dem Gegebenen abgeleitet werden konnte, ist in den nachstehenden Fällen das Verhältniß des Einen zum Andern aus der Zahl der Procente erst zu bestimmen.

a. Der Gewinn oder Verlust wird gesucht.

Beisp. 1. Man verkauft eine Waare für 240 Mrk. und gewinnt 20% dabei; wie viel Mark beträgt der Gewinn?

Aufl. Die 240 Mrk. sind der Erlös. Mit den 240 Mrk. wird daher bei diesem Geschäfte nichts mehr gewonnen, sondern der Gewinn ist in dieser Summe schon enthalten. Unsere Aufgabe besteht darin, ihn davon auszuscheiden. Um dieß thun zu können, so müssen wir wissen, in welchem Verhältnisse der Gewinn zum Erlöse steht. Der Gewinn beträgt 20%. Mit 100 werden 20 gewonnen. Was man um 100 eingekauft hat, das wird um 100 + 20 oder 120 wieder verkauft. Unter dem Erlöse von 120 Mrk. befinden sich also 20 Mrk. Gewinn. Der Gewinn verhält sich daher zum Erlöse, wie 20 : 120 oder wie 1 : 6; er beträgt $^1/_6$ von demselben. Und da der Erlös = 240 Mrk., so beträgt der Gewinn $^1/_6$ von 240 Mrk. oder 40 Mrk.

120 : 20 = 240 Mrk. : x

Oder: So vielmal 120 Mrk. der Erlös beträgt, so vielmal 20 Mrk. beträgt der Gewinn. Und da der ganze Erlös = 240 Mrk., so beträgt der Gewinn so vielmal 20 Mrk., als 120 Mrk. in 240 Mrk. enthalten sind.

120 : 240 = 20 Mrk. : x

Beisp. 2. Ein Faß Wein wird für 350 Thlr. mit 30% Verlust verkauft; wie viel Thaler beträgt dieser?

Aufl. Die 350 Thlr. sind der Erlös. Sie fließen ungeschmälert in die Kasse des Verkäufers. An dieser Summe wird daher bei diesem Geschäfte nichts mehr verloren. Folglich ist der Verlust auch nicht aus den 350 Thlrn. zu berechnen. Verloren wird an dem Gelde, das für den Wein bei seinem Einkaufe ausgegeben worden ist. Der Verlust beträgt 30%. An derselben Quantität Wein, wofür beim Einkaufe 100 Thlr. bezahlt worden sind, werden bei dem Verkaufe 30 Thlr. verloren, also nur 100—30, d. i. 70 Thlr. erlöst. Der Verlust verhält sich daher zum Einkaufspreise, wie 30 : 100 oder wie 3 : 10, und zum Erlöse, wie 30 : 70 oder wie 3 : 7. Der Verlust hat 3 Theile, wie der Erlös 7 Theile hat. Und da dieser 350 Thlr. beträgt, so heißt es nun: 7 Theile = 350 Thlr.; was machen 3 Theile?

70 : 30 = 350 Thlr. : x

Oder: So oft 70 Thlr. Erlös in 350 Thlr. enthalten sind, so vielmal 30 Thlr. beträgt der Verlust.

70 : 350 = 30 Thlr. : x

Oder: Verliert man 30%, so verliert man $^3/_{10}$ des Einkaufspreises; also löst man $^7/_{10}$ desselben. Diese betragen 350 Thlr. Es heißt nun: $^7/_{10}$ machen 350 Thlr., was machen $^3/_{10}$? (150 Thlr.)

b. Der Verkaufspreis wird gesucht.

Beisp. 1. A gewinnt an dem Meter 42 Pfg. oder 15%; wie theuer verkauft er dasselbe?

Aufl. Die Aufgabe verlangt, daß wir den Erlös berechnen, und sagt uns, wie viel der Gewinn beträgt. Wir können aus dem Gewinn den Erlös ableiten, sobald wir wissen, in welchem Verhältniß Gewinn und Erlös zu einander stehen. A gewinnt 15%. Er gewinnt also 15 von 100; was er um 100 eingekauft hat, das verkauft er um 100 + 15 oder 115 wieder. Der Gewinn verhält sich also zum Erlöse, wie 15 : 115 oder wie 3 : 23. Der Gewinn hat 3 Theile, wie der Erlös 23 Theile hat. Und da der Gewinn = 42 Pfg., so heißt es nun: 3 Theile machen 42 Pfg., was machen 23 Theile? (3,22 Mrk.)

15 : 115 = 42 Pfg. : x

Beispiel 2. B verliert am Ctr. 16 Mrk. oder 8%; wie verkauft er denselben?

Aufl. Hier ist der Erlös aus dem Verluste zu berechnen. Zunächst bestimmen wir wieder das Verhältniß des Einen zum Andern. B verliert 8%. Was er um 100 eingekauft hat, muß er um 100 — 8, d. i. um 92 wieder abgeben. Der Verlust (= 8) verhält sich daher zum Erlöse (= 92) wie 8 : 92 oder wie 2 : 23. Der Verlust hat 2 Theile, wie der Erlös 23 hat. Und da der Verlust = 16 Mrk., so heißt nun die Aufgabe: 2 Theile = 16 Mrk., was betragen 23 Theile? (184 Mrk.)

8 : 92 = 16 Mrk. : x

Oder: Verliert B 8%, so beträgt sein Verlust $^{2}/_{25}$ des Einkaufspreises, sein Erlös also $^{23}/_{25}$ desselben. Die $^{2}/_{25}$ betragen 16 Mrk. Die Aufgabe heißt nun: $^{2}/_{25}$ = 16 Mrk.; was machen $^{23}/_{25}$?

c. Der Einkaufspreis wird gesucht.

Beispiel 1. Ein Wirth gewinnt an dem Hektoliter Wein 8 Mrk. 75 Pfg. oder 28%; wie theuer hat er ihn eingekauft?

Aufl. Die Aufgabe verlangt, daß wir aus dem Gewinn den Einkaufspreis bestimmen. Der Gewinn beträgt 28 von 100. Er verhält sich daher zum Einkaufspreis, wie 28 : 100 oder wie 7 : 25, d. h. der Gewinn hat 7 Theile, wie der Einkaufspreis 25 Theile hat. Die Aufgabe ist nun also: 7 Th. = 8 Mrk. 75 Pfg., wie viel machen 25 Theile? Antwort: 31 M. 25 Pfg.

28 : 100 = 8,75 M. : x

Beispiel 2. An einer Actie wurden 12½% oder 45 Mrk. verloren; wie viel hatte sie im Ankaufe gekostet?

Aufl. Hier ist der Einkaufspreis aus dem Verluste zu berechnen. Der Verlust beträgt 12½ von 100. Er verhält sich daher zum Ankaufspreis, wie 12½ zu 100 oder wie 1 : 8, d. h. der Verlust ist 1 Theil, wie der Ankaufspreis 8 Th. hat. Und da der Verlust 45 Mk. beträgt, so beträgt der Ankaufspreis 8 × 45 oder 360 Mrk.

12½ : 100 = 45 Mrk. : x.

Beispiel 3. Ein Roßhändler verkauft ein Pferd um 385 M. und gewinnt dabei 40%; wie viel hat es ihn gekostet?

Aufl. Die Aufgabe bezeichnet den Erlös und verlangt, daß wir den Ankaufspreis berechnen. Wir müssen daher zunächst suchen, in welchem Verhältniß der Ankaufspreis und Verkaufspreis zu einander stehen. Der Gewinn = 40%. Also machen 100 M. Ankauf 140 M. Verkauf. Der Ankaufspreis verhält sich sonach zu dem Verkaufspreise, wie 100 : 140 oder wie 5 : 7, d. h. der Ankaufspreis hat 5 Theile, wie der Verkaufspreis 7 Theile hat. Und da der Verkaufspreis = 385 M., so heißt es nun: 7 Theile = 385 M., was machen 5 Th.?

140 : 100 = 385 M. : x.

Beisp. 4. Es hatte Jemand zu einem Unternehmen, wobei ein Verlust von $16\frac{2}{3}$ proc. erlitten wurde, eine Summe Geldes beigeschossen; nach 1 Jahre zog er sein Kapital wieder zurück und bekam 5400 Mrk. Wie groß war seine Einlage?

Aufl. Die Aufgabe verlangt, daß wir aus der Summe, die er zurückerhielt, die Summe bestimmen, die er einlegte. Wie verhalten sich nun aber beide Summen zu einander? Am Hundert werden $16\frac{2}{3}$ verloren. Für jedes Hundert, das er eingelegt, erhielt er nun $100 - 16\frac{2}{3}$, d. i. $83\frac{1}{3}$ zurück. Die Einlage verhält sich daher zur Rückzahlung, wie $100 : 83\frac{1}{3}$ oder wie $\frac{300}{3} : \frac{250}{3}$ oder wie 300 zu 250 oder wie 6 : 5, d. h. die Einlage hat 6 Theile, wie die zurückerhaltene Summe 5. Und da diese = 5400 Mrk., so ist nun die Aufgabe: 5 Theile betragen 5400 Mrk.; wie viel betragen 6 Theile?

$$83\tfrac{1}{3} : 100 = 5400 \text{ Mrk.} : x$$

Oder: So vielmal $83\frac{1}{3}$ Mrk. zurückgezahlt wurden, so vielmal 100 Mrk. wurden eingelegt.

$$83\tfrac{1}{3} : 5400 = 100 \text{ Mrk.} : x$$

Oder: Der Verlust beträgt $16\frac{2}{3}\%$ oder $\frac{1}{6}$ der Einlage; mithin betrug die zurückerhaltene Summe $\frac{5}{6}$ derselben. Die Aufgabe heißt also: $\frac{5}{6}$ der Einlage = 5400 Mrk.; wie viel beträgt die ganze Einlage? (6480 Mrk.)

d. Der Gewinnprocent pro anno wird gesucht.

1) Ein Geschäft, das mit 1200 Mrk. betrieben wurde, warf in $2\frac{1}{2}$ Jahren 800 Mrk. reinen Nutzen ab; wie viel proc. pr. a.?

Ausr. Berechnet soll werden, welchen Nutzen 100 Mrk. in 1 Jahre abwarfen; gegeben ist, welchen Nutzen 1200 Mrk. in $2\frac{1}{2}$ Jahren abwarfen; 1200 Mrk. warfen in $2\frac{1}{2}$ J. 800 Mrk., in $\frac{1}{2}$ Jahre 160 Mrk. und in 1 Jahre 320 Mrk. ab. Auf 100 Mrk. kommt in dieser Zeit $\frac{1}{12}$ von 320 Mrk., d. i. $26\frac{2}{3}$ Mrk. Der Nutzen proc. pr. a. ist also $26\frac{2}{3}$.

2) Ein Gastwirth kauft das Hektoliter Wein zu 45 Mrk. und schenkt denselben, das Liter zu 60 Pfg., in 4 Wochen aus; wie viel beträgt sein Gewinn proc. pr. a.?

Ist so zu nehmen: Der Gastwirth nimmt 45 Mrk. seines Geldes und kauft dafür 1 Hl Wein. Den schenkt er in 4 Wch. aus, und da er das Liter um 60 Pfg. gibt, so löst er 100×60 Pfg. oder 60 Mrk. Nun nimmt er 45 Mrk. von diesen 60 Mrk. und kauft sich wieder 1 Hl. Das schenkt er abermals in 4 Wch. aus, löst dafür wieder 60 Mrk. u. s. f. Da nun 52 Wch. = 13×4 Wch., so thut er es im Jahre 13mal. So oft er es aber thut, so oft gewinnt er 60 Mrk. — 45 Mrk. d. i. 15 Mrk. Also gewinnt er und zwar mit einen und denselben 45 Mrk. seines Geldes im Jahre 13×15 Mrk. = 195 Mrk. Das ist der Gewinn pro anno von 45 Mrk. Von 100 Mrk. beträgt derselbe $433\frac{1}{3}$. M. Der Gewinn proc. pr. a. ist sonach $433\frac{1}{3}$.

Oder: Der Gastwirth gewinnt mit 45 M. in 4 Wochen 100×60 Pfg. — 45 M. = 15 M., mit 100 M. in dieser Zeit $33\frac{1}{3}$ Mrk., und mit 100 Mrk. in 52 oder 13×4 Wch. $13 \times 33\frac{1}{3}$ Mrk. = $433\frac{1}{3}$ Mrk.

3) Wie viel proc. pr. a. werden gewonnen, wenn man eine Waare mit 48 M. bezahlt und nach 4 Mon. für 60 M. verkauft? Antwort: 75 proc.

4) A und B kaufen das Hektoliter Wein zu 37,50 Mrk. A gibt dasselbe wieder zu 50 Mark, B zu 56 Mark. Jener verkauft das Jahr hindurch 200 Hl, dieser 75 Hl. a. Wie viel nimmt jeder an dem Hl Gewinn? Wie viel B mehr als A? b. Wie viel nimmt jeder Procent? Wie viel B mehr als A? c. Wie viel gewinnt jeder pro annno?

Antwort: a. A nimmt am Hl 12,5 Mrk., B 18,5 Mrk. Gewinn, B also 6 Mrk. mehr als A. b. A gewinnt $33^1/_3$ %, B $47^1/_3$ %; B gewinnt also 14 % mehr als A. c. A gewinnt pro anno 2500 Mrk., B 1387,5 Mrk.

5) Zwei Kaufleute, A und B, bekommen das Meter Tuch zu 6,25 Mrk. A begnügt sich mit 12 % Gewinn, B nimmt 20 %. Dagegen verkauft A in 5 Monat eben so viel als B in $1^1/_2$ Jahre. a. Um wie viel baares Geld gibt A das Meter billiger als B? b. Wie viel beträgt eines Jeden Gewinn Procent pro anno?

Antw. a. B gibt das Meter um 7,5 Mrk., A um 7 Mrk., mithin um 50 Pfg. wohlfeiler als B. b. Der Gewinn Procent pro anno beträgt bei A $28^4/_5$, bei B $13^1/_3$.

Was folgt hieraus? Derjenige wird auf die Dauer die besten Geschäfte machen, welcher gute Waare führt und sich im Einzelnverkaufe mit einem mäßigen Gewinn begnüget.

Noch einige besondere Aufgaben.

1) A verkauft den Centner Weizen zu 12 Mrk. und gewinnt dabei 20 %; später verkauft er denselben mit 30 % Gewinn; wie theuer also?

Aufl. Wir suchen zunächst, wie sich der erstere Verkaufspreis zu dem späteren verhält. Zuerst verkaufte A mit 20 % Gewinn; was ihn 100 Mrk. kostete, dafür löste er 120 Mrk. Später verkaufte er mit 30 % Gewinn; was ihn also 100 Mrk. kostete, dafür löste er jetzt 130 Mrk. Der erstere Verkaufspreis verhält sich daher zum späteren, wie 120 : 130 oder wie 12 : 13. Da er den Centner zuerst um 12 Mrk. verkauft hat, so heißt es: 12 Theile betragen 12 Mrk.; wie viel betragen 13 Theile? (13 Mark.)

$$120 : 130 = 12 \text{ Mrk.} : x$$

2) B verkaufte den Ctr. Hopfen zu 120 M. und gewann 25 % dabei. Später mußte er mit 20 % Verlust abgeben; wie verkaufte er jetzt den Ctr.?

Aufl. Zuerst verkaufte B mit 25 % Gewinn; 100 M. Einkauf machten also 125 M. Verkauf. Dann verkaufte er mit 20 % Verlust; 100 M. Einkauf machten jetzt also nur 80 M. Verkauf. Der erstere Verkaufspreis verhält sich daher zu dem späteren wie 125 : 80 oder wie 25 : 16. Jener hat 25 Theile, wie dieser 16. Und da B zuerst 120 M. löste, so heißt es: 25 Theile machen 120 M.; was machen 16 Theile? (76 M. 80 Pfg.)

$$125 : 80 = 120 \text{ M.} : x.$$

3) Ein Kleinhändler erhält für 1 Pfg. 3 Stück Nähnadeln, gibt aber für 1 Pfg. nur 2 Stück; wie viel Proc. nimmt er Gewinn?

Aufl. Er löst aus 2 Nadeln 1 Pfg., aus 1 Nadel $^1/_2$ Pfg. und aus 3 Nadeln 3 $\times$ $^1/_2$ Pfg. = $1^1/_2$ Pfg. Was er für 1 Pfg. gekauft, das verkauft er wieder für $1^1/_2$ Pfg.; er gewinnt daher mit 1 Pfg. $^1/_2$ Pfg., mit 100 Pfg. also 100mal $^1/_2$ Pfg. = 50 Pfg.

4) Derselbe erhält ferner für 1 Mrk. 18^m Band; wie viel wird man für das gleiche Geld von ihm bekommen, da er diese Waare mit $33\frac{1}{3}$ % Gewinn verkauft.

Aufl. $33\frac{1}{3}$ % gewinnen, heißt: den 3. Theil vom Einkaufspreis gewinnen. Unser Kaufmann gibt daher die 18^m, die ihn 1 Mrk. gekostet haben, nur um $1 + \frac{1}{3}$ Mrk. wieder ab. Erhält man aber für $1\frac{1}{3}$ ($= \frac{4}{3}$) Mrk. 18^m, so bekommt man für $\frac{1}{3}$ Mrk. den 4. Theil von $18^m = 4\frac{1}{2}^m$; mithin für 1 Mrk. 3mal $4\frac{1}{2}^m = 13\frac{1}{2}^m$.

Zinsrechnung.

§. 279. Vorbemerkung.

Es besitzt Jemand, den wir A nennen, eine Summe Geldes; er ist aber nicht in der Lage, dieselbe mit Nutzen zu verwenden. B dagegen, ein Andrer, könnte sich mit einer gleichen Summe durch den Ankauf eines Grundstückes oder gewisser Waaren einen bedeutenden Vortheil verschaffen, wenn er sie hätte. Was thun daher beide? A leiht sein Geld dem B, unter der Voraussetzung, daß es ihm seiner Zeit wieder zurück erstattet werde, und B zahlt ihm dafür jährlich eine bestimmte Vergütung. So wird das Geld dem Einen wie dem Andern nützlich. — Bei derartigen Geldgeschäften sind nun aber besondere Benennungen gebräuchlich. Wer Geld ausleiht, wird Gläubiger, Kreditor genannt. Wer Geld entlehnt, heißt Schuldner, Debitor. Die verliehene Geldsumme heißt Kapital. Die Vergütung, welche der Schuldner dem Gläubiger zahlt, heißt Zins. Der Betrag des Zinses wird pro cento, d. i. vom oder für das Hundert festgesetzt. Der Zinsprocent, auch Zinsfuß geuannt, bestimmt den Zins von 100 gewöhnlich auf 1 Jahr. Der Ausdruck „von 100“ ist unbenannt; man muß sich aber immer dieselbe Geldsorte dazu denken, in welcher das Kapital besteht. 4 procent kann also heißen:

von je 100 Mark Kapital jährlich 4 Mark Zins,
von je 100 Gulden Kapital jährlich 4 Gulden Zins,
von je 100 Thalern Kapital jährlich 4 Thaler Zins,
von je 100 Groschen Kapital jährlich 4 Gr. Zins u. s. w.

Die Ausleihung von Kapitalien und die Entrichtung der Zinsen hiefür, die Höhe des Zinsfußes und die verschiedene Zeitdauer, während welcher ein Kapital ausstehen kann, gibt im bürgerlichen Leben Veranlassung zu vielen und verschiedenen Rechnungen, die man mit dem allgemeinen Namen Zinsrechnung belegt. Die Stücke, die dabei in Betracht kommen, sind: Kapital, Zins, Zinsfuß und Zeit. Jedes dieser 4 Stücke kann gesucht werden und von jedem der übrigen 3 abhängig sein.

Es kann nämlich abhängig sein

1) der Zins: a. vom Kapital, b. vom Zinsfuß, c. von der Zeit;
2) das Kapital: a. vom Zins, b. vom Zinsfuß, c. von der Zeit;

3) der **Zinsfuß**: a. vom Kapital, b. vom Zins, c. von der Zeit;
4) die **Zeit**: a. vom Kapital, b. vom Zins, c. vom Zinsfuß.

Dieß gibt 4 × 3 oder 12 verschiedene Arten von Aufgaben mit **einfachen** Verhältnissen, **einfache** Regeldetri-Aufgaben.

Das in Frage gestellte Stück kann aber auch von **zwei** der übrigen Stücke abhängig sein, und zwar:

1) der **Zins**: a. von Kapital und Zeit, b. von Kapital und Zinsfuß, c. von Zinsfuß und Zeit;
2) das **Kapital**: a. von Zins und Zinsfuß, b. von Zinsfuß und Zeit, c. von Zins und Zeit:
3) der **Zinsfuß**: a. von Kapital und Zins, b. von Zins und Zeit, c. von Kapital und Zeit;
4) die **Zeit**: a. von Kapital und Zins, b. von Zins und Zinsfuß, c. von Kapital und Zinsfuß;

Hierdurch ergeben sich wieder 4 × 3 oder 12 verschiedene Fälle, und zwar Aufgaben mit **mehrfachen** Verhältnissen, also **zusammengesetzte** Regeldetri-Aufgaben.

Außerdem kann noch zu berechnen sein, a. wie viel das Kapital und der Zins nach einer gewissen Zeit zusammen machen, b. wie viel das Kapital, oder der Zins bei einer aus Kapital und Zins zusammengesetzten Summe beträgt, c. wie viel der Zinsfuß, und d. wie viel die Zeit betragen muß, wenn ein bestimmtes Kapital mit Einschluß der einfachen Zinsen eine gewisse Höhe erreichen soll, und endlich e. wie hoch eine ausgeliehene Summe anwächst, wenn der Jahreszins **alljährlich** zum Kapital geschlagen und **Zins** von **Zins** genommen wird.

Wie viel Bildendes alle die verschiedenen Fälle auch in sich schließen, so wird sich der Unterricht in den allermeisten Schulen doch nur auf diejenigen ausdehnen können, welche gewöhnlich im Leben vorkommen und daher nothwendig behandelt werden müssen. Bei Anordnung des Stoffes ist hierauf Rücksicht genommen. Das Nähere aber wird am gehörigen Orte selbst noch bemerkt werden.

A. Kapital und Zins getrennt.

A. Zinsrechnungen mit einfachen Verhältnissen.

§. 280. Der Zins ist zu berechnen.

1) Wie viel Zins geben 400 Mark jährlich zu 4%?

Ausr. Das Kapital steht zu 4% aus, d. i. 100 M. Kapital geben im Jahre (od. in 12 Mon., od. in 360 Tg.) 4 M. Zins; 400 Mrk. oder 4 × 100 Mrk. geben also in dieser Zeit 4 × 4 = 16 Mark Zins.

2) Wie viel Zins tragen 50 (25, 20, 10) M. Kapital zu $4\frac{1}{2}$ %?

Ausr. 100 M. Kapital geben jährlich $4\frac{1}{2}$ M. Zins; 50 M. geben die Hälfte davon = $2\frac{1}{4}$ M. Zins.

3) Wie viel Zins trifft auf 1 Mrk. Kapital bei 3, 4, 5, 6%?

Wenn 100 M. Kapital 3 M. Zins geben, so gibt 1 M. Kapital $\frac{1}{100}$ von 3 M. = 3 Pfg. Wenn 100 M. Kapital 4 M. Zins geben, so gibt 1 M. Kapital $\frac{1}{100}$ von 4 M. = 4 Pfg. Zins u. s. w.

Die Zahl der Procente ist auch die Zahl der Pfennige, welche 1 Mk. Kapital jährlich abwirft. Bei 3% gibt die Mark jährlich 3 Pfg., bei 4% gibt die Mark jährlich 4 Pfg. Zins ꝛc.

4) Wie viel Zins werfen 45 M. Kapital zu 5% jährlich ab?

100 Mk. Kapital geben jährlich 5 Mk. Zins; 1 Mk. Kapital gibt 5 Pfg. Zins; 45 Mk. Kapital geben 45 × 5 = 225 Pfg. = 2,25 Mark Zins.

5) Wie viel Zins tragen 495 Mk. Kapital zu 6% jährlich?

a. 400 M. Kp. geben 4 × 6 Mrk. =	24	M. Zs.
95 M. Kp. geben 95 × 6 Pfg. =	5,70	M. Zs.
495 M. Kp. geben also	29,70	M. Zs.
b. 500 M. Kp. geben 5 × 6 Mrk. =	30	M. Zs.
5 M. Kp. geben 5 × 6 Pfg. =	0,30	M. Zs.
495 M. Kp. geben also	29,70	M. Zs.

c. Bei 6% gibt 1 Mrk. jährlich 6 Pfg. Zins, also geben 495 Mrk.

495 × 6 Pfg.

= 29,70 Mrk.

6) Wie viel Zins werfen 65 fl. zu 5% jährlich ab?

a. 65 fl. = 50 + 10 + 5 fl., macht (½ + ⅒ + 1/20) × 5 fl. Zins.

b. Bei 5% beträgt der jährliche Zins 1/20 vom Kapital; 1/20 von 1 fl. = 1 Groschen, von 65 fl. also 65 Groschen = 3 fl. 15 kr.

Bei 5% heißt es also: So viel Gulden Kapital, so viel Groschen Zins.

25 fl. Kp. machen 25 Grsch. oder 1 fl. 15 kr. Zins; 77 fl. Kp. machen 77 Grsch. oder 3 fl. 51 kr. Zins; 248 fl. Kp. machen 2 × 5 oder 10 fl. + 2 fl. 24 kr. = 12 fl. 24 kr. Zins.

7) Welchen Zins geben alljährlich 234 fl., die zu 3⅓ proc. in einer Sparkasse angelegt sind?

a. 234 fl. = 200 fl. + 20 + 10 + 4 fl. und geben 2 + ⅕ + ⅒ + 1/25) × 3 fl. 20 kr.

b. Bei 3⅓% beträgt der jährliche Zins 1/30 vom Kapital. Nun rechne ich: 200 fl. Kp. geben 2 × 3 fl. 20 kr. = 6 fl. 40 kr. Zs.; 34 fl. Kp. geben 1/30 von 34 fl. Zins; 1/30 von 1 fl. = 2 kr., von 34 fl. = 34 × 2 kr. = 1 fl. 8 kr.; 6 fl. 40 kr. + 1 fl. 8 kr. = 7 fl. 48 kr.

Bei 3⅓% gibt der Gulden also 2 kr. Zins. So viel Gulden Kapital, so vielmal 2 kr. Zins. 18 fl. Kap. geben 36 kr. Zs.; 57 fl. Kap. geben 1 fl. 54 kr. Zs.; 83 fl. geben (60×2+23×2) = 2 fl. 46 kr. Zins u. s. w. Da dieß der Zinsfuß der meisten Sparkassen ist, so gebe der Lehrer nicht nur Aufgaben, bis sie von *sämmtlichen* Schülern geläufig gerechnet werden; sondern er nehme auch Anlaß, über diese Anstalten selbst und ihren wohlthätigen Zweck das Entsprechende zu bemerken.

8) Welchen Zins geben 100 Mrk. Kapital zu 4% in 5 J.? (in 6, 4, 3, 2, 1 Mon.)

In einem Jahre geben 100 Mrk. K. 4 Mrk. Zs.; in 5 Jahren geben sie 5 × 4 oder 20 Mrk. In 6 Mon. geben 100 Mrk. ½ × 4 oder 2 Mrk. u. s. w.

9) Ein Kap. gibt jährlich 18 Mrk. Zins; wie viel vom 1. Jan. bis 1. Oktbr.?

Ausr. Vom 1. Jan. bis 1. Oktbr. sind 9 M. = 6 + 3 M. In 12 M. macht der Zins 18 Mrk.; in 6 Mon. 9 Mrk. und in 3 Mon. 4 Mrk. 50 Pfg.; in 9 Mon. also 9 Mrk. + 4 Mrk. 50 Pfg. oder 13 Mrk. 50 Pfg. Oder: Man geht von 12 Mon. auf 3 und von 3 auf 9. Oder man geht auf 1 M., und dann auf 9.

Hier lasse man nochmal die Zeiträume bestimmen und dabei jeden Monat zu 30, das Jahr also zu 360 Tg. annehmen. Z. B. Vom 8. März bis 8. Aug. sind 5 Mon., vom 17. Okt. bis 17. Febr. des nächsten Jahres sind 4 Mon, vom 1. April bis 27. April sind 27—1 = 26 Tage. Vom 19. Dec. bis 5. März des folg. Jahres =? (Vom 19. Dec. bis 19. Febr. sind 2 M., und vom 19. Febr. bis 5. März sind 11 + 5 oder 16 Tage, zusammen 2 Mon. 16 Tg. = 76 Tg.) u. s. w.

10) Wie viel Zins geben 855 Mrk. Kapital zu $4^1/_2$ proc.? Antwort: 38 Mrk. 47,5 Pfg.

Durch den Zweisatz.

100 Mrk. K.	$4^1/_2$ Mrk. Zs.
855 Mrk. K.	?
100 Mrk. K. 1 Mrk. 855 Mrk.	$\frac{9 \times 855}{2 \times 100}$

100 Mrk.		$4^1/_2$ Mrk. Zs.
855 Mrk.		?
100 Mrk. K.	2	9 Mrk.
1 Mrk.	100	
855 Mrk.		855

Durch die Proportion.

Je größer das ausgeliehene Kapital ist, desto größer ist der jährliche Zins. Doppeltes Kapital, doppelter Zins; 3faches Kapital, 3facher Zins. Sowie sich also 100 Mrk. K. zu 855 Mrk. K. verhalten, eben so verhält sich der jährliche Zins aus 100 Mrk. zu dem jährlichen Zinse aus 855 Mrk. Steht:

100 Mrk. : 855 Mrk. = $4^1/_2$ Mrk. Zins : x

So oft 100 Mrk. K. in 855 Mrk. K. enthalten sind, so vielmal $4^1/_2$ Mrk Zins geben diese.

Von allen Zinsrechnungen mit einfachen Verhältnissen sind die bisherigen, als die im Leben häufigst vorkommenden, am ausführlichsten zu behandeln.

§. 281. Das Kapital ist zu berechnen.

Beispiel. Welches Kapital gibt jährlich zu 4% $18^1/_2$ Mrk. Zins?

Beurtheilung.

Hier ist das Kapital zu suchen, das jährlich $18^1/_2$ Mrk. Zins gibt. Um dieß finden zu können, so muß das Kapital zu einem andern Zinse bekannt sein. Das ist der Fall. Der Ausdruck 4 Proc. zeigt an, daß zu 4 Mrk. Zins 100 Mrk. Kapital gehören. Die Aufgabe ist also: 4 Mrk. Zins erfordern 100 Mrk. Kapital, welches Kapital erfordern $18^1/_2$ Mrk. Zins? Ausr.

Mündlich.

a. Muß man, um 4 Mrk. Zins zu erhalten, 100 Mrk. Kapital ausstehen haben, so braucht man zu 1 Mrk. Zins den 4. Theil von 100 Mrk. = 25 Mrk. Kapital, zu $18^1/_2$ Mrk. Zs. also $18^1/_2$ × 25 Mrk. Kap.; 18 × 25 Mrk. = 450 Mrk.; $^1/_2$ × 25 Mrk. = $12^1/_2$ Mrk.; 450 + $12^1/_2$ = $462^1/_2$ Mrk.

b. So vielmal 4 Mrk. Zins, so vielmal 100 Mrk. Kap. Zu $18\frac{1}{2}$ Mrk. Zins sind daher so vielmal 100 Mrk. Kap. erforderlich, als 4 Mrk. Zins in $18\frac{1}{2}$ Mrk. Zins enthalten sind. 4 in $18\frac{1}{2}$ = $\frac{8}{2}$ in $\frac{37}{2}$ = 8 in 37 = $4\frac{5}{8}$mal. $18\frac{1}{2}$ Mrk. sind also $4\frac{5}{8} \times 4$ Mrk; folglich bedarf man zu $18\frac{1}{2}$ Mrk. Zins $4\frac{5}{8} \times 100$ Mrk. Kap.; $4\frac{5}{8} \times 100$ Mrk. = $462\frac{1}{2}$ Mrk.

Schriftlich.

4 Mrk. Zs.	100 Mrk. K.	4 : $18\frac{1}{2}$ = 100 Mrk. K. : x
$18\frac{1}{2}$ Mrk. Zs.	?	x = $462\frac{1}{2}$ Mrk.

§. 282. Der Zinsprocent ist zu berechnen.

Beispiel 1. A nimmt von 800 Mrk. Kapital jährlich 36 Mrk. Zins ein; zu wie viel Procent ist das Kapital ausgeliehen?

Aufl. Hier ist der Zins pro cent, d. i. vom Hundert zu berechnen und der Zins von 800 Mrk. ist bekannt. 800 Mrk. Kap. tragen 36 Mrk. Zins Mithin kommt auf das Hundert der 8. Theil von 36 Mrk. Der 8. Theil von 36 Mrk. ist $4\frac{1}{2}$ Mrk. Das Kapital ist demnach zu $4\frac{1}{2}$ vom Hundert, d. i. zu $4\frac{1}{2}$ % ausgestellt.

Beispiel 2. Von 75 Mrk. Kapital erhält man 3 Mrk. 75 Pfg. Jahreszins; wie viel Proc. also?

Was ist hier zu suchen? Der Zinsprocent oder der Zins vom Hundert. Und was ist uns bekannt? Der Zins von 75 Mrk.; derselbe beträgt 3 Mrk. 75 Pfg. oder $3\frac{3}{4}$ Mrk. Wie heißt demnach die Aufgabe vollständig ausgedrückt? 75 Mrk. K. geben $3\frac{3}{4}$ Mrk. Zins; wie viel Zins geben 100 Mrk. Kap.?

Mündlich.

Ich gehe von 75 Mrk. auf 25 Mrk. und von 25 Mrk. auf 100 Mrk. Kapital. 75 Mrk. geben $3\frac{3}{4}$ Mrk. Zins, 25 Mrk. geben $\frac{1}{3}$ von $3\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$ Mrk., und 100 Mrk. K. geben $4 \times 1\frac{1}{4}$ = 5 Mrk. Die 75 Mrk. sind also zu 5 Proc. ausgeliehen.

Schriftlich.

75 Mrk. K.	$3\frac{3}{4}$ Mrk. Zs.	75 : 100 = $3\frac{3}{8}$ Mrk. : x
100 Mrk. K.	?	x = $4\frac{1}{2}$ proc.

§. 283.

Wir geben nun, besonders für Präparandenschulen, Aufgaben über sämmtliche 12 Fälle mit einfachen Verhältnissen.

1. Der Zins wird gesucht.

a. Aus dem Kapitale. 450 Mrk. Kapital bringen 18 Mrk. Zins; wie viel Zins bringen bei gleicher Zeit und gleichem Zinsfuß 600 Mrk. Kapital? (24 Mrk.)

b. Aus dem Zinsfuß. Bei 3 % wirft ein Kapital 42 Mrk. Zinsen ab, wie viel in derselben Zeit bei 4 %? (56 Mark.)

c. Aus der Zeit. In 7 Mon. gibt ein Kapital 56 Thlr. Zins, wie viel bei gleichem Zinsfuß in 1 Jahre? (96 Thlr.)

2. Das Kapital wird gesucht.

a. Aus dem Zins. Von 400 Mrk. Kpt. erhält man 20 Mrk. Zins; wie groß ist das Kapital, welches bei gleichem Zinsfuß und gleicher Zeit 36 Mrk. Zins gibt? (720 Mrk.)

b. Aus dem Zinsfuß. Welches Kapital wirft zu 5 % in derselben Zeit eben so viel Zins ab, wie 800 Mrk. zu 4 %? (640 Mrk.?

c. Aus der Zeit. Welches Kapital bringt in 2 Jahren eben so viel Zins, wie 250 Mrk. Kap. bei gleichem Zinsfuß in 5 Jahren? (625 Mrk.)

3. Der Zinsfuß wird gesucht.

a. Aus dem Kapital. Zu wie viel proc. müssen 700 Mrk. ausgeliehen werden, damit sie in der nämlichen Zeit eben so viel Zins abwerfen, wie 800 Mrk. bei $3\frac{1}{2}\,\%$? (Zu $4\,\%$.)

b. Aus dem Zinse. Wenn ein gewisses Kapital zu $3\frac{1}{3}\,\%$ aussteht, so gibt es in einiger Zeit 48 Mrk. Zs.; zu wie viel proc. müßte es ausstehen, um in derselben Zeit 72 Mrk. Zins abzuwerfen? (Zu $5\,\%$.)

c. Aus der Zeit. Ein Kapital trägt bei $2\frac{1}{2}\,\%$ in 8 Jahren einen gewissen Zins; zu wie viel proc. müßte es ausgeliehen sein, um denselben Zins in 5 Jahren zu geben? (Zu $4\,\%$.)

4. Die Zeit wird gesucht.

a. Aus dem Kapital. 600 Mrk. Kapital geben in $3\frac{3}{4}$ Jahren einen gewissen Zins; in welcher Zeit geben 500 Mrk. K. bei demselben Zinsfuß denselben Zins? (In $4\frac{1}{2}$ J.)

b. Aus dem Zins. Ein Kapital gibt in 8 Mon 36 Mrk. Zins; in welcher Zeit wird es bei dem nämlichen Zinsfuß 60 Mrk. Zinsen tragen? (In $13\frac{1}{3}$ Mon.)

c. Aus dem Zinsfuß. Wie lange muß ein Kapital zu $6\,\%$ ausgeliehen werden, bis es eben so viel Zinsen abwirft, wie bei $5\,\%$ in 4 Jahren? ($3\frac{1}{3}$ J.)

B. Zinsrechnungen mit mehrfachen Verhältnissen.

§. 284. Der Zins ist zu berechnen.

1) Wie viel Zins geben 885 Mrk. zu $5\,\%$ in 2 Jahren?

Mündlich und schriftlich.

a. Ich suche den Zins zuerst auf 1 Jahr, dann auf 2 Jahre.

800 Mrk.	geben	8×5 Mrk.	=	40 Mrk.
50 „	„	$\frac{1}{2} \times 5$ „	=	2 Mrk. 50 Pfg.
25 „	„	$\frac{1}{4} \times 5$ „	=	1 Mrk. 25 Pfg.
10 „	„	$\frac{1}{10} \times 5$ „	=	— Mrk. 50 Pfg.
885 Mrk.	geben also	in 1 Jahre	=	44 Mrk. 25 Pfg.
		in 2 Jahren	=	$\times 2$
				88 Mrk. 50 Pfg.

Wird die Ausrechnung frei im Kopfe ausgeführt, so läßt man, damit der Schüler immer nur Eine Zahl zu merken hat, das zweite Theilprodukt sogleich zum ersten, die 2 Mrk. 50 Pfg. also zu 40 Mrk., das dritte Theilprodukt zur Summe der beiden vorigen zählen u. s. w.

b. $885 \times 5 \times 2 = 8850$ Pfg. = 88 Mrk. 50 Pfg.

c. 100 Mrk. 1 J. 5 Mrk. Zs. 100 : 885 = 5 Mrk. : x
885 Mrk 2 J. ? 1 : 2

100 Mrk. 1 J.
1 „ 1 „ $\frac{5 \cdot 885 \cdot 2}{100}$ $x = \frac{2 \cdot 885 \cdot 5}{100}$
885 „ 1 „
885 „ 2 „

Je mehr Kapital, desto mehr Zins. Je länger das Kapital aussteht, desto mehr Zins wirft es ab.

2) Wie viel Zins geben 1250 Mrk. zu $4\frac{1}{2}$ % in 7 Monaten?

Ausrechnung.

Mündlich. 100 Mrk. geben in 1 Jahre $4\frac{1}{2}$ Mrk. Zins; 1200 Mrk. geben $12 \times 4\frac{1}{2} = 54$ Mrk., und 50 Mrk. geben die Hälfte von $4\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$ Mrk.; $54 + 2\frac{1}{4}$ Mrk. = 56 Mrk. 25 Pfg. So viel in 1 Jahre. In 1 Monat gibt das Kapital $\frac{1}{12}$ von 56 Mrk. 25 Pfg. = 4 Mrk. $68\frac{3}{4}$ Pfg., und in 7 Monaten gibt dasselbe 7×4 Mrk. $68\frac{3}{4}$ Pf. Zins = 32 Mrk. $81\frac{1}{4}$ Pfg.

Schriftl. 100 Mrk. 12 Mt. $4\frac{1}{2}$ Mrk. 100 : 1250 = $4\frac{1}{2}$ Mrk. : x
1250 „ 7 Mt. ? 12 : 7

100 Mrk. 12 Mt.
1 Mrk. 1 Mt. $\frac{9 \cdot 1250 : 7}{2 \cdot 100 \cdot 12}$ $x = \frac{7 \cdot 1250 \cdot 9}{100 \cdot 12 \cdot 2}$
1250 Mrk. 7 Mt.

3) Wie viel beträgt der Zins aus 580 Mrk. bei 6% vom 26. Aug. 1870 bis 13. Mai 1872?

Berechnung der Zeit.

Vom 26. Aug. 1870 bis 26. Aug. 1871 = 1 Jahr = 360 Tg.
„ 26. Aug. 1871 bis 26. Apr. 1872 = 8 Mon. = 240 Tg.
„ 26. April bis 13. Mai = 4 + 13 Tg. = 17 Tg
617 Tg.

Berechnung der Zinses.

a. Durch zwei einfache Rechnungen.

Man berechnet den Zins zuerst auf 1 Jahr, dann auf 617 Tage. 500 Mrk. geben jährlich 5×6 oder 30 Mrk. Zins; 80 Mrk. geben 80×6 Pfg. = 480 Pfg. = 4 Mrk. 80 Pfg.; 30 Mrk. + 4 Mrk. 80 Pfg. = 34 Mrk. 80 Pfg. Nun heißt es: In 360 Tg. erträgt ein Kapital 34,80 Mrk.; wie viel in 617 Tg.? Steht:

360 Tg $34\frac{4}{5}$ Mrk. 360 : 617 = 34,80 Mrk. : x
617 Tg ? $x = \frac{617 \cdot 34{,}8}{360}$

b. Durch eine zusammengesetzte Rechnung.

100 Mrk. 360 Tg. 6 Mrk. 100 : 580 = 6 Mrk. : x
580 Mrk. 617 Tg. ? 360 : 617

Unter den verschiedenen Arten von Zinsrechnungen mit mehrfachen Verhältnissen ist die bis jetzt vorgeführte die im Leben am meisten vorkommende; deßwegen ist sie auch in der Schule am ausführlich-

sten zu behandeln. Die folgenden 3 Arten, welche sich noch für die Schulen eignen, stehen in **zweiter** Linie. Wo man sich auf das Nothwendigste beschränken muß, können diese auch übergangen werden.

§. 285. Das Kapital ist zu berechnen.

Beisp. 1. Welches Kapital wirft zu 5 % in 6 Jahren 480 Mrk. Zinsen ab?

Ausr. Wie zu einem gegebenen **einfachen** Jahreszins das Kapital gefunden wird, ist uns bekannt. Hier soll das Kapital zu dem gegebenen 6fachen Jahreszins berechnet werden. Wie thut man dies? Man führt den 6fachen Jahreszins auf den **einfachen** zurück und sucht dann zu **diesem** das Kapital. Der 6jährige Zins = 480 Mrk.; der 1jährige also = 80 Mrk. Nun ist die Frage: Welches **Kapital** gibt zu 5% jährlich 80 Mrk. Zins? Zu 5 Mrk. Zins gehören 100 Mrk. Kapital; mithin gehört zu 80 oder 16 × 5 Mrk. Zins ein Kapital von 16 × 100 = 1600 Mrk.

Beisp. 2. Wie groß ist das Kapital, welches zu 4 % in 8 Mon. 44 Mrk. Zins erträgt?

Ausr. Wie vorhin den Zins für die 5 Jahre, so berechnet man auch hier den Zins für die 8 Monate zuerst auf **1 Jahr.** Gibt das Kapital in 8 Mon. 44 Mrk. Zins, so gibt es in 4 Mon. 22 Mrk. und in 12 Mon. 66 Mrk. Jetzt ist wieder die Frage: Welches Kapital erträgt bei 4% in 1 Jahre 66 Mrk. Zins? Da hier 4 Mrk. Zins 100 Mrk. Kapital erfordern, so gehören zu 66 oder $16^1/_2$ × 4 Mrk. Zins $16^1/_2$ × 100 Mrk. Kapital; $16^1/_2$ × 100 Mrk. = 1650 Mrk.

In beiden Fällen wird die Antwort auch gefunden, wenn man den Zins vom Hundert auf die **gegebene Zeit** berechnet und dann sucht, wie oft derselbe in dem gegebenen Zinse enthalten ist. Der Quotient gibt das gesuchte Kapital in Hundertern.

Beisp. 3. Ein Kapital, das zu $3^1/_2$ % ausstand, ertrug in 4 J. und 8 Mon. 392 Mrk. Zins; wie groß war dasselbe?

Durch zwei Ansätze.

Man berechnet zuerst, wie viel der Zins auf 1 Jahr macht. Die Aufgabe ist: Auf 4 Jahre 8 Mon. oder 56 Mon. beträgt der Zins 392 Mrk.; wie viel auf 12 Monate?

56 Mon.	392 Mrk. Zs.	56 M. : 12 M. =	302 Mrk. : x
12 „	?	x =	84 Mrk.

Nun wird gesucht, welches Kapital zu $3^1/_2$ % in 1 Jahre 84 Mrk. Zins erträgt. Der Ausdruck $3^1/_2$ proc. sagt uns, daß 100 Mrk. Kap. erforderlich sind, um in 1 Jahre $3^1/_2$ Mrk. Zins abzuwerfen. Also heißt es jetzt: Zu $3^1/_2$ Mrk. Zins sind 100 Mrk. Kap. erforderlich; welches Kapital erfordern 84 Mrk. Zins?

$3^1/_2$ Mrk. Zins	100 Mrk. K.	$3^1/_2$: 84 =	100 Mrk. K. : x
84 Mrk. „	?	x =	2400 Mrk.

Durch einen Ansatz.

12 M. $3^1/_2$ Mrk. Zs.	100 Mrk. K.	12 Mon. $3^1/_2$ Mrk. Zs.	100 Mrk. K.
56 M. 392 Mrk. Zs.	?	56 Mon. 392 Mrk. Zs.	?

12 Mon.	100 Mrk.	12 M. $3^1/_2$ Mrk. Zs.	
1	12	1 „ — „ „	$\frac{100 \,.\, 12 \,.\, 2 \,.\, 392}{56 \,.\, 7}$
56 „ ($3^1/_2$ Mrk.) 56		56 „ — „ „	
$^1/_2$ „ 7		— „ $^1/_2$ „ „	
1 „	2	— „ 1 „ „	
392 „	392	— „ 392 „ „	

Sprechweise. Soll das Kapital in 12 Monat $3\frac{1}{2}$ Mrk. Zs. abwerfen, so muß es 100 Mrk. betragen; soll es aber schon in 1 Mon. $3\frac{1}{2}$ Mrk. Zins abwerfen, so muß es 12×100 Mrk. betragen; soll es erst in 56 Mon. $3\frac{1}{2}$ Mrk. Zins abwerfen, so genügt ein $\frac{1}{56}$ davon. Soll das Kapital in dieser Zeit nur $\frac{1}{2}$ Mrk. ertragen, so ist wieder nur $\frac{1}{7}$ desselben nöthig; soll es 1 Mrk. ertragen, so muß es zweimal so groß sein, und soll es 392 Mrk. Zins abwerfen, so muß es wieder 392mal so viel betragen.

Proportion. Zu suchen ist das Kapital, welches dem Zinse von 392 Mrk. entspricht; gegeben ist das Kapital zu $3\frac{1}{2}$ Mrk. Zins. Zu $3\frac{1}{2}$ Mrk. Zins gehören 100 Mrk. Kpt.; zu 392 Mrk. Zins ist ein größeres Kapital erforderlich. Das erste Verhältniß ist daher zunehmend zu setzen.

$3\frac{1}{2}$: 392 = 100 Mrk. K. : x

$3\frac{1}{2}$ Mrk. sind der 1jährige Zins aus 100 Mrk. Wären auch die 392 Mrk. einjähriger Zins, so würde das zu suchende Kapital so vielmal 100 Mrk. betragen, als $3\frac{1}{2}$ Mrk. in 392 Mrk. enthalten sind. Die 392 Mrk. sind aber der Zins auf 4 J. 8 M. Soll ein Kapital bei demselben Zinsfuße in 2 Jahren nur eben so viel Zins ertragen, als ein anderes in 1 Jahre; so braucht es in 1 Jahre nur halb so viel Zins zu geben, als dieses, und braucht daher auch nur halb so groß zu sein. Und soll ein Kapital in 4 Jahren nur eben so viel Zins abwerfen, als ein anderes in 1 Jahr; so braucht es in 1 Jahr nur $\frac{1}{4}$ mal so viel Zins zu tragen als dieses und braucht daher auch nur $\frac{1}{4}$ mal so groß zu sein. Je länger ein Kapital Zeit hat, einen gewissen Zins abzuwerfen, desto kleiner kann es sein, und umgekehrt. Daß die 392 Mrk. Zins nicht in einem Jahre, sondern erst in 4 J. 8 Mon. abgeworfen werden, wirkt daher nicht zunehmend auf das gesuchte Kapital, sondern abnehmend. Wie werden wir demnach setzen müssen? 56 M. : 12 M. Steht:

$3\frac{1}{2}$: 392 = 100 Mrk. K. : x
56 : 12

§. 286. Der Zins procent ist zu berechnen.

Beispiel 1. Ein Kapital von 400 Mrk. wirft in 4 Jahren 96 Mark Zinsen ab; zu wie viel proc. ist dasselbe ausgeliehen. Antw.: Zu 6 %.

Ausr. Wie viel procent = wie viel Zins jährlich vom Hundert? Es ist hier also der jährliche Zins von 100 Mrk. zu suchen. Gegeben ist, was 400 Mrk. in 4 Jahren Zins ertragen. Werfen 400 Mrk. in 4 Jahren 96 Mrk. Zins ab, so macht das auf 1 Jahr den 4. Theil von 96 Mrk. = 24 Mrk.; 400 Mrk. Kapital geben also in 1 Jahre 24 Mrk. Zins; was geben 100 Mrk.?

In den meisten Fällen werden diese Aufgaben am besten schriftlich wie mündlich gerechnet, nämlich so, daß man zuerst den Zins auf 1 Jahr und dann den Zins vom Hundert sucht.

Beispiel 2. Ein Kapital von 680 Mrk. wirft in 2 J. 6 M. 76 Mrk. 50 Pfg. Zins ab; zu wie viel proc. ist es ausgeliehen?

Berechnung des 1jährigen Zinses.

30 Mon.	$76\frac{1}{2}$ Mrk.	30 M. : 12 M. = $76\frac{1}{2}$ Mrk. : x
12 „	?	x = $30\frac{3}{5}$ Mrk.

Berechnung des Zinsprocentes.

680 Mrk. K.	$30^3/_5$ Mrk. Zs.	680 : 100 = $30^3/_5$ Mrk. Zs. : x
100 Mrk. „	?	x = $4^1/_2$%.

In einem Ansatze.

680 Mrk. K. 30 M.	$76^1/_2$ Mrk. Zs.	680 : 100 = $76^1/_2$ Mrk. : x
100 „ K. 12 M.	?	30 : 12.

§. 287. Die Zeit ist zu berechnen.

Beispiel 1. 625 Mrk. haben zu 4 % in einer gewissen Zeit 180 Mrk. Zins ertragen. Wie lange sind sie ausgestanden?

Ausr. 625 Mrk. Kpt. ertragen zu 4% in 1 Jahre $6^1/_4 \times 4$ oder 25 Mrk. Zins. In 2 Jahren ertragen sie 2×25 Mrk., in 3 Jahren 3×25 Mrk. u. s. f. Die 625 Mrk. Kpt. werden daher, um 180 Mrk. Zins abzuwerfen, so vielmal 1 Jahr ausstehen müssen, als 25 Mrk. in 180 Mrk. enthalten sind. 25 Mrk. sind in 180 Mrk. (= 175 + 5 Mrk.) $7^1/_5$mal enthalten. Mithin müssen 625 Mrk. Kpt., um 180 Mrk. Zinsen zu tragen, $7^1/_5$mal 1 Jahr = $7^1/_5$ Jahre lang ausgestanden sein.

Auch hier ist die Weise für das mündliche Rechnen zugleich die zweckmäßigste für das schriftliche. Man sucht den Zins von dem Kapitale auf 1 Jahr. So oft derselbe in der gegebenen Zinssumme enthalten ist, so vielmal 1 Jahr beträgt die zu suchende Zeit.

Beisp. 2. Wie lange müssen 960 Mrk. Kap. zu 5 % ausgeliehen werden, bis sie 616 Mrk. Zins ertragen?

Im Allgemeinen so viele Jahre, als der Jahreszins aus 960 Mrk. K. in 616 M. Zins enthalten ist.

Der Jahreszins aus 960 Mrk. = $9^3/_5 \times 5$ Mrk. = 48 Mrk.

Die Zahl der Jahre = 48 | 616 | $12^5/_6$.

Mithin müssen 960 Mrk., um bei 5% 616 Mrk. Zins abzuwerfein, $12^5/_6$ Jahre oder 12 J. 10 Mon. ausstehen

Andere Ausrechnung.

Zweisatz.

100 Mrk. K.	5 Mrk. Zs.	1 J.
960 „ K.	616 „ Zs.	?

100 Mrk. K.	5 Mrk. Zs.	$\frac{1 . 100 . 616}{960 . 5}$
1	5	
960	5	
—	1	
—	616	

Sprechweise: 100 Mrk. Kap. müssen, um 5 Mrk. Zs. abzuwerfen, 1 Jahr ausstehen; 1 Mrk. Kap. 100mal so lang; 960 Mrk. Kap. den 960. Theil dieser Zeit. Die Ausrechnung würde jetzt ergeben, wie lange 960 Mrk. ausstehen müssen, um 5 Mrk. Zins zu bringen. Um 1 Mrk. zu geben, brauchen sie nur $^1/_5$ dieser Zeit, und um 616 Mrk. Zins abzuwerfen, dieß 616mal.

Proportion.

960 : 100 = 1 Jahr : x
5 : 616

100 Mrk. müssen, um einen gewissen Zins abzuwerfen, 1 Jahr ausstehen; 960 Mrk. brauchen, um denselben Zins zu ertragen, nicht so

lange. Das Verhältniß der beiden Kapitalien muß also abnehmend sein. Um 5 Mrk. Zins zu erhalten, muß ich ein gewisses Kapital 1 Jahr ausstellen; um 616 Mrk. Zins zu bekommen, muß ich dasselbe Kapital länger ausleihen. Das Verhältniß, welches die Zinse bilden, ist daher zunehmend zu setzen.

Aufgaben: In welcher Zeit ertragen

350 Mrk. Kpt. zu 4 proc. 70 Mrk. Zins? Antw.: In 5 Jahren.
800 Thlr. Kap. bei 6 proc. 336 Thlr. Zs.? Antw.: In 7 J.
3600 fl. Kap. zu 5 proc. 855 fl. Zs.? Antw.: In $4^3/_4$ J.
730 Mrk. Kap. bei $4^1/_2$ proc. 219 Mrk. Zs? Antw.: In $6^2/_3$ J.

§. 288.

Aufgaben über sämmtliche 12 Fälle mit mehrfachen Verhältnissen. Für Präparandenschulen.

1. Der Zins wird gesucht.

a. Aus Kapital und Zeit. 500 Mrk. K. geben in 3 Jahren 60 Mrk. Zins; wie viel Zins geben 700 Mrk. K. bei gleichem Zinsfuß in 2 Jahren? (56 Mrk.)

b. Aus Kapital und Zinsfuß. 300 Mrk. K. geben bei 4% in einer gewissen Zeit 42 Mrk. Zins; wie viel Zins geben 800 Mrk. K. in derselben Zeit bei 3%? (56 Mrk.)

c. Aus Zinsfuß und Zeit. Ein Kapital wirft bei 5% in 4 Jahren 90 Mrk. Zins ab; wie viel Zins wird dasselbe bei 6% in 5 Jahren ertragen? (135 Mrk.)

2. Das Kapital wird gesucht.

a. Aus Zins und Zinsfuß. 900 Mrk. K geben bei $3^1/_3$ % in einer gewissen Zeit 75 Mrk. Zins; welches Kapital gibt bei 4% in derselben Zeit 100 Mrk. Zins? (1000 Mrk.)

b. Aus Zinsfuß und Zeit. Welches Kapital gibt bei $4^1/_2$ % in 8 Jahren eben so viel Zins, wie 1800 Mrk. K. zu 5% in 6 Jahren? (1500 Mrk.)

c. Aus Zins und Zeit. 400 Mrk. K. geben bei einem gewissen Zinsfuß in 4 Mon. 8 Mrk. Zins; wie groß muß ein Kapital sein, wenn es bei gleichem Zinsfuß in 5 Mon. $12^1/_2$ Mrk. Zins ertragen soll? (500 Mrk.)

3. Der Zinsfuß wird gesucht.

a. Aus Kapital und Zins. 800 Mrk. tragen bei 5% in einer gewissen Zeit 60 Mrk. Zins; bei welchem Zinsfuß geben 700 Mrk. in gleicher Zeit 42 Mrk. Zins.? (Bei 4%.)

b. Aus Zins und Zeit. Ein Kapital gibt bei $3^1/_3$ % in 4 Jahren 80 Mrk. Zins; bei welchem Zinsfuß gibt dasselbe in 3 Jahren 90 Mrk. Zins? (Bei 5%.)

c. Aus Kapital und Zeit. Bei welchem Zinsfuß werfen 300 Mrk. in 4 Jahren eben so viel Zins ab, wie 360 Mrk. bei 4% in 5 Jahren? (Bei 6%.)

4. Die Zeit wird gesucht.

a. Aus Kapital und Zins. 900 Mrk. geben bei einem gewissen Zinsfuß in 2 Jahren 72 Mrk. Zins; wie lange müssen 750 Mrk. zu demselben Zinsfuß ausstehen, um 75 M. Zins abzuwerfen? ($2^1/_2$ Jahre.)

b. Aus Zins und Zinsfuß. Ein Kapital muß zu 5% 5 Monate lang ausstehen, um 25 Mrk. Zins zu tragen; wie lange wird es ausstehen müssen, um zu $4^1/_2$% 18 Mrk. Zins zu geben? (4 M.)

c. Aus Kapital und Zinsfuß. Wie lange muß man 125 Mark zu 4% ausleihen, um so viel Zins zu erhalten, als 200 Mark zu 5% in 3 Jahren bringen? (6 Jahre.)

B. Kapital und Zins vereinigt.

§. 289. Kapital und einfacher Zins.

a. Die Summe von Kapital und Zins wird gesucht.

Beispiel 1. 650 Mrk. werden zu 5% ausgeliehen; wie viel betragen Kapital und Zins zusammen in 3 Jahren?

Erste Weise. Man sucht zuerst, was 650 Mrk. in 3 Jahren Zins tragen; dann zählt man Kapital und Zins zusammen. 650 Mrk. geben in 1 Jahre $6^1/_2 \times 5$ oder $32^1/_2$ Mrk. und in 3 Jahren $3 \times 32^1/_2$ oder $97^1/_2$ Mrk. Zins. Kapital und Zins machen also $650 + 97^1/_2$ oder $747^1/_2$ Mrk.

Zweite Weise. Man sucht zuerst, was 100 Mrk. sammt Zins in 3 Jahren betragen; dann leitet man davon ab, wie hoch 650 Mrk. in derselben Zeit anwachsen. 100 Mrk. geben zu 5% in 3 Jahren 3×5 oder 15 Mark Zins und betragen daher nach dieser Zeit mit dem Zinse $100 + 15$ oder 115 Mrk.; 200 Mrk. machen mit dem 3jährigen Zins 2×115 Mrk.; 300 Mrk. machen 3×115 Mrk.; 650 Mrk. machen also $6^1/_2 \times 115 = 747^1/_2$ Mrk.

Schriftlich.

100 Mrk. K.	115 Mrk. K.+Zs.	100 : 650 = 115 Mrk. K.+Z. : x
650 Mrk. K.	?	x = $747^1/_2$ Mrk.

Beispiel 2. Ich kaufe am 29. April eine $3^1/_2$procentige bayr. Staatsobligation von 1000 fl. im Kurse zu $87^1/_2$ mit dem Zinse von 1. Januar an. Wie viel habe ich dafür zu zahlen?

Berechnung der Obligation.

Für je 100 fl., auf welche die Obligation lautet, zahle ich nur $87^1/_2$ fl. baar. Die Aufgabe ist also: 100 fl. machen $87^1/_2$ fl. baar; was machen 1000 fl.? Antwort: $10 \times 87^1/_2 = 875$ fl. Oder:

100	$87^1/_2$ fl.	100 : 1000 = $87^1/_2$ fl. : x
1000	?	x = 875 fl.

Berechnung der Zinsen.

Der jährliche Zins beträgt $10 \times 3^1/_2$ oder 35 fl. Vom 1. Jan. bis 29. April sind 3 Mon. 28 Tg., d. i. $3 \times 30 + 28$ od. 118 Tg. Die Aufgabe heißt also: Auf 360 Tg. macht der Zins 35 fl.; wie viel auf 118 Tg.?

360 Tg.	35 fl.	360 Tg. : 118 T. = 35 fl. : x
118 Tg.	?	x = 11 fl. $28^1/_3$ kr.

Oblig. = 875 fl.
Zins = 11 fl. $28^1/_3$ kr.
Zusammen 886 fl. $28^1/_3$ kr. = 1519,67 Mk.

b. Die Summe wird in Kapital und Zins zerlegt.

Beispiel. Ein zu 4% ausgestelltes Kapital betrug nach $2^1/_2$ Jahren mit dem Zinse 825 Mrk.; wie groß war dasselbe?

Aufl. Die 825 Mrk. bestehen aus Kapital und Zins. Unsere Aufgabe ist, zu suchen, wie viel das Kapital allein beträgt. Dazu ist nöthig, daß wir das Verhältniß kennen, in welchem das reine Kapital und die aus Kapital und Zins zusammengesetzte Summe zu einander stehen. Um dasselbe zu finden, so setzen wir eine beliebige Summe, am besten 100 Mrk. als Kapital und sehen zu, wie viel sie bei demselben Zinsfuß und in derselben Zeit, also bei 4% in $2^1/_2$ Jahren mit dem Zinse zusammenmacht. Das Erste ist, daß wir den Zins berechnen. 100 Mark bringen in 1 Jahr 4 Mark, in $2^1/_2$ Jahren $2^1/_2 \times 4$ oder 10 Mrk. Zins. Kapital und Zins machen also nach $2^1/_2$ Jahren 100 + 10 oder 110 Mrk. Das reine Kapital verhält sich hiernach zu Kapital und Zins, wie 100 : 110 oder wie 10 : 11, d. h. das Kapital hat 10 Theile, wie Kapital und Zins zusammen 11 Theile haben. In demselben Verhältnisse steht auch das Kapital, das wir nach der Aufgabe zu suchen haben, zu den 825 Mrk. Die 825 Mrk. Kapital und Zins haben 11 Theile, wie das reine Kapital 10. Es heißt daher jetzt: 11 Theile = 825 Mrk.; wie viel machen 10 Theile?

110 : 100 = 825 Mrk. : x

Oder: So vielmal 100 Mrk. Kapital zu 4% ausgeliehen worden sind, so vielmal 110 Mrk. betragen nach $2^1/_2$ Jahren Kapital und Zins. Umgekehrt also: So vielmal 110 Mrk. Kapital und Zins zusammen betragen, so vielmal 100 Mrk. beträgt das Kapital allein. Da nun Kapital und Zins zusammen 825 Mrk. machen, so beträgt das reine Kapital so vielmal 100 Mrk., als 110 Mrk. Kapital und Zins in 825 Mrk. enthalten sind. In Form einer Regeldetri-Aufgabe: Unter 110 Mrk. befinden sich 100 Mrk. Kapital, wie viel unter 825 Mrk.

110 Mrk. K. u. Z.	100 Mrk. K.	110 : 825 = 100 : x
825 „ „ „ „	?	x = 750 Mrk. K.

c. Der Zinsfuß wird gesucht.

Beispiel: Zu wie viel Procent sind 300 Mrk. ausgeliehen worden, da sie nach 3 Jahren mit den Zinsen 336 Mk. betragen?

Aufl. Um den Zinsprocent bestimmen, d. h. um finden zu können, wie viel Zins 100 Mk. in 1 Jahre geben, so müssen wir wissen, wie viel 300 Mk. Kapital in 3 Jahren abwerfen. Die 300 Mk. betragen mit den Zinsen, die sie in 3 Jahren bringen, 336 Mk.; also sind die Zinsen = 336 Mk. — 300 Mk.; d. i. 36 Mk. Nun heißt es: 300 Mk. bringen in 3 Jahren 36 Mk. Zins; wie viel Zins bringen 100 Mk. in 1 Jahre? Antwort: 4 Mk. Die 300 Mk. waren also zu 4 % ausgeliehen.

d. Die Zeit wird gesucht.

Beispiel: Für 720 Mk., welche zu 5% ausgeliehen waren, sind nach einer gewissen Zeit an Kapital und Zins 810 Mk. zurückgezahlt worden. Wie lange ist das Kapital ausgestanden?

Aufl. Die Zinsen betragen 810 — 720, d. i. 90 Mk. Die Aufgabe heißt nun: 100 Mk. müssen, um 5 Mk. Zins zu bringen, 1 Jahr ausstehen; wie lange müssen 720 Mk. ausstehen, um 90 Mk. Zins zu geben? 720 Mk. bringen in 1 Jahr $7^1/_5 \times 5$ oder 36 Mk. Zins; um 90 Mk. abzuwerfen, müssen sie also so vielmal 1 J. ausstehen, als 36 Mk. Zins in 90 Mk. Zins enthalten sind, nämlich $2^1/_2$ Jahre.

§. 290. Kapital und Zins aus Zins.

Zins aus Zins zu nehmen, kommt selten vor; nicht selten wird jedoch der erhaltene Zins wieder anderwärts verzinslich ausgeliehen. Dieß geschieht besonders von Wittwenkassen, Sparkassen und Lebensversicherungsanstalten, bei welchen die nutzbare Verwendung der verfügbaren Gelder eine Grundbedingung ihres Fortbestehens ist.

a. Die Summe von Kapital und Zinseszins wird gesucht.

Beispiel. Wie viel betragen 1000 Mrk bei 5% mit Zinseszins in 3 Jahren?

Erste Berechnung.

Da das Kapital zu 5% aussteht, so machen 100 Mrk. desselben mit dem einjährigen Zinse 100 + 5 = 105 Mrk. In gleichem Maße wächst das ganze Kapital. Es bildet sich daher die Aufgabe:

1) 100 Mrk. Kpt. machen 105 Mrk. Kpt. u. Zs.; was 1000 Mrk. Kpt.?

Antwort: 1050 Mrk. Im zweiten Jahre sind daher 1050 Mrk. zu verzinsen.

2) 100 Mrk. Kpt. machen 105 Mrk. Kapital und Zins; was thun 1050 Mark?

Antwort: $1102\frac{1}{2}$ Mrk. Dieß ist die Summe, welche im dritten Jahre zu verzinsen ist.

3) 100 Mrk. Kapital machen 105 Mrk. Kapital und Zins; was thun $1102\frac{1}{2}$ Mrk. Kapital?

Antwort: $1157\frac{5}{8}$ Mrk. Wird also der fällige Zins alljährlich wieder zum Kapital geschlagen und mit demselben verzinst; so machen 1000 Mrk. Kpt. zu 5% nach Ablauf dreier Jahre $1157\frac{5}{8}$ Mrk.

Würde der fällige Zins nicht zum Kapital geschrieben und mit demselben verzinset, so würden Kapital und Zins nach 3 Jahren 1000 Mrk. + 3 × 50 Mrk. = 1000 + 150 = 1150 Mrk. betragen. $1157\frac{5}{8} - 1150 = 7\frac{5}{8}$. Diese $7\frac{5}{8}$ Mrk. sind der eigentliche Zins aus Zins. Sie berechnen sich aus den 50 Mrk. Zins des ersten Jahres, welche im zweiten und dritten Jahre, und aus den $50 + 2\frac{1}{2}$ Mrk. Zins des zweiten Jahres, welche im dritten Jahre mit dem ursprünglichen Kapitale zur Verzinsung kommen.

Zweite Berechnung.

$$\text{a. } \frac{1000 \cdot 105 \cdot 105 \cdot 105}{100 \cdot 100 \cdot 100} = \frac{21 \cdot 21 \cdot 21}{20 \cdot 20 \cdot 20}$$

b. ? : 1000 Mrk.

100	105 Mk. nach 1 Jahre
100	105 Mk. nach 2 Jahren
100	105 Mk. nach 3 Jahren
8	9261 = 1157,625 Mk.

100 machen bei 5% nach 1 Jahre mit dem Zins 105 Mrk., und so vielmal 100 Mrk. zu 5% ausgeliehen werden, so vielmal 105 Mrk. betragen nach 1 Jahre Kapital und Zins. So oft daher 100 Mrk. Kpt. in 1000 Mrk. Kpt. enthalten sind, so vielmal 105 Mrk. Kpt. und Zins nach 1 J.

Die Summe, welche sich hierdurch ergibt, wird im zweiten Jahre wieder zu 5% verzinst. So oft daher 100 Mrk. wieder in dieser Summe enthalten sind, so vielmal 105 Mrk. betragen Kapital und Zins nach Ablauf des zweiten Jahres u. s. f.

Obgleich kürzer, so ist doch auch diese Berechnung, wenn die Ausführung nicht mittelst der Logarithmen geschieht, immerhin noch sehr mühsam. Wir geben daher zum Gebrauche für den Lehrer und zur

etwaigen Mittheilung an die Schüler nachfolgende Tabelle, worin der Zinseszins vom Hunderttausend zu 3, 3½, 4, 4½ und 5% auf 35 Jahre berechnet ist.

100000 Mrk. machen in

Jahren.	zu 3%.	zu 3½ %.	zu 4%.	zu 4½ %.	zu 5%.
1	103000	103500	104000	104500	105000
2	106090	107123	108160	109203	110250
3	109273	110872	112486	114117	115763
4	112551	114752	116986	119252	121551
5	115927	118769	121665	124619	127628
6	119405	122926	126532	130226	134010
7	122987	127228	131593	136086	140710
8	126677	131681	136857	142210	147746
9	130477	136290	142331	148610	155133
10	134392	141060	148024	154297	162889
11	138423	145997	153945	162285	171034
12	142576	151107	160103	169588	179586
13	146853	156396	160507	177220	188565
14	151259	161869	173168	185194	197993
15	155797	167535	180094	193528	207893
16	160471	173399	187298	202237	218287
17	165285	179468	194790	211338	229202
18	170243	185749	202582	220848	240662
19	175351	192250	210685	230786	252659
20	180711	198979	219112	241171	265330
21	186029	205943	227877	252024	278596
22	191610	213151	236992	263365	292526
23	197359	220611	246472	275217	307152
24	203279	228333	256330	287601	322510
25	209378	236324	266584	300543	338635
26	215659	244596	277247	314068	355576
27	222129	253157	288337	328201	373346
28	228793	262017	289870	342970	392013
29	235657	271188	311865	358404	411614
30	242726	280679	324340	374532	432194
31	250008	290503	337313	391384	453804
32	257508	300671	350806	408998	476494
33	265234	311194	364838	427403	500319
34	273191	322086	379432	446636	525335
35	281386	333359	394609	466735	551602

Anwendung.

Wird gefragt: Wie viel machen 500 Mrk. zu 3½% mit Zinseszins in 10 Jahren? so heißt es: 100000 Mrk. machen in 10 Jahren 141060 Mrk.; wie viel thun 500 Mrk?

100000 Mrk. 141060 Mrk. $100000 : 500 = 141060 : x$
500 Mrk. ? $x = 705^3/_{10}$ Mrk.

b. Die Summe von Kapital und Zinseszins wird zerlegt.

Beisp. 1. Ein Kapital wuchs bei 5% mit Zinseszins in 24 Jahren auf $3870^3/_{25}$ fl. an; wie viel betrug es ursprünglich?

Nach der Tabelle betragen 100000 fl. bei gleichem Zinsfuße und in gleicher Zeit mit Zinseszins 322510 fl. Die Aufgabe heißt demnach: 322510 fl. Kapital und Zinseszins machen 100000 fl. Kapital; was thun $3870^3/_{25}$ fl.?

322510 fl. 100000 fl. $322510 : 3870^3/_{25} = 100000 : x$
$3870^3/_{25}$ fl. ? $x = 1200$ fl.

Beisp. 2. Ein Vater möchte für sein neugeborenes Söhnlein eine Geldsumme zu 4% anlegen, die mit Zinseszins in 20 Jahren 1000 Mrk. macht; welche Summe ist dazu erforderlich?

Nach der Tabelle machen 100000 Mrk. zu 4% mit Zinseszins in 20 Jahren 219112 Mark. Die Aufgabe ist also: Zu 219112 Mrk. gehören 100000 Mark; wie viel zu 1000 Mark? Antwort: $451^{1866}/_{27389}$ Mark.

Termin-Rechnung.

§. 291. Vorbemerkung.

Je länger man eine Summe Geldes in Händen hat und vortheilhaft gebraucht, desto größer ist der Nutzen, den sie bringt. Die Leistung einer unverzinslichen Zahlung vor dem Termin ist daher für den Zahlungspflichtigen von Nachtheil, für den Empfänger von Vortheil. Wird eine Zahlung nach dem Termin geleistet, so ist's umgekehrt. Nun kommt es im Leben nicht selten vor, daß eine Zahlung, die an einem bestimmten Termin auf einmal zu leisten ist, in verschiedenen Terminen gemacht werden will, oder daß eine solche, die in verschiedenen Terminen zu leisten ist, auf einmal entrichtet werden soll. Wie wird nun in diesem Falle verfahren, damit solches weder dem einen noch dem andern Theile zum Schaden gereicht? Der Schuldner, welcher einen Theil der Summe vor dem Zahlungstermin entrichtet, darf dafür den andern Theil so lange über den Termin hinaus behalten, bis Schaden und Nutzen sich gegenseitig decken. Das Mittel zur Ausgleichung ist also die Zeit, und die Bestimmung des Zeitpunktes, an dem die Zahlung ohne Nachtheil für beide Seiten stattzufinden hat, ist der Gegenstand der Terminrechnung. Dabei wird angenommen, daß eine Summe in einer gewissen Zeit denselben Nutzen bringe, als die Hälfte der Summe in der doppelten Zeit, als $1/3$ der Summe in der dreifachen Zeit, oder als die doppelte Summe in der Hälfte der Zeit, als die dreifache Summe in $1/3$ der Zeit u. s. w. Und so ist es auch in der That. 5 Mk. werfen bei 5 Proc. in 4 Jahren eben so viel Zins ab, als 5×4 oder 20 Mk. in 1 Jahre und eben so viel als 1 Mk. in 4×5 oder 20 Jahren, nämlich 1 Mk.

Wir behandeln übrigens nur die gewöhnlichen Fälle.

§. 292. Für einen Termin mehrere Termine.

Beisp. 1. A hat nach 2 Jahren 600 Mrk. ohne Zins zu zahlen. Er zahlt aber 300 Mrk. sogleich; wie lange darf er nun die übrigen 300 Mrk. behalten?

Hier springt sogleich in die Augen, daß A, da er die eine Hälfte der Schuld um 2 Jahre vor dem Termin zahlt, die andere Hälfte um eben so viel nach demselben, mithin erst in 4 Jahren zu zahlen hat. Die Art und Weise, es zu berechnen, ist aber die: A hat das Recht, die 600 Mrk. 2 Jahre lang zu benutzen. Nun bringen 600 Mrk. in 2 Jahren denselben Vortheil als 100 Mrk. in 6×2 oder 12 Jahren. Darf er aber 100 Mrk. 12 Jahre lang benutzen, so beträgt es für die 300 Mrk., die er noch behält, $^1/_3$ von 12 oder 4 Jahre. (300 Mrk. geben in 4 Jahren denselben Zins als 600 Mrk. in 2 J.)

Beisp. 2. A kauft ein Haus und bezahlt die Kaufsumme sogleich bis auf 5000 Mrk., welche er in 6 Mon. zu erlegen hat. Er bezahlt aber schon nach 3 Mon. 2500 Mrk.; wie lange darf er dafür die übrigen 2500 Mrk. noch benutzen?

Auch dieser Fall ist sehr einfach. Da A die einen 2500 Mrk. 3 Mon. vor dem Termine zahlt, so darf er dafür die andern 2500 Mrk. 3 Mon. über denselben hinaus behalten. Er hat diese also, anstatt nach 3 Mon., erst nach 6 zu entrichten. Die Berechnung ist folgende: A hat das Recht, die 5000 Mrk. 6 Mon. lang zu benutzen. Der Nutzen von 5000 Mrk. auf 6 Mon. ist aber = dem von 100 Mrk. auf 50×6 oder 300 Mon. Da er nun die vollen 5000 Mrk. nur 3 Mon. in Händen hatte und dieß so viel ist als 100 Mrk. auf 50×3 oder 150 Mon.; so hat er nach der ersten Zahlung noch den Nutzen von 100 Mrk. auf 300 — 150 = 150 Mon. anzusprechen. Nun ist die Frage: Auf welche Zeit beträgt der Nutzen von 2500 Mrk. eben so viel, als von 100 Mrk. in 150 Mon.? 100 Mrk. auf 150 Mon. = 2500 Mrk. auf $^1/_{25}$ von 150 Mon. = 6 Mon.

Beisp. 3. C hat nach 9 Mon. 1200 Mk. zu zahlen. Nun zahlt er aber schon nach 3 Mon. 350 Mk. und nach weiteren 2 Mon. 450 Mk.; wie lange darf er den Rest dann noch benützen?

Ausr.

a.	1200 M. 9 Mon.	=	10800 M. 1 Mon.		e. 10800
b.	1200 M. 3 Mon.	=	3600 M. 1 Mon.		5300
c.	850 M. 2 Mon.	=	1700 M. 1 Mon.		f. 400 | 5500 | 13$^3/_4$ Mon.
			5300 M. 1 Mon.		

Erklärung. a. C darf die 1200 M. auf 9 Mon. benutzen. 1200 M. auf 9 Mon. = 9 × 1200 oder 10800 M. auf 1 Monat. b. Die vollen 1200 M. benutzte C nur 3 Mon. lang, thut 3 × 1200 = 3600 M. auf 1 Monat. c. Die gezahlten 350 M. von 1200 M. ab, bleiben 850 M. Diese verwendete er 2 Monate lang, thut 2×850 oder 1700 M. auf 1 Mon. d. Mithin hat C bis zu diesem Zeitpunkte 3600 + 1700 = 5300 M. 1 Monat lang benutzt. e. Von 10800 M. durfte er den Nutzen auf 1 Mon. ansprechen, von 5300 M. hat er denselben auf diese Zeit bereits gehabt; also steht ihm noch die Benutzung von 5500 M. auf 1 Monat zu. f. Die Summe, welche er noch in Händen hat, ist 1200 — (350 + 450) = 400 M. Nun heißt's: Auf welche Zeit beträgt der Nutzen von 400 M. eben soviel als von 5500 M. auf 1 Mon.? 5500 M. auf 1 Mon. = 1 M. auf 5500 Mon.; bei 400 M. macht's $^1/_{400}$ dieser Zeit; 5500 Mon. durch 400 getheilt = 13$^3/_4$ Mon. Also hat C das Recht, die restigen 400 M. noch 1 Jahr 1$^3/_4$ Mon. lang zu benutzen.

§. 323. Für mehrere Termine einen Termin.

Beisp. 1. 800 Mrk. sind in 2 Terminen zu zahlen, und zwar 400 Mrk. nach 3 Jahren und 400 Mrk. nach 5 Jahren; wann ist die Summe auf einmal zu erlegen? Antw.: In 4 Jehren.

Da die 2 Posten von gleicher Größe sind, so fällt der zu bestimmende Termin in die Mitte der beiden gegebenen. Die 800 Mrk. sind daher nach 4 J. zahlbar. Hiernach werden die einen 400 Mrk. 1 Jahr später, die andern 1 Jahr früher gezahlt; Vor- und Nachtheil heben sich so gegenseitig auf. Die umständliche Berechnung ist die:

400 Mrk. 3 J. = 100 Mrk 12 J. 8 | 32 J. | 4 J.
400 Mrk. 5 J. = 100 Mrk. 20 J. 32
800 Mrk 100 Mrk 32 J.

Der Zahlungspflichtige ist berechtigt, 100 Mrk. 32 Jahr lang zu benutzen. Der Vortheil, den 100 Mrk. in 32 J. bringen, ist gleich dem, den 800 Mrk. in dem 8. Theil dieser Zeit geben. $^1/_8$ von 32 J. = 4 Jahre.

Beisp 2 A kauft für 3600 Mk. ein Haus, unter der Bedingung, daß ihm gestattet werde, 600 Mk. nach 1 Mon., 800 Mk. nach 3 Mon., 1000 Mk nach 6 Mon. und 1200 Mk. nach 8 Mon. zu zahlen. Wann kann er seine Schuld auf einmal abtragen? Antwort: In $5^1/_6$ Mon.

Berechnung;

600 Mk. 1 Mon. = 100 Mk. 6 Mon. 36 | 186 M. | $5^1/_6$ Mon.
800 Mk. 3 „ = 100 Mk. 24 „ 180
1000 Mk. 6 „ = 100 Mk. 60 „ $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
1200 Mk 8 „ = 100 Mk. 96 „
3600 Mk. 100 Mk. 186 Mon.

A hat das Recht, 100 Mk. 186 Monat lang zu benutzen. Der Gewinn, den 100 Mk. in 186 Monat bringen, ist gleich dem, den 3600 Mk., in dem 36. Theil dieser Zeit geben. $^1/_{36}$ von 186 Mon. = $5^1/_6$ Mon.

Beisp. 3. Ich leihe dem B zu 5 % am 1. März 400 Mrk., am 24. Juli 300 Mrk. und am 10 Okt. 600 Mrk. und wünsche, daß der Zinstermin von sämmtlichen Posten einer und derselbe sei. Auf welchen Tag wird dieser fallen müssen?

a. Berechnung der jährlichen Zinsen à 5%.

400 Mrk. K. = 20 Mrk. Zs., fällig d. 1. März.
300 „ „ = 15 „ „ „ „ 24. Juli, $4^4/_5$ M. n. d. 1. März.
600 „ „ = 30 „ „ „ „ 10. Okt., $7^1/_3$ „ „ „ 1. März.

b. Berechnung des mittleren Zinstermins.

Der erste Zins ist am 1. März des folgenden Jahres fällig. An diesem Tage stellt sich die Aufgabe: B hat heute 20 Mrk., nach $4^4/_5$ Mon. 15 Mrk. und nach $7^1/_3$ Mon. 30 Mrk. zu zahlen; wann hat er diese 3 Posten zugleich abzutragen? Da B die 20 Mrk. heute zu zahlen hat, so hat er kein Recht darauf, sie noch länger zu benutzen. Dagegen steht ihm zu, die 15 Mrk. noch $4^4/_5$ Mon. und die 30 Mrk. noch $7^1/_3$ Mon. für sich zu verwenden.

20 Mrk. 0 Mon. 65 | 292 | 4 Mon.
15 „ $4^4/_5$ „ = 1 Mrk. 72 Mon. 260
30 „ $7^1/_3$ „ = 1 „ 220 „ 32
65 Mrk. 1 Mrk. 292 Mon. 30
65 | 960 | $14^{10}/_{13}$ Tg.

Für $14^{10}/_{13}$ Tg. werden 15 Tg. genommen. Der Zinstermin fällt also 4 Mon. 15 Tg. nach dem 1. März, d. i. auf den 16. Juli.

Abzugs-Rechnungen.

A. Rabattrechnung.

§. 294. Vorbemerkung.

A kauft von B Waaren. Der Betrag dafür ist nach einem Jahre zahlbar, d. h. derselbe darf 1 Jahr lang unverzinslich stehen bleiben. Mithin kann A die hiezu nöthige Summe noch 1 Jahr zu seinem Nutzen verwenden. Zahlt er aber aus irgend einem Grunde sogleich, so geht dieser Vortheil auf B über. Dafür gewährt dann B dem A einen verhältnißmäßigen Abzug. Dieser Abzug heißt Rabatt.

Wie der Zins, so wird auch der Rabatt pro cento, d. i. vom Hundert, festgesetzt. Man sagt z. B.: Es werden 4% Interessen, und: Es werden 4% Rabatt gegeben. Der letztere Ausdruck läßt sich aber in einem doppelten Sinne nehmen. A erhält 4% Rabatt, kann heißen:

a) A zahlt anstatt 100 nur 100 — 4 = 96 (Rabatt in 100.)

b) A zahlt anstatt 100 + 4 oder 104 nur 100 (Rabatt auf 100.)

Durch die Rabattrechnung soll sich weder für den einen Theil, noch für den andern ein Gewinn oder Verlust ergeben. Die Summe, welche nach Abzug des Rabattes zu bezahlen ist, soll daher immer genau so viel betragen, daß sie bei den gegebenen Procenten bis zur Verfallzeit so viel Interessen gibt, als der Rabatt ausmacht.

Gewährt B dem A 4% Rabatt in 100, so erhält er anstatt 100 Mrk. nur 100 — 4 = 96 Mrk.; 96 Mrk. machen zu 4% in 1 Jahr 3,84 Mrk. Zins. 4 Mrk. Rabatt hat B gegeben, 3,84 Mrk. Zins nimmt er dagegen ein; folglich hat er 0,16 Mrk. Verlust.

Gestattet B dem A 4% Rabatt auf 100, so erhält er für je 104 Mrk. nur 100 Mrk. baar. 100 Mrk. tragen zu 4% in 1 Jahre gerade 4 Mrk. Zins. Der von ihm gegebene Rabatt und der dafür erhaltene Zins heben sich also in diesem Falle gegenseitig auf.

Die Berechnung des Rabattes auf 100 ist demnach nur allein die richtige. Gleichwohl geschieht es, daß die Kaufleute, Wechsler und Buchhändler den Rabatt in 100 berechnen.

Die ursprüngliche Summe, welche nach einer gewissen Zeit zu zahlen ist, nennt man das Kapital, die Schuld oder den künftigen Werth, und die vor dem Zahlungstermine gezahlte und um den Rabatt verkürzte Summe die Baarzahlung, den baaren oder gegenwärtigen Werth.

Betrifft der Rabatt einen Wechsel, der vor der Verfallzeit bezahlt wird, so heißt er Disconto; betrifft er eine Zahlung für Waaren, welche öfter auch erst berechnet werden muß, so pflegt man ihn Decort zu nennen.

§. 295. Rabatt in 100.

Mündlich.

1) Ich kaufe für 125 Mk. Waaren, und da ich sogleich zahle, so erhalte ich 10% Rabatt. Wie viel beträgt die Baarzahlung?

a. Man berechnet zuerst den Rabatt und zieht ihn dann von der Summe ab. Von 100 Mk. gehen 10 Mk. ab, von 25 Mk. der 4te Theil von 10 Mk. = $2^1/_2$ Mk., und von 125 oder 5 × 25 Mk. 5 × $2^1/_2$ Mk. oder $12^1/_2$ Mk. Ich zahle daher 125 Mk. — $12^1/_2$ Mk. = $112^1/_2$ Mk. Oder: 125 Mk. = $1^1/_4$ × 100 Mk.; also beträgt der Rabatt auch $1^1/_4$ × 10 oder $12^1/_2$ Mk. ꝛc. Oder: Bei 10% in Hundert beträgt der Rabatt $^1/_{10}$ der Schuld; $^1/_{10}$ von 125 Mk. = $12^1/_2$ Mk.

b. Man berechnet sogleich die Baarzahlung. Für 100 Mk. zahle ich 90 Mk., für 25 Mk. $^1/_4$ × 90 = $22^1/_2$, und für 125 Mk. 5 × $22^1/_2$ = $112^1/_2$ Mk. Oder: Zahle ich für 100 Mk. nur 90 Mk., so habe ich für 125 M. $1^1/_4$ × 90 = 90 + $22^1/_2$ = $112^1/_2$ Mk. zu entrichten.

2) Ein Geschäftsmann bezieht aus einer Fabrik $3^3/_4$ Ctr. Waaren à 36 Mrk., zahlbar in 6 Mon. oder baar mit 8% Rabatt*) Wie viel beträgt die Baarzahlung?

a. Preisberechnung. 3 Ctr. machen 3 × 36 oder 108 Mrk.; $^3/_4$ Ctr. machen $^3/_4$ × 36 oder, was eben so viel ist, $^1/_4$ × 108 = 27 Mrk.; 108 + 27 Mrk. = 135 Mrk.

b. Rabattberechnung. 135 = 100 + 25 + 10; 100 Mrk. machen 8, 25 Mrk. machen 2, 125 Mrk. also 8 + 2 oder 10 Mrk.; 10 Mrk. machen $^1/_{10}$ von 8 Mrk. oder 80 Pfg. Der Rabatt ist also 10 Mrk. 80 Pfg. Mithin beträgt die Baarzahlung 135 Mrk. — 10 Mrk. 80 Pfg. = 124 Mrk. 20 Pfg.

3) A kauft einen Wechsel im Betrage von 600 Mrk., welcher nach 4 Mon. zahlbar ist, mit $^3/_4$ proc. monatlichen Rabatt; wie viel muß er dafür zahlen?

Ausr. Auf 1 Mon. ist der Rabatt = $^3/_4$ proc., auf 4 Mon. also 4×$^3/_4$ oder 3 proc.; von 600 Mrk. beträgt derselbe 6 × 3 oder 18 Mrk.; 600 Mrk. — 18 Mrk. = 582 Mrk.**)

Aufg. z. Kopfr.

---

*) Der bemerkte Rabatt gilt bei den Kaufleuten nicht pro anno, sondern immer von der Zielzeit, hier also 8 proc. für 6 Monate.

**) Was ist ein Wechsel oder Wechselbrief? Angenommen, ich habe an Anton Fichtner in Wien 1000 fl. zu zahlen. Anstatt diese Summe baar zu übersenden, zahle ich sie an Ludwig Gutmann in Ansbach, der mit Christian Edel in Wien in Handelsverbindung steht. Ludwig Gutmann schreibt nun folgenden Brief:

Ansbach, den 20. Januar 1873. 1000 fl. im $52^1/_2$ fl.-Fuß.

Acht Tage nach Sicht zahlen Sie gegen diesen meinen Primawechsel an Herrn Anton Fichtner in Wien oder dessen Ordre die Summe von Eintausend Gulden im $52^1/_2$ fl.-Fuß. Werth empfangen. Stellen Sie denselben auf Rechnung laut Bericht.

Ludwig Gutmann.

An Herrn Christian Edel in Wien.

Das ist ein Wechsel oder Wechselbrief. Ich nehme denselben in Empfang und sende ihn an Anton Fichtner in Wien. Dieser zeigt oder präsentirt ihn dem Christian Edel, welcher, wenn er nicht protestirt, d. h. die Zahlung nicht ablehnt, darunter schreibt: „acceptirt“ d. h. angenommen, worauf er nach acht Tagen das Geld an Fichtner zahlt. So erhält dieser das Geld auf eine eben so billige als sichere Weise. Sollte der Wechsel verloren gehen, so wird er durch einen zweiten leicht wieder ersetzt. Uebrigens kann Fichtner den Wechsel auch an einen Andern verkaufen, in welchem Falle dann der Käufer das Geld erhebt.

Schriftlich.

Beisp. 1. Wie viel beträgt die Baarzahlung für 2750 Mk., wenn $5^1/_2$ proc. Rabatt in 100 gegeben werden?

Erste Weise.

100 Mrk. Kap.	$5^1/_2$ Mrk. Rab.	100 : 2750 = $5^1/_2$ Mrk. : x
2750 „	?	x = $151^1/_4$ Mrk.

2750 Mrk. Kapital
$151^1/_4$ „ Rabatt
$2598^3/_4$ Mrk. Baarzahlung.

Zweite Weise.

100 Mrk. Kap.	$94^1/_2$ Mrk. baar	100 : 2750 = $94^1/_2$ Mrk. : x
2750 „	?	x = $2598^3/_4$ Mrk.

Beisp. 2. Es bezieht Jemand 185 m à 2 Mrk. 80 Pfg., zahlbar in 8 Mon. oder baar mit $7^1/_2$ proc. Rabatt; wie viel beträgt die Baarzahlung? Antw. 479 Mark 15 Pfg.

a. Waarenber. 185 × 2 Mrk. = 370 Mrk.
185 × $^4/_5$ Mrk. = 148 Mrk.
518 Mrk.

a. Rabattber. 100 Mrk. Schuld — 1 „ — 518 „ $\frac{15 \cdot \overset{259}{\not{518}}}{\not{2} \cdot 100} = 38{,}85$ Mk. Rb.

518 Mk. Schuld — 38,85 Mk. Rabatt = 479,15 Mk. baar.

§. 296. Rabatt auf 100.

Beisp. 1. Ein Vater hat an seinen Stiefsohn einen Pflichttheil von 6400 Mrk. nach Abfluß von 5 Jahren hinauszuzahlen. Der Sohn hat aber das Geld zur Begründung eines Geschäftes jetzt nöthig und will seinem Vater bei sofortiger Bezahlung 4 proc. jährlichen Rabatt gestatten. Wie viel wird dieser nun zu zahlen haben?

Ausr. Der Vater hat eine Summe zu zahlen, welche bei 4 % mit dem einfachen Zinse in 5 Jahren auf 6400 Mrk. anwächst. Um dieselbe zu finden, so suchen wir zunächst, wie hoch 100 Mrk. bei gleichem Zinsfuße und in gleicher Zeit anwachsen. Bei 4 proc. bringen 100 Mrk. in 5 Jahren 5×4 oder 20 Mrk. Zins. 100 Mrk. betragen daher nach dieser Zeit mit dem Zinse 120 Mrk. Hätte der Sohn nach 5 J. nur 120 Mrk. zu erhalten, so würde ihm der Vater jetzt 100 Mrk. zu zahlen haben. Also wuß ihm der Vater so vielmal 100 Mrk. zahlen, als 120 Mrk. in 6400 Mrk. enthalten sind.

120 | 6400 | $53^1/_3$ × 100 = $5333^1/_3$ Mrk.

In Form einer Regeldetri-Aufgabe ausgedrückt, heißt es: 120 Mrk. künftiger Werth machen 100 Mrk. Baarzahlung; was thun 6400 Mark?

120 Mark Schuld	100 Mrk. br.	120 : 6400 = 100 Mrk. : x
6400 „	?	x = $5333^1/_3$ Mrk.

Beisp. 2. A hat an B über 1 Jahr 200 Mrk., über 2 Jahre 300 Mrk. und über 3 Jahre 400 Mark zu zahlen. B wünscht diese 3 Posten sogleich auf einmal zu erhalten. Wie viel machts bei 5% Rabatt?

Dieß gibt 3 Rechnungen, mit der Addition vier.

a.

105 Mrk. Sch.	100 Mrk Bz	105 : 200 = 100 Mrk. : x
200 „ „	?	x = 190,476 Mrk.

b.

110 Mrk. Sch.	100 Mrk. Bz.	110 : 300 = 100 Mrk. : x
300 „ „	?	x = 272,727 Mrk.

c.

115 Mrk. Sch.	100 Mrk. Bz.	115 : 400 = 100 Mrk. : x
400 „ „	?	x = 347,826 Mrk.

d.

a. 190,476 Mrk.
b. 272,727 „
c. 347,826 „

Summe 811,029 Mrk. = 811 Mrk. 3 Pfg.

B. Tararechnung.

§. 297. Vorbemerkung.

Werden Waaren, die nach dem Gewichte zu berechnen sind, versendet, so wird ihre Quantität gewöhnlich dadurch ermittelt, daß man sie mit den Gegenständen, worein sie verpackt sind, zusammen wiegt, dann das Gewicht der Letzteren, d. i. der Fässer, Kisten, Säcke u. s. w. bestimmt, und hieraus das Gewicht der reinen Waare ableitet. Es kommt also dreierlei Gewicht in Betracht: das Gesammt- oder Bruttogewicht, kurzweg Brutto genannt, das Gewicht der Dinge, in denen die Versendung geschieht, die Tara, und das Gewicht der reinen Waare, das Nettogewicht. Die Tara wird entweder einfach nach dem Gewichte, d. i. in Pfund, oder nach Procenten bestimmt.

In gewissen Fällen findet auch noch als Entschädigung für Abgang, Einwägen und Eintrocknen ein Abzug von der reinen Waare statt. Dieser Abzug heißt Gutgewicht.

A. Mündlich.

§. 298.

a. Die Tara nach dem Gewichte.

1) Eine Kiste Waare wiegt Brutto 350 Kgr; Tara (Gewicht der Kiste) 36 Kgr; wie viel Netto? (350 — 36 = 314 Kgr.) 2) Ein

Faß Tabak wiegt Brutto 400 Kgr; Netto 364 Kgr; wie viel Tara? (400 — 364 = 36 Kgr.) 3) Bei einer Sendung Waare beträgt das Nettogewicht 187 Kgr und die Tara 18 Kgr; wie viel macht das Bruttogewicht? (187 + 18 = 205 Kgr.)

b. Die Tara nach Procenten.

1) Ein Faß Oel hat 340 Kgr Brutto; Tara 12 proc.; wie viel Netto? (Die Tara beträgt $3^2/_5 \times 12 = 36 + 4^4/_5$ oder $40^4/_5$ Kgr; das Netto also $340 - 40^4/_5 = 299^1/_5$ Kgr.) 2) Das Brutto einer Waare ist 575 Kgr; Tara 10 proc.; wie viel Netto? (Die Tara ist $^1/_{10} \times 575 = 57^1/_2$ Kgr, das Netto also $575 - 57^1/_2 = 517^1/_2$ Kgr.) 3) Das Bruttogewicht beträgt 430 Kgr; die Tara 5 proc.; wie viel Netto? (Die Tara beträgt $^1/_{20}$ von 430 Kgr = $21^1/_2$ Kgr; 430 Kgr — $21^1/_2$ Kgr = $408^1/_2$ Kgr.) 4) Eine Waare wiegt Brutto 500 Kgr; Tara $52^1/_2$ Kgr; wie viel proc. beträgt diese? ($^1/_5$ von $52^1/_2$ Kgr = $10^1/_2$ Kgr, also $10^1/_2$%.)

c. Tara mit Gutgewicht.

Beispiel. A erhält ein Faß Waare von 500 Pfd. Brutto, Tara 10%, Gutgewicht 2%; wie viel beträgt das Netto? (441 Pfd.)

Hier entsteht die Frage, ob nicht die 10% Tara und 2% Gutgewicht zu addiren, im Ganzen zu berechnen und dann in Abzug zu bringen seien. Antwort: Nein; denn die 2% Gutgewicht gehen nicht vom Brutto, also nicht von der Waare und der Tara, sondern vom Waarengewicht allein ab. Es sind also zuerst die 10% Tara in Abzug bringen und dann die 2% Gutgewicht Die 10% Tara betragen 5×10 oder 50 Pfd.; 500 Pfd. — 50 Pfd. = 450 Pfd; davon 2%, nämlich $4^1/_2 \times 2$ oder 9 Pfd. Gutgewicht ab, gibt 441 Pfd. Netto.

B. Schriftlich.

§. 299.

a. Tara und Gutgewicht an sich.

Beisp. 1. 3 Körbe Feigen wiegen Brutto 148 Kilo, 166 Kilo, 195 Kilo; die Tara beträgt von jedem Korbe 18 Kilo; wie viel Netto?

Ausr.

148	Kilo
166	„
199	„
509	Kilo Brutto
54	„ Tara
455	Kilo Netto.

Beisp. 2. Das Bruttogewicht einer Waarensendung ist 785 Pfd.; Tara 8 Proc.; wie viel Netto?

Ausr.

100 Pfd. Br.	92 Pfd. N.	100 : 785 = 92 Pfd. : x
785 „ „	?	x = $722^1/_5$ Pfd.

Anm. In der Proportion setzen wir gewöhnlich das erste Verhältniß in reinen Zahlen. Bei Fertigung des Ansatzes sind jedoch die Benennungen ausdrücklich anzugeben. Hier ist also zu sprechen: 100 Pfd. Brutto verhalten sich zu 785 Pfd. Brutto wie 92 Pfd. Netto zu x Pfd. Netto. So oft 100 Pfd. Brutto in 785 Pfd. Brutto enthalten sind, so vielmal 92 Pfd. Netto.

Beisp. 3. Fünf Ballen Waare wiegen Brutto 780 Pfd.; Tara 5 %; Gutgewicht 2 %. Wie viel Netto?

Zweisatz:		Proportion:
100 Pfd. Br.	95 Pfd. N.	100 : 780 = 95 Pfd. : x
780 „ „	?	= 741 Pfd.
100 Pfd.	98 Pfd. N.	100 : 741 = 98 Pfd. : x
741 „	?	x = $726^{9}/_{50}$ Pfd.

Oder: $$\frac{780 \, . \, 95 \, . \, 98}{100 \, . \, 100} = 726{,}18 \text{ Pfd. Netto.}$$

So oft in 780 Pfd. Brutto 100 Pfd. Br. enthalten sind, so vielmal 95 Pfd. ohne Gutgewicht kommen, und so oft hierin 100 Pfd. ohne Gutgewicht enthalten sind, so vielmal 98 Pfd Netto kommen.

b. Mit Preisberechnung.

Beisp. 1. Wie berechnet sich eine Kiste mit Gewürz von $45^1/_4$ Kilo Brutto, wenn die Tara $8^3/_4$ Kilo beträgt und das Kilo Netto 18 Mrk. kostet.

Ausr. $45^1/_4$ Kilo Brutto
$8^3/_4$ Kilo Tara
$36^1/_2$ Kilo Netto à 18 Mrk $= 36^1/_2 \times 18 = 657$ Mrk.

Beisp. 2. A erhält 3 Fässer Waare von 314, 282 und 304 Pfd. Brutto Wie viel hat er dafür zu zahlen, wenn 10 % Tara, $12^1/_2$ % Gutgewicht und 32 Mrk. für den Ctr. Netto gerechnet werden?

a.		b.
314	? Mrk.	900 Pfd. Brutto
282	100 Pfd Br.	90 Pfd. ohne Gutgew.
304	100 Pfd. ohne Gutgew.	97,5 Pfd Netto
900 Pfd. Br.	100 Pfd. Netto	32 Mrk.
	25	6318 = 252 Mrk. 72 Pfg.

In Bruchform wie oben.

Gesellschafts- oder Theilungsrechnung.

§. 300. Vorbemerkung.

Wenn Zwei oder Mehrere zusammentreten, um gemeinschaftlich Etwas zu unternehmen, so bilden sie eine Gesellschaft. Beabsichtigen sie, einen Einkauf zu machen, ein Geschäft zu begründen &c, so haben sie hiezu eine gewisse Summe Geldes nöthig. Was jeder dazu beiträgt oder einlegt, wird seine Einlage genannt. Entweder sind die Einlagen von gleicher oder von verschiedener Größe. Sind sie von gleicher Größe, so wird auch der Gewinn oder der Verlust in gleiche Theile getheilt. Mit Aufgaben dieser Art haben wir es hier nicht zu thun Vielmehr werden jetzt blos solche Fälle in Betracht gezogen, wobei die Einlagen und dadurch auch die Antheile an dem Gewinn oder Verlust

von verschiedener Größe sind. Das ist Gegenstand der eigentlichen Gesellschaftsrechnung. Es wird dieselbe aber auch bei der Vertheilung der Steuern, Umlagen, Brandschatzungen und Einquartirungen, dann bei Concursen, Erbtheilungen, sowie überhaupt da in Anwendung gebracht, wo etwas nach bestimmten Verhältnissen zu vertheilen ist. Diese Verhältnisse werden sehr verschieden bezeichnet. In der Art und Weise, wie es geschieht, liegt die größere oder geringere Schwierigkeit der Berechnung. Daher ist es gut, die Schüler durch **mündliches** Berechnen von Aufgaben mit kleineren Zahlengrößen auf die schriftliche Ausführung gehörig vorzubereiten.

A. Mündlich.

§. 301.

1) Ich kaufe 2 Pfd. und dann wieder 3 Pfd. Kaffee von gleicher Sorte und zahle im Ganzen 7 Mrk.; wie viel kostet jeder **Posten**?

Aufl. Im Ganzen kaufe ich 2 Pfd. + 3 Pfd. oder 5 Pfd. Kaffee und zahle dafür 7 Mrk. Die Aufgabe ist also: 5 Pfd. Kaffee kosten 7 Mrk; wie viel kosten a. 2 Pfd.? b. 3 Pfd.? Ausr.: 5 Pfd. kosten 7 Mark, 1 Pfd. kostet $^1/_5$ von 7 Mark = 1 Mark 40 Pfg. Kostet 1 Pfd. 1 Mrk. 40 Pfg. so kosten 2 Pfd. 2 × 1 Mrk. 40 Pfg. = 2 Mrk. 80 Pfg., und 3 Pfd. kosten 3 × 1 Mrk. 40 Pfg. = 4 Mrk. 20 Pfg.

2) A und B haben 384 fl. so unter sich zu theilen, daß A 1 Theil und B 2 Theile von gleicher Größe erhalte. Wie viel wird jeder bekommen?

Aufl. Da A 1 Theil und B 2 Theile erhalten soll, so ist die zu theilende Summe in 1 + 2 oder 3 gleiche Theile zu zerlegen. 384 fl. = 3 × 128 fl. A bekommt also 1 × 128 fl., und B, dem 2 Theile gebühren, erhält 2 × 128 = 256 fl.

3) Franz und Wilhelm bekommen 75 Kirschen. So oft Franz 2 derselben nimmt, nimmt Wilhelm 3. Wie viel wird jeder bekommen?

Aufl. Franz nimmt 2 Kirschen und Wilhelm 3; zusammen haben sie dann 5; 5 Kirschen sind in 75 Kirschen 15mal enthalten; also erhält Franz 15 × 2 oder 30, und Wilhelm 15 × 3 oder 45 Kirschen. **Oder** wir betrachten die 2 + 3 oder 5 Kirschen, die auf einmal weggenommen werden, als Ganzes und jede Kirsche als einen seiner Theile. Demnach erhält Franz 2 Theile wie Wilhelm 3. Wie die 5 Kirschen, so werden auch die 75 getheilt. 1 Theil hievon beträgt $^1/_5$ von 75 oder 15. Franz erhält 2 Theile, also 2 × 15 oder 30, und Wilhelm erhält 3 Theile, also 3 × 15 oder 45.

4) 1200 Mrk. sind so zu theilen, daß A 3mal so viel als B bekommt.

Aufl. A soll 3mal so viel als B erhalten. Bekommt B also 1 Th., so muß A 3mal 1 Theil oder 3 Theile erhalten. Die 1200 Mrk. sind daher in 1 + 3 oder 4 gleiche Theile zu theilen. — Das Weitere wie oben.

5) 245 Thlr. sind so zu theilen, daß B $2^1/_2$mal so viel als C bek.

Aufl. B soll $2^1/_2$mal so viel als C bekommen. Gibt man dem C also 1 Th., so muß B $2^1/_2$ × 1 Theil = $2^1/_2$ Theil erhalten; gibt man dem C 2 Th., so muß B $2^1/_2$ × 2 = 5 Theile bekommen rc. Am einfachsten wird die Theilung, wenn man dem C 2 Theile gibt; denn in diesem Falle erhält B gerade 5. Die 245 Thlr. sind daher in 2 + 5 oder 7 gleiche Theile zu theilen.

6) A und B sollen 423 Stücke so unter sich theilen, daß sich der Antheil des A zu dem Antheile des B verhalte, wie $^4/_7$ zu $^5/_7$; wie viel muß jeder bekommen?

Aufl. Der Bruch $^4/_7$ enthält 4 Theile, wie der Bruch $^5/_7$ 5 Theile hat; A soll also 4 Theile erhalten, wie B 5; die 423 Stücke sind daher in $4 + 5$ oder 9 Theile zu theilen. $^1/_9$ von 423 Stücken = 47 Stücke; also erhält A 4×47 und B 5×47 Stücke.

7) Zwei Dörfer, A und B, haben 75 Morgen Weideplatz unter sich so zu vertheilen, daß sich ihre Antheile wie 5 zu 3 verhalten. Wie viel wird jedem Dorfe zufallen?

Aufl. Wie verhält sich 5 zu 3? Antwort: $5 = 5 \times 1$, und $3 = 3 \times 1$; die Zahl 5 enthält also 5 Theile, wie die Zahl 3 deren 3 hat. Also ist der Ausdruck: die Antheile von A und B sollen sich wie 5 zu 3 verhalten = A soll 5 gleiche Theile erhalten, wie B 3. Die ganze Fläche ist daher in $5 + 3$ oder 8 gleiche Theile zu theilen.

8) Fritz und Karl bekommen 105 Haselnüsse mit dem Auftrage, sie so unter sich zu theilen, daß ihre Antheile wie $^1/_3$ zu $^1/_4$ sich verhalten.

Aufl. $^1/_3$ und $^1/_4$ verhalten sich zu einander, wie $^4/_{12}$ und $^3/_{12}$. Fritz soll also 4 solche Theile bekommen, wie Karl 3. Folglich sind die 105 Haselnüsse in $4 + 3$ oder 7 gleiche Theile zu theilen.

9) A und B unternehmen einen Handel. A gibt 500 Thaler dazu, B 700 Thlr. Sie gewinnen 360 Thlr. Wie viel hat jeder davon anzusprechen?

Aufl. Gibt A 500 Thlr. und B 700 Thlr., so ist die ganze Einlage 1200 Thlr. Mit diesen 1200 Thlrn. werden 360 Thlr. gewonnen. Hievon erhält jeder gerade so viel, als mit seiner Einlage gewonnen wird. Die erste Frage ist daher: Mit 1200 Thlr. werden 360 Thlr. gewonnen, wie viel mit den 500 Thlr. des A? Die andere Frage heißt: Mit 1200 Thlr. werden 360 Thlr. gewonnen, wie viel mit den 700 Thlrn. des B? Beide Fragen sind leicht zu beantworten, wenn wir wissen, wie viel mit 100 Thlrn. gewonnen wird. Da mit 1200 Thlrn. 360 Thlr. gewonnen werden, so kommt auf 100 Thlr. $^1/_{12}$ von 360 Thlr. = 30 Thlr. Also erhält A mit 500 Thlr. Einlage 5×30 oder 150 Thlr. und B mit 700 Thlrn. Einlage 7×30 oder 210 Thlr. Dadurch ist der ganze Gewinn erschöpft. Denn $150 + 210$ Thlr. = 360 Thlr.

10) Die Zahl 70 ist in 2 Theile zu theilen, welche sich um 14 von einander unterscheiden.

a) Ich theile 70 zuerst in 2 gleiche Theile. $70 = 2 \times 35$. Wie bilde ich nun aus $35 + 35$ zwei Zahlen, die sich um 14 von einander unterscheiden? Welche Zahlen entstehen, wenn ich von der einen Hälfte 1 nehme und der andern zulege? ($34 + 36$.) Und um wie viel unterscheiden sie sich von einander? Wie aber, wenn ich von der einen Hälfte 2 nehme und der andern zulege? — Um also aus $35 + 35$ 2 Zahlen zu erhalten, die sich um 14 von einander unterscheiden, so muß ich von der einen 35 7 nehmen und der andern 35 7 zulegen. Die eine Zahl beträgt dann $35 - 7$ oder 28, und die andere $35 + 7$ oder 42.

b) Ich suche zuerst die Zahl, deren Hälfte gleich ist dem kleineren der beiden Theile. Dieselbe ist $70 - 14 = 56$. Die Hälfte von $56 = 28$. Das ist der kleinere Theil; der größere Theil ist $28 + 14$ oder 42.

b) Ich suche zuerst die Zahl, deren Hälfte gleich ist dem größeren der beiden Theile. Dieselbe beträgt $70 + 14$ oder 84. Die Hälfte von $84 = 42$. Das ist der größere Theil; der kleinere ist $42 - 14$ oder 28.

11) Theile nun eben so 250 Mrk. in zwei Theile, deren einer 70 Mrk. mehr beträgt, als der andere! (250 Mrk. = 160 + 90 Mrk.)

B. Schriftlich.

§. 302. Der Theilungsfuß ist geradezu gegeben.

Beisp. 1. Die 3 Besitzer eines Waldes schlagen in diesem einmal 116 Klafter Scheitholz; davon kommen auf A 3 Theile, auf B 4 und auf C 5; wie viel also?

	a.		c.		b.
Ausr.	A 3 Theile	$= 3 \times 9^2/_3$ Klftr.	$= 29$ Klftr.	12	116 | $9^2/_3$
	B 4 „	$= 4 \times 9^2/_3$ „	$= 38^2/_3$ „		108
	C 5 „	$= 5 \times 9^2/_3$ „	$= 48^1/_3$ „		8
	12 Theile		= 116 Klftr.		

Beisp. 2. Zwei Webergesellen A und B fertigen in einer gewissen Zeit 375 Mtr., wie viel jeder, wenn B 8 Mtr. wirkt bis A 7?

Ausr.	A 7 Mtr.;	25×7 Mtr. = 175 Mtr.	15	375 | 25
	B 8 „	25×8 „ = 200 „		30
	15 Mtr.	375 Mtr.		75

So oft 15 Mtr. in 375 Mtr. enthalten sind, so vielmal 7 Mtr. macht A, so vielmal 8 Mtr. macht B.

Beisp. 3. 3 Dampfmaschinen verbrauchen miteinander 847 Ctr. Steinkohlen; wie viel jede, wenn sie sich hinsichtlich ihres Kohlenverbrauchs verhalten wie 5, 7, 9?

Ausr.	A 5 Theile	$= 5 \times 40^1/_3 = 201^2/_3$ Ctr.	21	847 | $40^1/_3$
	B 7 „	$= 7 \times 40^1/_3 = 282^1/_3$ „		84
	C 9 „	$= 9 \times 40^1/_3 = 363$ „		7
	21 Theile	= 847 Ctr.		

Die Maschinen verhalten sich hinsichtlich des Kohlenverbrauchs wie 5, 7, 9, d. h. von 5 + 7 + 9 oder 21 Theilen Kohle verbraucht die Maschine A in derselben Zeit 5, in der B 7 und C 9 verbrauchen. Da nun 1 Theil, nämlich $^1/_{21}$ von 847 Ctr. = $40^1/_3$ Ctr., so kommt auf A $5 \times 40^1/_3$ Ctr. 2c.

Beisp. 4. Von 1280 Mk. erhält A $^1/_3$, B $^2/_5$, C den Rest; wie viel also jeder? (A $426^2/_3$ Mk., B 512 Mk. C $341^1/_3$ Mk.)

Ausr.	3 | 1280 Mk.	5 | 1280 Mk.	A $426^2/_3$ Mk.	1280 Mk.
	A $426^2/_3$ Mk.	256	B 512 Mk.	$938^2/_3$ Mk.
		2	$938^2/_3$	C $341^1/_3$ Mk.
		B 512 Mk.		

Die Theile $^1/_3$ und $^2/_5$ beziehen sich auf's Ganze, d. i. auf 1280 Mk. A erhält also von dieser Summe den 3. Theil, B 2mal den 5. Theil, C erhält das, was nach Abzug der Antheile des A und B im Reste bleibt.

Beisp. 5. A und B liefern in Akkord eine Partie Holz zum Eisenbahnbau. A gibt zum Ankaufe desselben 3500 Mrk, B 4000 Mrk. Ihr Gewinn beträgt 875 Mrk.; wie viel kommt davon auf jeden;

Ausr A 3500 Mrk.
B 4000 Mrk.
Ganze Einlage 7500 Mrk.

A. 7500 Mrk. Einl. 875 Mrk. Gew. 7500 : 3500 = 875 Mrk. : x
3500 Mrk. „ ? A 408⅓ Mrk.

B. 7500 Mrk. Einl. 875 Mrk. Gew. 7500 : 4000 = 875 Mrk. : x
4000 Mrk. „ ? B 466⅔ Mrk.

Mit den zusammengelegten 3500+4000 oder 7500 Mrk. werden 875 Mrk. gewonnen. Die Hälfte der ganzen Einlage gibt Anspruch auf die Hälfte des Gewinnes, ⅓ der Einlage auf ⅓ des Gewinnes, ¼ auf ¼; auf 1 Mrk. der Einlage kommt $^1/_{7500}$ des Gewinnes. So wie sich also die ganze Einlage zur Einlage des Einzelnen verhält, eben so verhält sich der ganze Gewinn zu dem Gewinn des Einzelnen. Man kann nun so verfahren, wie die vorstehende Ausrechnung zeigt, und wobei man spricht: Auf 7500 Mrk. Einlage kommen 875 Mrk. Gewinn, wie viel auf 3500 Mrk. Einlage? Ferner: Auf 7500 Mrk. Einlage kommen 875 Mrk. Gewinn, wie viel auf 4000 Mrk. Einlage?

Da der Gewinn in demselben Verhältniß vertheilt wird, in welchem die beiden Einlagen zu einander stehen; so kann man diese auch als reine Verhältnißzahlen betrachten und durch Kürzung auf den möglichst kleinsten Ausdruck bringen.

A 35~~00~~	7 × 58⅓ Mrk. = 408⅓ Mrk.	
B 40~~00~~	8 × 58⅓ Mrk. = 466⅔ Mrk.	
	15 Theile 875 Mrk.	

15 | 875 | 58⅓
75
125
120
$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

Die beiden Einlagen verhalten sich zu einander, wie 3500 : 4000 = 35 : 40 = 7 : 8. Also erhält A vom Gewinne 7 Theile, wie B 8. Der Gewinn ist daher in 7 + 8 oder 15 gleiche Theile zu theilen. 1 Theil beträgt $^1/_{15}$ von 875 fl. = 58⅓ Mrk. A erhält dieß 7mal, B 8mal.

§. 303. Der Theilungsfuß ist nicht geradezu gegeben.

Beisp. 1. A, B und C haben sich in 2400 Mrk. so zu theilen, daß sich ihre Antheile zu einander verhalten, wie ¼, ⅕ und ⅙. Wie viel macht's für den Einzelnen?

Antw.: Für A $972^{36}/_{37}$, B $778^{14}/_{37}$, C $648^{24}/_{37}$ Mrk.

	60
A ¼	15 Theile.
B ⅕	12 „
C ⅙	10 „
	37 Theile.

Man vergleiche diese Aufgabe mit der unter §. 302 Nr. 4. Dort bezeichnen die Zahlen das Verhältniß der Antheile zum Ganzen, hier das Verhältniß des einen Antheils zum andern. Dort konnten die Antheile aus dem Ganzen sogleich herausgezogen werden; hier muß man die Bruchzahlen, um das Verhältniß der Antheile zu einander zu erkennen, erst gleichnamig machen, und dann, um zu wissen, in wie viel gleiche Theile die Summe zu theilen ist, zusammenzählen. Nachdem dieß geschehen ist, heißt es: 37 Theile = 2400 Mrk.;

wie viel betragen die 15 Theile für A, die 12 Theile für B und die 10 Theile für C? Die Ausrechnung ist bekannt.

Beisp. 2. 3600 Mrk. sind so zu theilen, daß die Theile für A, B und C im Verhältniß zu einander stehen, wie die Zahlen $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{2}$ und 2; wie viel machts für jeden?

Antwort: Für A 576 Mrk., B 1296 Mrk., C 1728 Mrk.

6
A $\frac{2}{3}$ | 4 Theile 25 Th. = 3600 Mrk.; was thun 4 Theile?
B $1\frac{1}{2}$ | 9 „ 25 Th. = 3600 „ „ „ 9 „
C 2 | 12 „ 25 Th. = 3600 „ „ „ 12 „
| 25 Theile.

1 Theil = 3600 Mrk., getheilt durch 25 = 144 Mrk. A bekommt also 4 × 144 Mrk., B 9 × 144 Mrk., C 12 × 144 Mrk.

Beisp. 3. 464 Pfd. Waare werden von A, B und C unter sich in der Art getheilt, daß B $1\frac{1}{2}$mal so viel als A, und C $\frac{3}{4}$mal so viel als B erhält; wie viel kommt auf jeden?

Antwort: Auf A 128 Pfd., B 192 Pfd., C 144 Pfd.

8
A 1 Th. | 8 Theile
B $1\frac{1}{2}$ „ | 12 „
C $1\frac{1}{8}$ „ | 9 „
| 28 Theile

Den Antheil des A bezeichnen wir mit 1. Der Antheil des B ist $1\frac{1}{2}$mal so groß; er beträgt also $1\frac{1}{2} \times 1 = 1\frac{1}{2}$. Der Antheil des C ist $\frac{3}{4}$mal so groß als der des B; er beträgt daher $\frac{3}{4} \times 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{8}$.

Beisp. 4. A, B und C haben 2100 Mk. so unter sich zu theilen, daß B 75 Mk. mehr als A, und C wieder 75 Mk. mehr als B erhält; wie viel bekommt jeder von ihnen?

Antwort: A 625 Mk. B 700 Mk., C 775 Mk.

Ausrechnung.

A 1 Theil
B 1 „ + 75 Mk.
C 1 „ + 150 Mk. (= 75 + 75 Mk.
Die 3 Theile + 225 Mk. = 2100 Mk.

Was B und C über 1 Theil, also mehr denn A bekommen, nehmen sie sich im Voraus weg. Das Uebrige theilen sie mit dem A gleichheitlich.

2100 Mk.
—225 Mk. Voraus
3 | 1875 | 625 Mk.

Also erhält A . . . . . . 625 Mk.
B 625 + 75 = 700 Mk.
C 625 + 150 = 775 Mk.

Beisp. 5. Von 4800 Mrk. soll B 240 Mrk. weniger als A, und C 120 Mrk. weniger als B erhalten; wie viel kommt auf jeden?

Antwort: Auf A 1800 Mrk., B 1560 Mrk, C 1440 Mrk.

A 1 Theil
B 1 „ — 240 Mrk.
C 1 „ — 360 „ näml. 1 Th. — (240 + 120 Mrk.)
Die 3 Theile — 600 Mrk. = 4800 Mrk.

4800 Mrk. Also erhält A . . . . . 1800 Mrk
+600 „ B 1800 — 240 = 1560 „
3 | 5400 M. | 1800 Mrk. C 1800 — 360 = 1440 „

Wollen B und C zwei volle Theile erhalten, mit A also gleichheitlich theilen; so müssen sie zuvor 240+360 oder 600 Mrk. von ihrem eigenen Gelde zulegen. Die zu vertheilende Summe beträgt dann 4800 + 600 oder 5400 Mrk. Davon bekommt jeder $^1/_3$ = 1800 Mrk. So viel erhält in der That aber nur A. Unter den 1800 Mrk., die auf B fallen, sind 240 Mrk. seines eigenen Geldes; sein Antheil beträgt also nur 1800 — 240 oder 1560 Mrk. Und unter den 1800M., die auf C fallen, sind 360 Mrk., die er zuvor zulegte; mithin beträgt sein Antheil nur 1800 Mrk. — 360 = 1440 Mrk.

Beisp. 6. Wie vertheilen sich 1800 Mrk., wenn B 150 Mrk. mehr als A, C 240 Mrk. weniger als A, und D 60 Mrk. mehr als B erhalten soll?

Ausrechnung.

A 1 Theil
B 1 „ + 150 Mrk.
C 1 „ — 240 „
D 1 „ + 210 „ (= 150 + 60 Mrk.)
4 Theile + 120 Mrk. = 1800 Mrk.

B + 150 Mrk.
D + 210 „
+ 360 Mrk.
C — 240 „
+ 120 Mrk.

1800 Mrk. Also erhält A . . . . . 420 Mrk.
—120 „ B 420 + 150 = 570 „
4 | 1680 Mrk. | 420 Mrk. C 420 — 240 = 180 „
D 420 + 210 = 630 „

B und D sollen 150+210 oder 360 Mrk. mehr erhalten als 2 Theile, C dagegen 240 M. weniger als 1 Theil. Das gleicht sich gegenseitig theilweise aus. Die 360 Mrk. mehr werden durch die 240 Mrk. weniger bis auf 120 Mrk. aufgehoben. Die 1800 Mrk. sind also in 4 Theile und 120 Mrk. zu zerlegen. Oder: B und D dürfen miteinander 360 Mrk. voraus wegnehmen und dann noch mit A gleichheitlich theilen. C aber muß, um mit den andern gleichheitlich theilen zu dürfen, 240 Mrk. zulegen. Was geschieht nun einfach? C gibt seine 240 Mrk. an B und D, und diese nehmen dafür von der Summe nur noch 360—240 d. i. 120 Mrk. Den Rest theilen sie dann in 4 gleiche Theile.

Beisp. 7. A, B und C haben 175 Stück einer Waare in folgender Weise unter sich zu theilen: So oft A 2 nimmt, darf B 3 nehmen, und so oft B 4 nimmt, darf C 5 nehmen. Wie viel kommt auf jeden von ihnen?

Antwort: Auf A 40, auf B 60, auf C 75.

Ausr. a.

A	B	C
2	3	
	4	5
8 +	12 +	15 = 35.

So oft A 2 Stücke nimmt, so oft darf B 3 nehmen; nimmt A 4×2 oder 8 Stücke, so darf B auch 4 × 3 oder 12 nehmen. So oft B 4 Stücke nimmt, so oft darf C 5 nehmen; nimmt B 12 oder 3 × 4 Stücke, so darf C auch 3 × 5 oder 15 nehmen. Wenn also A 8 Stücke nimmt, so darf B 12 nehmen, und wenn B 12 nimmt, so darf C 15 nehmen. So oft demnach 8+12+15 oder 35 Stücke in 175 enthalten sind, so vielmal 8 Stücke erhält A, so vielmal 12 erhält B, und so vielmal 15 erhält C.

Ausr. b. Wir nehmen die Aufgabe so: der Antheil des A hat sich zu dem des B wie 2 : 3, und der Antheil des B hat sich zu dem

des C wie 4 : 5 zu verhalten. Nach dieser Auffassung setzen und rechnen wir:

A	B	C			
2 :	3		A	8	Theile
	4 :	5	B	12	„
			C	15	„
8 :	12 :	15		35	Theile = 175 Stück.

2 verhält sich zu 3, wie 2×2 zu 2×3, wie 3×2 zu 3×3, wie 4 × 2 zu 4 × 3 2c. Und 4 verhält sich zu 5, wie 2 × 4 zu 2 × 5, wie 3 × 4 zu 3 × 5 u. s. w.

Mit welcher Zahl werden wir nun aber das Verhältniß 2 : 3 und mit welcher das Verhältniß 4 : 5 erweitern müssen, damit sich für B das eine, wie das andere Mal die nämliche Zahl als Produkt ergibt? Da 4 × 3 = 3 × 4, so multipliciren wir die 2 Glieder des ersten Verhältnisses durch 4 und die des andern durch 3. So wie sich 2 zu 3 verhält, so verhält sich 8 : 12, und so wie sich 4 zu 5 verhält, so verhält sich 12 : 15.

Beisp. 8. Drei Gemeinden haben zusammen 1420 Mrk. aufzubringen. Die Steuern der Gemeinden A und B verhalten sich wie $^1/_2$ zu $^3/_5$, und die von B und C wie $^2/_3$ zu $^3/_4$. Wie viel trifft auf jede Gemeinde? (Auf A 400 Mrk., B 480 Mrk., C 540 Mrk.)

A	B	C			
$^1/_2$:	$^3/_5$		A	$^1/_3$	20
	$^2/_3$:	$^3/_4$	B	$^2/_5$	24
			C	$^9/_{20}$	27
$^1/_3$:	$^2/_5$:	$^9/_{20}$			71

Da $^2/_3 \times {}^3/_5 = {}^3/_5 \times {}^2/_3$, so multipliciren wir die Glieder des ersten Verhältnisses mit $^2/_3$ und die Glieder des andern mit $^3/_5$.

$$^2/_3 \times {}^3/_5 = {}^2/_5, \text{ und } {}^2/_3 \times {}^1/_2 = {}^1/_3.$$
$$^3/_5 \times {}^2/_3 = {}^2/_5, \text{ und } {}^3/_5 \times {}^3/_4 = {}^9/_{20}.$$

Die Steuern der 3 Gemeinden verhalten sich also wie $^1/_3 : {}^2/_5 : {}^9/_{20}$. Und in eben demselben Verhältniß müssen auch die Beiträge zu einander stehen, welche sie zur Deckung der Summe von 1420 Mrk. aufzubringen haben.

Die Richtigkeit des Verfahrens, nach welchem sich zuletzt die Verhältnißzahlen 20, 24 und 27 ergeben, wird, wie folgt, nachgewiesen:

$$^1/_2 : {}^3/_5 = {}^5/_{10} : {}^6/_{10} = 5 : 6 = 20 : 24.$$
$$^2/_3 : {}^3/_4 = {}^8/_{12} : {}^9/_{12} = 8 : 9 = 24 : 27.$$

Sowie sich also $^1/_2$ zu $^3/_5$ verhält, so verhält sich 20 zu 24, und so wie sich $^2/_3$ zu $^3/_4$ verhält, so verhält sich 24 zu 27.

§. 304. Zusammengesetzte Theilungsrechnungen.

Beisp. 1. A gibt 200 Mk. auf 4 Mon., B 240 Mk. auf 3 Mon. und C 400 Mk auf $1^1/_2$ Mon. in den Handel. Gewinn 424 Mk. Wie viel gebührt jedem? (A 160, B 144, C 120 Mk.)

Auflösung.

Wenn ein Geschäft, wie vorausgesetzt wird, gleichmäßig rentirend ist, so daß z. B. 100 Mk. in dem einen Monate eben so viel Gewinn abwerfen als im andern; so folgt, daß mit 100 Mk. in 2 Mon.

zweimal so viel gewonnen wird, als in 1 Mon., und in 3 Mon., dreimal so viel, als in 1 Monate.

Gleiche Einlagen bringen in gleicher Zeit gleichen Gewinn; eine gleiche Einlage bringt in doppelter Zeit doppelten Gewinn; eine doppelte Einlage bringt in doppelter Zeit 4fachen Gewinn.

Wenn würden sich die Antheile, welche nach unserer Aufgabe A, B und C von dem Gewinn beanspruchen können, allein nach den Einlagen richten? Wenn diese gleich lange im Geschäfte verwendet gewesen wären. Das war aber nicht der Fall, sondern A hat sich an demselben 4 Mon., B 3 Mon. und C nur $1^1/_2$ Monat betheiligt. Ihre Gewinn-Antheile hängen daher nicht nur von ihrer Einlage, sondern auch von der Zeit ihrer Betheiligung ab. Dieß doppelte Abhängigkeitsverhältniß führen wir auf ein einfaches zurück. Wir suchen, welche Einlagen in 1 Monate eben so viel Gewinn abwerfen, als die gegebenen Einlagen in den verschiedenen Zeiten.

A 200 Mk. auf 4 Mon.	= 4×200 = 800 Mk. 1 M.	20 Thl.
B 240 „ „ 3 „	= 3×240 = 720 „ 1 „	18 „
C 400 „ „ $1^1/_2$ „	= $1^1/_2 \times 400$ = 600 „ 1 „	15 „
	A, B und C legten also 2120 Mk 1 M.	53 Thl.

200 Mk. werfen in 4 Mon. eben so viel Gewinn ab, wie 4×200 Mk. oder 800 Mk. in 1 Monat. Eben so werfen 240 Mk. in 3 Mon. denselben Gewinn ab, wie 3×240 oder 720 Mk in 1 Monat. Und eben so geben 400 Mk. in $1^1/_2$ Mon. den gleichen Gewinn, wie $1^1/_2 \times 400$ oder 600 Mk. in 1 Monat.

Die zusammengesetzte Aufgabe ist nun in eine einfache verwandelt. Diese heißt: Mit 2120 Mk. werden 424 Mk. gewonnen; wie viel mit 800 Mk., mit 720 Mk, mit 600 Mk.? Da diese Zahlen zugleich das Verhältniß bezeichnen, nach welchem der Gewinn zu vertheilen ist, so kann man sie auch sogleich kürzen und dann ihre Summen ($20+18+15=53$) als die Anzahl der Theile betrachten, in welche der Gewinn zu theilen ist.

Beisp. 2. A und B machen 6 Mrg. Land urbar. A stellt dazu 4 Arbeiter auf 20 Tage, B 5 Arb. auf 18 Tage. Wie viel hat jeder von den 6 Mrg. zu beanspruchen? (A $2^{14}/_{17}$, B $3^3/_{17}$ Mrg.)

A 4 Arb. 20 Tg.	= 20×4 od. 80 Arb. 1 Tg.
B 5 „ 18 „	= 18×5 od. 90 „ 1 Tg.
	A u. B stellten zusammen 175 Arb. 1 Tg.

Die Aufgabe heißt jetzt: Auf 170 Arb. kommen 6 Mrg.; wie viel a. auf 80 Arb.? b. auf 90 Arb.?

Beisp. 3. A beginnt ein Geschäft mit 3000 Mk. Nach 4 Mon. tritt B mit 2000 Mrk. dazu, und nach weiteren 3 Monaten C mit 4000 Mrk. Am Schlusse des Jahrs beträgt ihr Gewinn 2400 Mrk; wie viel gebührt jedem? (A 1200 Mrk., B $533^1/_3$ Mrk., C $666^2/_3$ Mrk.)

Aufl. A hat 3000 Mrk. 12 Mon., B 2000 Mrk. $12-4=8$ Mon., C 4000 Mrk. $8-3=5$ Mon. in dem Geschäfte. Das Uebrige ist bekannt.

Beisp. 4. 1420 Mrk. sind so zu vertheilen, daß A $\frac{1}{2}$ + 100 Mrk., B $\frac{1}{3}$ + 150 Mrk., C $\frac{1}{4}$ + 130 Mrk. erhält. Wie viel kommt auf den Einzelnen? (A 580 Mrk., B 470 Mrk., C 370 Mrk.)

A $\frac{1}{2}$ + 100 Mrk. = 6 Theile + 100 Mrk.
B $\frac{1}{3}$ + 150 „ = 4 „ + 150 „
C $\frac{1}{4}$ + 130 „ = 3 „ + 130 „
13 Theile + 380 Mrk. = 1420 Mrk.

Beisp. 5. A, B und C legen 750 Mrk. in der Weise zusammen, daß B 2mal so viel gibt als A und 50 Mrk., C $1\frac{1}{2}$mal so viel als B weniger 150 Mrk. Wie viel legt jeder ein? (A $129\frac{1}{6}$ Mrk., B $308\frac{1}{3}$ Mrk., C $312\frac{1}{2}$ Mrk.)

A 1 Theil
B 2 „ + 50 Mrk.
C 3 „ − 75 „ denn $1\frac{1}{2}$ × (2 Theile + 50 M.) − 150 M. =
6 Th. − 25 Mrk. 3 Theile + 75 „ − 150 „ = 3 Th. − 75 M.

Mischungs-Rechnung.

§. 305. Vorbemerkung.

Ein Gastwirth hat zweierlei Sorten Wein, das Liter zu 60 Pfennig und zu 90. Ergeben sich einmal von beiden Sorten Reste, so gießt er diese zusammen. Dabei entsteht für ihn die Frage: Wie muß ich das Liter schenken, damit ich aus dem Mischling eben so viel löse, als ich aus den unvermischten Sorten gelöst haben würde? Es ist also aus dem Werthe der vermischten Sorten der Werth von einem Theile der Mischung zu bestimmen. Oder es ist der Fall, daß manchem der Gäste der Wein zu 60 Pfg. zu gering, der zu 90 Pfg. zu theuer ist. Man wünscht eine Mittelsorte, das Liter zu 75 Pfg. Diesem Wunsche kann der Wirth entsprechen, indem er aus beiden Sorten ein Mittelsorte zu diesem Preise bildet. Nur fragt es sich, wie viel er von jeder Sorte nehmen müsse, damit weder er selbst zu kurz kommt, noch der Gast. Es ist also das Verhältniß der Quantitäten zu bestimmen, in welchem die zu mischenden Sorten zu einander stehen sollen. Dieß sind die beiden Hauptarten von Mischungsrechnungen. Die Gegenstände, bei welchen eine Mischung stattfindet, sind theils trockene, als: Kaffee, Tabak, Getreide, Mehl u. s. w.; theils flüssige, als: Wein, Weingeist oder Spiritus, Branntwein, Milch 2c.; theils Metalle, welche, wenn sie gemischt oder legirt werden sollen, flüssig gemacht werden müssen.

A. Aus dem Werthe (oder der Qualität) der vermischten Sorten ist der Werth von einem Theil der Mischung zu finden.

Trockene und flüssige Dinge.

§. 306.

Mündlich.

Beisp. 1. A mischt 2 Sorten Wein und nimmt von der einen Sorte so viel, als von der anderen. Wie viel ist 1 Liter des Mischlings

werth, wenn das Liter von der einen Sorte 1 Mrk. 20 Pfg. und von der andern 80 Pfg. kostet?

Aufl. Der Wein ist bereits gemischt. Die Mischung enthält gleichviel von jeder Sorte. In 1lt derselben befindet sich daher $^1/_2$ lt der besseren und $^1/_2$ lt der geringeren Sorte; in 2 lt Mischung befindet sich 1lt von jeder Sorte. 2 lt der Mischung kosten daher so viel, als 1lt der besseren und 1lt der geringeren Sorte zusammen, nämlich 1 Mrk. 20 Pfg. + 80 Pfg. = 2 Mark. Kosten aber 2 lt Mischling 2 Mark, so kostet 1lt die Hälfte davon, nämlich 1 Mark.

Beisp. 2. A mischt 3 Sorten Kaffee, das Pfd. zu 90 Pfg., zu 1 Mrk. 20 Pfg. und zu 1 Mrk. 50 Pfg.; wie viel ist 1 Pfd. der Mischung werth, wenn er von jeder Sorte gleichviel nimmt.

Ausr. 90 + 120 + 150 = 360 Pfg.; die 3 Pfd. Mischung kosten zusammen 360 Pfg.; 1 Pfd. kostet also $^1/_3$ von 360 Pfg. = 1 Mrk. 20 Pfg.

Bsisp. 3. Jemand mischt unter 5 lt Wein à 60 Pfg. 1 lt Wasser; welchen Werth hat 1 lt von der Mischung?

Aufl. 5 lt Wein und 1lt Wasser zusammengemischt geben 6 lt. Die 5 lt Wein machen 5 × 60 Pfg. = 3 Mrk. Denselben Werth haben auch die 6 lt Mischung. Mithin kommt 1 lt auf $^1/_6$ von 3 Mrk. = 50 Pfg.

Beisp. 4. Ein Kaufmann mengt zusammen 2 Pfd. Tabak à 80 Pfg. und 3 Pfd. à 1 Mrk. 30 Pfg.; wie hoch kommt das Pfd.?

Ausr. 2 + 3 Pfd. Tabak zusammengemengt, gibt 5 Pfd. Die 2 Pfund à 80 Pfg. machen 160 Pfg., und die 3 Pfd. à 130 Pfg. machen 390 Pfg.; die 5 Pfd. haben also einen Werth von 160 Pfg. + 390 Pfg. = 550 Pfg. Das Pfund kommt sonach auf $^1/_5$ von 550 = 110 Pfg. = 1 Mrk. 10 Pfg.

Beisp. 5. A mischt 2 Sorten Spiritus untereinander, nämlich 20 lt zu 75 Grad und 30 lt zu 60 Grad; welchen Gehalt hat die Mischung?

Aufl. Der Spiritus hat 75 Grad, wenn unter 100 Raumtheilen 75 Theile reiner Weingeist (Alkohol) und 25 Theile Wasser sind. 20 + 30 lt = 50 lt. 1 lt zu 75 Grad enthält 75 Theile Weingeist, 20 lt enthalten also 20 × 75 oder 1500 Theile. 30 lt zu 60 Grad enthalten 30 × 60 oder 1800 Theile. Die 50 lt enthalten also 1500 + 1800 oder 3300 Theile Weingeist. Auf 1 Liter kommt $^1/_{50}$ davon; $^1/_{50}$ von 3300 = 66. Die Mischung hat also einen Gehalt von 66 Grad.

Beisp. 6. Man mengt $^1/_2$ Ctr. Mehl, den Ctr. zu 24 Mrk., und $^3/_4$ Ctr. zu 20 Mrk. untereinander; wie berechnet sich 1 Ctr. der Mischung?

Ausr. $^1/_2$ + $^3/_4$ Ctr. = $1^1/_4$ Ctr. Nun suche ich, was diese werth sind. Der Ctr. zu 24 Mrk. macht für den halben Ctr. 12 Mrk.; und der Ctr. zu 20 Mrk. beträgt für $^3/_4$ Ctr. 15 Mrk. Die $1^1/_4$ Ctr. kosten also 12 + 15 Mrk = 27 Mrk. Mithin kommt $^1/_4$ Ctr. auf den 5ten Theil von 27 Mrk. = 5 Mrk. 40 Pfg. und der Ctr. auf 4 × 5 Mrk. 40 Pfg. = 21 Mrk. 60 Pfg.

Schriftlich.

Beisp. 1. Wie hoch kommt 1 Pfd., wenn 7 Pfd Tabak à 1,15 Mrk. unter 9 Pfd. à 1,40 Mrk. gemengt werden?

Ausr.	7 Pfd. à 1,15 Mrk.	= 8,05 Mrk.	16	20,65	1,29...
	9 Pfd. à 1,40 „	= 12,60 „		16	
	16 Pfd. Mischung	= 20,65 Mrk.		46	
	1 Pfd. Mischung	= 1,29 Mrk.		32	
				145	
				144	

Beisp. 2. Wie berechnen sich 24 Pfd., wenn man untereinander mischt $2^1/_2$ Ctr. à 120 Mrk. und $3^1/_4$ Ctr. à 140 Mark?

Ausr. $2^1/_2$ Ctr. à 120 Mrk. $= 2^1/_2 \times 120$ Mrk. $= 300$ Mrk.
$3^1/_4$ Ctr. à 140 „ $= 3^1/_4 \times 140$ „ $= 455$ „

$5^3/_4$ Ctr. Mischung $= 755$ Mrk.

575 Pfd. 755 Mrk. 575 Pfd. : 24 Pfd. = 755 Mrk. : x
24 Pfd. ? x = 31 Mk. 51,1 .. Pfg.

Beisp. 3. A kauft 4,5 Hl Wein à 36 Mrk. und 7,8 Hl à 48 Mrk. und mischt dieß zusammen. Wie muß er das Liter ausschenken, um 40 %. zu gewinnen?

Ausr. 4,5 Hl à 36 Mark $= 4{,}5 \times 36$ Mrk. $= 162$ Mark
7,8 „ à 48 „ $= 7{,}8 \times 48$ Mrk. $= 374{,}4$ „

12,3 Hl Mischung $= 536{,}4$ Mrk.

Kosten 1230 lt Mischung 536,4 Mk.,

so kostet 1 lt „ $\frac{5364 \text{ Mk.}}{10 . 1230}$,

und mit 40 % Gewinn $\frac{5364 \,.\, 140}{10 . 1230 . 100} = 0{,}61..$ Mk.

Gold und Silber.

§. 307. Die bisherige und die neue Gehaltsbezeichnung.*)

Sind Gold und Silber ohne allen Zusatz, so heißen sie fein, und in diesem Falle wird auch das Gewicht des Metalles ein feines genannt. Ein feines Kilogramm oder ein Kilogramm fein ist also ein Kilogr. Silber oder Gold ohne allen Zusatz. Das Gewicht des gemischten oder legirten Metalles dagegen heißt ein rauhes; ein rauhes Kilogr. oder ein Kilogr. rauh ist demnach ein Kilogr. legirtes Gold oder Silber.

Bisher wurde der Feingehalt der edlen Metalle nach der kölnischen Mark (= 233,8 gr) bestimmt und diese beim Silber in 16 Loth à 18 Grän, beim Gold in 24 Karat à 12 Grän eingetheilt. Feines Silber wurde als 16löthig, feines Gold als 24karatig bezeichnet. 13löthiges Silber hieß eine Silberlegirung, wenn die Mark 13 Loth feines Silber und 3 Loth Zusatz enthielt, und 16karatiges Gold hieß eine Goldlegirung, wenn die Mark 16 Karat feines Gold und 8 Karat Zusatz enthielt.

In Folge der Einführung des Kilo als allgemeiner Gewichtseinheit tritt für die bisher übliche Bezeichnungsweise des Feingehaltes die tausendtheilige Gehaltsangabe ein. Feines Gold und Silber wird hiernach mit $^{1000}/_{1000}$ bezeichnet.

Eine Gold- oder Silberlegirung von $^{650}/_{1000}$ Feingehalt ist eine solche, welche in tausend Theilen 650 Theile feines Gold oder Silber enthält. Die tausend Theile beziehen sich jedoch auf kein bestimmtes,

*) Nach Millauer's Fein-, Preis- und Legirungsrechnungen bearbeitet.

sondern auf jedes Gewicht, auf jede Quantität. Enthält eine Legirung 725 Tausendtheile feines Metall, so befinden sich in 1 Kilogramm derselben 0,725 Kilogramm, in 1 Pfund 0,725 Pfund, in 1 Dgr 0,725 Dgr feines Gold oder Silber.

Der Kürze wegen läßt man gewöhnlich den Ausdruck „Tausendtheile" ganz weg und sagt z. B. statt 725 Tausendtheile bloß 725 theilig oder auch 725 fein.

Die Umrechnung der bisherigen Gehalts-Bezeichnung in die neue und dieser in jene ist sehr einfach.

Bei dem Silber ist 16löthig = 1000theilig, bei dem Golde ist 24 karatig = 1000 theilig. 14 löthig oder 14 Loth fein = $\frac{14}{16}$ = $\frac{7}{8}$ = 0,875; also ist 14 löthiges Silber = 875 theiliges. 14 karatig oder 14 Karat fein = $\frac{14}{24}$ = $\frac{7}{12}$ = 0,583 ...; also ist 14 karatiges Gold = 583 fein. Will man die neue Bezeichnung, z. B. 640 Tausendtheile, in der alten ausdrücken, so heißt es beim Silber: 1000 Theile = 16 Loth; was machen 640 Theile? Antwort: 10,24 Loth; also ist 640 theiliges Silber = 10,24 löthiges Silber.

Beim Golde heißt es: 1000 Theile = 24 Karat; was machen 640 Theile? Antwort: 15,36 Karat; also ist 640 theiliges Gold = 15,36 karatiges Gold.

Anm. Hier ist es am Platze, dem Schüler zu bemerken, daß das Gramm wieder in 10 Decigramm, das Decigr. in 10 Centigramm und das Centigr. in 10 Milligramm eingetheilt wird.

§. 308. Aufgaben mit Ausrechnung.

1) Wie viel feines Metall ist enthalten in 3 Kilogramm 785 theiligen Silbers?

Ausr. 1 Kgr enthält 0,785 Kgr f. S.; 3 Kgr enthalten also 3 × 0,785 = 2,355 Kgr = 2 Kgr 355 gr f. S.

Oder: Da 0,785 Kgr = 785 gr.; so kann man auch rechnen: 1Kgr enthält 785gr f. S.; also enthalten 3Kgr 3 × 785gr = 2355gr = 2Kgr 355gr.

2) Wie viel feines Metall ist enthalten in 72,5 Dgr 535theiligen Goldes?

Ausr. 1 Dgr enthält 0,535 Dgr f. G.; 72,5 Dgr enthalten 72,5mal so viel.

```
 0,53 5 Dgr
   72,5
 ----------
   2675
  1070
 3745
 ----------
 38,7875 Dgr = 38 Dgr 7,875 gr f. G.
```

3) Von welchem Gehalte wird die Mischung, wenn man $3\frac{1}{2}$ Kgr 750theiliges und $2\frac{1}{5}$ Kgr 680theiliges Silber legirt?

Ausr. 3,5 Kgr = 3,5 × 0,750 Kgr	=	2,625 Kgr f. S.
2,2 „ = 2,2 × 0,680 „	=	1,496 „ f. S.
5,7 Kgr Mischung enthalten		4,121 Kgr f. S.

Wie viel feines Silber enthält nun 1 Kgr?

57 | 41,21 | 0,7229 . ., nahe 0,723 Kgr

Die Mischung wird also 723theilig.

4) Wie viel theilig ist die Legirung, welche aus 1 Kgr 28 Dgr 900 theiligen, 2 Kgr 55 Dgr 872theiligen und 4 Kgr 80 Dgr 333theil. Silbers gebildet wird?

Ausrechnung.

1 Kgr	28 Dgr	= 1,28 × 0,900 Kgr	=	1,152	Kgr	f. S.
2 „	55 „	= 2,55 × 0,872 „	=	2,2236	„	f. S.
4 „	80 „	= 4,80 × 0,333 „	=	1,5984	„	f. S.
8 Kgr	63 Dgr	Mischung enthalten		4,974	Kgr	f. S.

Wie viel feines Silber kommt auf 1 Kgr?

Antw. 8,63 | 4,974 | 0,5763 . . Kgr

Die Mischung wird also 576 theilig.

B. Aus dem Werthe der Sorten und der Mischung ist das Mischungs-Verhältniß zu bestimmen.

Hier sind entweder nur zwei, oder mehr als zwei Sorten zur Mischung gegeben. Im ersteren Falle läßt die Aufgabe nur ein richtiges Resultat zu; im anderen Falle sind mehrere möglich. Es ist daher diese Abtheilung nach der Anzahl der Sorten in zwei Unterabtheilungen zu zerlegen.

I. Mit zwei Sorten.

§. 309. Die Menge der Mischung ist nicht bekannt.

Mündlich.

1) A hat 2 Sorten einer Waare, das Pfund zu 30 Pfg. und zu 40 Pfg. Er will aus beiden eine Sorte mischen, von welcher das Pfd. 35 Pfg. kosten soll. In welchem Verhältnisse wird er von beiden Sorten nehmen müssen?

Nimmt A 1 Pfd. der besseren Sorte (à 40 Pfg.), so ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 5 Pfg. Nimmt er 1 Pfd. der geringeren Sorte (à 30 Pfg.), so ergibt sich ein Mangel von 5 Pfg. Ueberschuß und Mangel heben sich gegenseitig auf. Unvermischt kosten die 2 Pfd. 40 + 30 Pfg. und vermischt 2 × 35 Pfg., in beiden Fällen 70 Pfg.; A wird daher, um 2 Pfd. Mischung zu erhalten, von jeder Sorte 1 Pfd., um 4 Pfd. Mischung zu erhalten, von jeder Sorte 2 Pfd., mithin immer von jeder Sorte gleichviel nehmen.

2) In welchem Verhältnisse wird A von den beiden Sorten (à 30 Pfg. und 40 Pfg.) nehmen müssen, wenn 1 Pfd. der Mischung 32 Pfg. kosten soll?

An dem Pfunde der besseren Sorte ergibt sich ein Ueberschuß von 8 Pfg., an dem Pfunde der geringeren Sorte ein Mangel von 2 Pfg. Um den Ueberschuß von 8 Pfg. auszugleichen, sind 4 × 2 Pfg. Mangel, also 4 × 1 Pfd. der geringeren Sorte erforderlich. A muß daher zu 1 Pfd. der besseren Sorte 4 Pfd. von der geringeren nehmen.

3) Wie aber, wenn die Mischung einen Werth von 36 Pfg. haben soll?

a. Von der besseren Sorte ausgehend. An 1 Pfd. der besseren Sorte ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 4 Pfg. Wie viel muß ich nun von

der geringeren Sorte nehmen, um diesen Ueberschuß auszugleichen? An 1 Pfunde der geringeren Sorte ergibt sich ein Mangel von 6 Pfg. Man wird daher von der geringeren Sorte so viel mal 1 Pfd. zu nehmen haben, als 6 Pfg. in 4 Pfg. enthalten sind, nämlich $^2/_3$ Pfund. Zu 1 Pfund der besseren Sorte nimmt man also $^2/_3$ Pfund von der geringeren. Die Mischung besteht mithin aus $^3/_3 + ^2/_3$ Pfund oder aus 5 gleichen Theilen, wovon 3 Theile auf die bessere Sorte und 2 Theile auf die geringere kommen.

b. Von der geringeren Sorte ausgehend. An dem Pfunde der geringeren Sorte ergibt sich im Preise ein Mangel von 6 Pfg. Wie viel muß ich nun von der besseren Sorte nehmen, um diesen Mangel zu decken? An dem Pfunde der besseren Sorte ergibt sich ein Ueberschuß von 4 Pfg. Um den Mangel von 6 Pfg. auszugleichen, ist daher so viel mal 1 Pfund von der besseren Sorte erforderlich, als 4 Pfg. in 6 Pfg. enthalten sind, nämlich $1^1/_2$. Die Mischung besteht sonach aus 1 Pfd. der geringeren Sorte und aus $1^1/_2$ Pfd. der besseren, mithin aus $^2/_2 + ^3/_2$ Pfd. oder aus 5 gleichen Theilen, wovon wieder 2 Theile auf die geringere Sorte kommen und 3 Theile auf die bessere.

c. Wir suchen, wie viel von jeder Sorte zu nehmen ist, damit sich 1 Pfennig Ueberschuß und 1 Pfennig Mangel ergibt. An 1 Pfd. der besseren Sorte ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 4 Pfg.; zu 1 Pfg. Ueberschuß gehört also $^1/_4$ Pfd. dieser Sorte. An 1 Pfd. der geringeren Sorte ergibt sich ein Mangel von 6 Pfg.; zu 1 Pf. Mangel gehört daher $^1/_6$ Pfd. dieser Sorte. Die Mischung besteht hiernach aus $^1/_4$ Pfd. der besseren Sorte und aus $^1/_6$ Pfd. der geringeren, im Ganzen also aus $^1/_4 + ^1/_6$ oder $^3/_{12} + ^2/_{12}$ Pfd., d. i. aus 3 Theilen der besseren Sorte und aus 2 Theilen der geringeren.

d. Wir suchen, wie viel von jeder Sorte zu nehmen ist, damit sich ein Vielfaches von Ueberschuß und Mangel ergibt. Der Ueberschuß = 4 Pfg., der Mangel = 6 Pfg.; 4 × 6 = 24. Ein Pfd. der besseren Sorte gibt 4 Pfg. Ueberschuß; um einen Ueberschuß von 24 Pfg. zu erhalten, sind so viele Pfund dieser Sorte erforderlich, als 4 Pfg. in 24 Pfg. enthalten sind, nämlich 6. — Ein Pfund der geringeren Sorte gibt einen Mangel von 6 Pfg.; soll sich ein Mangel von 24 Pfg. ergeben, so muß man so viele Pfund von dieser Sorte nehmen, als 6 Pfg. in 24 Pfg. enthalten sind, nämlich 4. Man nimmt also von der besseren Sorte 6 Pfd. und von der geringeren 4, oder was dasselbe ist, von jener 3 und von dieser 2.

4) **Jemand hatte 2erlei Sorten Wein, das Liter zu 45 Pfg. und zu 90 Pfg.; in welchem Verhältniß muß er beide Sorten mischen, um einen Wein zu 60 Pfg. zu erhalten?**

Aufl. An 1 lt der besseren S. ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 30 Pfg., an 1 lt der geringeren S. ein Mangel von 15 Pfg.; um den Ueberschuß von 30 Pfg. aufzuheben, sind 2 × 15 Pfg., also 2 × 1 lt von der geringeren S. erforderlich. Mithin muß man zu 1 lt von der besseren S. 2 lt von der geringeren nehmen.

5) **Ein Melber hat das Pfund Mehl zu 24 Pfg. und zu 36 Pfg.; wie muß er mischen, um das Pfd. zu 32 Pfg. zu erhalten?**

Aufl. Die Mischung soll 32 Pfg. kosten. An 1 Pfd. zu 24 Pfg. ergibt sich im Preise ein Mangel von 8 Pfg., an dem Pfund zu 36 Pfg. ein Ueberschuß von 4 Pfg. Um den Mangel von 8 Pfg. zu decken, sind 2×4 Pfg., also 2×1 Pfd. von der besseren Sorte erforderlich. Der Melber muß also zu 1 Pfd. der geringeren Sorte 2 Pfd. von der besseren nehmen.

Schriftlich.

Beisp. 1. Aus 2 Sorten Mehl, zu 30 Pfg. und 40 Pfg., soll eine Mittelsorte zu 36 Pfg. gemischt werden. Wie ist das Mischungsverhältniß?

Erste Weise.

Bessere Sorte 40	36	+ 4	$^1/_4$	$^3/_{12}$	3
Geringere Sorte 30	36	— 6	$^1/_6$	$^2/_{12}$	2

An dem Pfunde der besseren Sorte ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 4 Pfg., an dem Pfunde der geringeren Sorte ein Mangel von 6 Pfg. Ich nehme daher $^1/_4$ Pfund von jener und $^1/_6$ Pfd. von dieser. So macht's 1 Pfg. Ueberschuß und 1 Pfg. Mangel, welche sich gegenseitig decken. $^1/_4 + {}^1/_6 = {}^3/_{12} + {}^2/_{12}$. Die Mischung verlangt also 3 Th. von der besseren Sorte und 2 Theile von der geringeren.

Zweite Weise.

Bessere Sorte	40 Pf.	+ 4 Pf.	6 Tl.	3 Tl. oder Theile.
Mischung	(36)			
Geringere Sorte	30 Pf.	— 6 Pf.	4 Tl.	2 Tl. oder Theile.

An 1 Pfd. der besseren Sorte ergibt sich ein Ueberschuß von 4 Pfg., an 1 Pfd. der geringeren Sorte ein Mangel von 6 Pfg. Der Ueberschuß und der Mangel von je Einem Pfunde der beiden Sorten decken sich also nicht. Nehme ich aber von der besseren Sorte 6 Pfd., wodurch sich ein Ueberschuß von 6 × 4 Pfg., und von der geringeren Sorte 4 Pfd., wodurch sich ein Mangel von 4×6 Pfg. ergibt, so heben sich, da 6×4 Pfg. = 4×6 Pfg, Ueberschuß und Mangel gegenseitig auf. Die Quantität der besseren Sorte verhält sich sonach zur Quantität der geringeren Sorte wie 6 : 4 oder, durch 2 gekürzt, wie 3 : 2.

Beisp. 2. In welchem Verhältniß mischt man 800theiliges und 650theiliges Gold, um 700theiliges zu erhalten?

Bessere Sorte	800	+ 100	50	1 Theil.
Mischung	(700)			
Geringere Sorte	650	— 50	100	2 Theile.

Wir nehmen ein bestimmtes Gewicht an, am besten das Kilogramm. Das Kilogramm der neuen Mischung soll 700 gr feines Gold enthalten. Das Kilo der besseren Sorte enthält 800 gr f. G.; also ergibt sich hier ein Ueberschuß von 100 gr. Das Kilo der geringeren Sorte enthält 650 gr f. G.; hier ergibt sich ein Mangel von 50 gr. Wir nehmen daher von der besseren Sorte 50 Kgr und von der geringeren 100 Kgr. So erhalten wir dort einen Ueberschuß von 50×100 gr, hier einen Mangel von 100×50 Gramm. Ueberschuß und Mangel decken sich. Das Verhältniß bleibt sich gleich, wenn wir von jeder Sorte auch nur die Hälfte oder $^1/_3$, oder $^1/_4$ rc. nehmen. Wir kürzen daher beide Zahlen durch 50 und finden so den kleinsten Ausdruck für dasselbe. Die Mischung wird die nämliche, ob 50 Kgr der besseren Sorte und 100 Kgr der geringeren, oder 1 Kgr der besseren Sorte und 2 Kgr der geringeren, oder ob überhaupt 1 Theil der besseren Sorte und 2 Theile der geringeren vereinigt werden.

§ 310. Die Menge der Mischung ist bestimmt.

Mündlich und schriftlich.

Beisp. A will aus 2 Sorten Wein, das Liter zu 80 Pfg. und zu 45 Pfg., eine Mittelsorte zu 60 Pfg. mischen. Wie viel hat er von jeder Sorte zu nehmen, um 36 Hektoliter Mischung zu erhalten?

Das Erste ist, daß wir das Mischungsverhältniß suchen.

80 Pfg.	+ 20 Pfg.	15 lt	3 lt od. Theile.
(60)			
45 Pfg.	— 15 Pfg.	20 lt	4 lt „ „
			7 lt od. Theile.

Ein Liter der besseren Sorte gibt 20 Pfg Ueberschuß, 1 lt der geringeren Sorte 15 Pfg. Mangel. Ich setze 15 lt der besseren Sorte, das gibt 15 × 20 oder 300 Pfg. Ueberschuß, und 20 lt der geringeren Sorte, das gibt 20 × 15 oder 300 Pfg. Mangel. So gleicht sich's aus. Von der besseren Sorte werden also 15 Theile genommen, wie von der geringeren 20, oder von jener 3, wie von dieser 4. Die ganze Mischung besteht also aus 3+4 oder 7 gleichen Theilen.

Nun gehen wir an die Beantwortung der Frage: Wie viel ist von jeder Sorte zur Mischung zu verwenden, um 36 Hl zu erhalten? Die Aufgabe stellt sich jetzt so: 7 Theile Mischling = 36 Hl; wie viel kommt a. auf die 3 Theile der besseren Sorte? b. auf die 4 Theile der geringeren?

a. 7 Theile	36 Hl	a. $7 : 3 = 36$ Hl : x
3 „	?	$x = 15^3/_7$ Hl
b. 7 Theile	36 Hl	b. $7 : 4 = 36$ Hl : x
4 „	?	$x = 20^4/_7$ Hl

§. 311. Die Menge einer Sorte wird bestimmt.

Beisp. 1. Es hat Jemand 12 lt Branntwein à 80 Pfg.; wie viel Wasser muß er hinzusetzen, um eine Mischung zu erhalten, wovon das Liter 50 Pfg, werth ist?

Berechnung.

a. Mündlich. Die 12 lt Branntwein à 80 Pfg. haben einen Werth von 12×80 Pfg. oder 9 Mrk. 60 Pfg. Denselben Werth muß auch die Mischung haben. Es fragt sich daher: Wie viel Ltr. à 50 Pfg. thun 9 Mrk 60 Pfg.? Antwort: So vielmal 1 lt, als 50 Pfg. in 9 Mrk. 60 Pfg. enthalten sind. 50 Pfg. sind in 1 Mrk. 2mal, in 9 Mrk. 18mal, in 60 Pfg. $1^1/_5$mal, in 9,60 M. also $19^1/_5$mal enthalten. Die ganze Mischung muß daher $19^1/_5$ lt betragen. Man muß also zu den 12 lt Branntwein $19^1/_5 - 12 = 7^1/_5$ lt Wasser mischen.

b. Schriftl. Branntw. 80 Pfg.	+ 30 Pfg.	50 lt	5 lt od. Theile.
(50)			
Wasser 0 Pfg.	— 50 Pfg.	30 lt	3 lt „ „

30 Pfg. Ueberschuß 50mal genommen, und 50 Pfg. Mangel 30mal genommen, heben sich gegenseitig auf. Also sind zu 50 lt Branntwein 30 lt Wasser, oder, was dasselbe ist, zu 5 Theilen Branntwein 3 Theile Wasser zu nehmen.

Zweisatz.		Proportion:
5 lt Branntw	. 3 .	$5 : 3 = 12$ lt : x
12 „ „	?	$x = 7^1/_5$ lt Wasser.

Beisp. 2. A hat Weingeist von 80 Grad und von 50 Grad; wie viel von der geringeren Sorte muß er unter 96 lt der besseren mischen, um eine Sorte von 72 Grad zu erhalten?

Ausr.				
	80°	+ 8°	22 lt	11 lt oder Theile.
	(72)			
	50°	— 22°	8 lt	4 lt " "

Zweisatz.

Zu 11 lt a 80° 4 lt a 50°
96 lt ?

Proportion.

$11 : 4 = 96\,lt : x$

$x = 34^{10}/_{11}\,lt$

II. Mit mehr als zwei Sorten.

§. 312.

Beisp. 1. Aus 3 Sorten Wein, A zu 25 Mk., B zu 18 Mk. und C zu 12 Mk., will man eine Sorte zu 16 Mk. mischen; wie kann dieß geschehen?

Berechnung.

A 25	+9	11	4 Theile.
B 18	+2		4
(16)			
C 11	—4		11
			19

Ein Hltr. von A gibt 9 M. Ueberschuß, 1 Hltr. von B gibt 2 M. Ueberschuß, 1 Hltr. von C gibt 4 M. Mangel. Somit ergeben sich 9 + 2 oder 11 M. Ueberschuß und 4 M. Mangel. Um Ueberschuß und Mangel auszugleichen, so setzen wir den Ueberschuß 4mal und den Mangel 11mal. Wir nehmen also 4 Hl von A, 4 Hl von B und 11 Hl von C. ($4 \times 9 + 4 \times 2 = 4 \times 11 = 11 \times 4$.)

Anm. Das ist die gewöhnliche Weise. Man könnte aber auch erst aus A und B eine Mischung zu 19 M. machen und dann aus der neuen Sorte mit C die verlangte Mischung bilden. Ebenso könnte man zuerst aus A und B eine Mischung zu 20, oder zu 21, zu 22, zu 23, zu 24 M. machen und die neue Sorte mit C zusammensetzen. Ferner könnte man zuerst aus A und C oder aus B und C Mittelsorten von 13, 14 und 15 M. bilden und diese dann mit der dritten Sorte vermischen. Nimmt man hierzu noch, daß sich bei der einen oder anderen Sorte für 1 Hektoliter eine andere Hektoliterzahl setzen und dem entsprechend Ueberschuß gegen Mangel ausgleichen läßt; so ergibt sich, daß die Lösung einer einzigen Aufgabe dieser Art ins Unendliche geht, ohne daß je zwei Resultate nothwendig zusammenfallen.

Beisp. 2. Man will aus 4 Sorten Tabak, A zu 2,40 Mrk., B zu 2 Mrk., C zu 1,50 Mrk. und D zu 1 Mrk. eine Mischung zu 1,60 Mrk. machen; wie kann das geschehen?

Berechnung.

A 240	+ 80	120	70	7
B 200	+ 40		70	7
(160)				
C 150	— 10	70	120	12
D 100	— 60		120	12
				38

1 Pfd. von A gibt 80 Pfg. Ueberschuß, 1 Pfd. von B 40 Pfg. Ueberschuß, 1 Pfd. von C 10 Pfg. Mangel, 1 Pfd. von D 60 Pfg. Mangel. Somit ergibt sich ein Ueberschuß von 80+40 120, und ein Mangel von 10+60=70. Wir nehmen den Ueberschuß 70mal, den Mangel 120mal. So gleicht sichs aus. Wird durch 10 gehoben, so haben wir dann 7 Pfd. von A, 7 Pfd. von B, 12 Pfd. von B und 12 Pfd. von D. ($7 \times 80 + 7 \times 40 = 12 \times 10 + 12 \times 60$.)

Beisp 3. Aus 5 Sorten einer Waare zu 24, 21, 18, 16 und 14 Mrk. soll eine Mittelsorte zu 20 Mrk. gemischt werden; wie kann es geschehen?

Mehrfache Lösung.

		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
A 24	+ 4	2+4	4+6	2+6	6	2	4	5	12
B 21	+ 1	6	2	4	2+4	4+6	2+6		12
(20)									
C 18	— 2	4	1	4	1	4	1	12	5
D 16	— 4	4	4	1	1	1	4		5
E 14	— 6	1	4	4	4	1	1		5
		21	21	21	18	18	18		

So wird gemischt

I. A mit C + D, und B mit E.
II. A mit D + E, und B mit C.
III. A mit C + E, und B mit D; dann
IV. B mit C + D, und A mit E.
V. B mit D + E, und A mit C.
VI. B mit C + E, und A mit D; zuletzt
VII. A + B mit C + D + E, wie in den vorigen Beispielen.

Siebenter Cursus.

I. Flächenberechnung.

§. 313. Vorbemerkung.

Da sich nur aus der klaren Anschauung der äußeren Dinge klare Begriffe in uns erzeugen, und nur klare Begriffe ein klares Denken möglich machen, die Raumlehre aber ganz besonders geeignet ist, das Anschauungsvermögen auszubilden; so springt die Wichtigkeit derselben in die Augen. Auch für das praktische Leben ist sie von großem Werthe. Der Unterricht in der Raumrechnung wird jedoch nur dann recht fruchtbar sein, wenn er wirklich anschaulich betrieben wird, d. h. wenn der Lehrer die verschiedenen Längen-, Flächen- und Körpermaße in ihrer wahren Größe zur Betrachtung vorführt; wenn er die Dinge in der nächsten Umgebung als: Tische, Bänke, Wand- und Schiefertafeln, Schulzimmer, Schulhaus, Gärten 2c. messen und berechnen läßt, andere Gegenstände aber theils an die Wandtafel zeichnet, theils in der Vorstellung veranschaulicht und dabei gerade so behandelt, als ob sie in Wirklichkeit gegenwärtig seien.

§. 314. Die Längenmaße und das Messen.

Um die Länge eines Weges, die Höhe eines Baumes, die Länge und Breite eines Brettes, die Länge, Breite und Höhe eines Zimmers 2c. zu bestimmen; so müssen besagte Gegenstände nach diesen Richtungen hin gemessen werden. Dies geschieht mittelst der uns schon bekannten Längenmaße: Meter, Decimeter, Centimeter und Millimeter.

Die Schüler werden nun über die Herleitung des Meters (nach §. 128) belehrt; das System der Längenmaße wird nochmal entwickelt und auch auf das Dekameter (= 10m) und das Kilometer (= 1000m) ausgedehnt.

Dann geht es an das Messen, wobei der Lehrer Veranlassung nimmt, Folgendes zur Einsicht zu bringen.

a. Die wahre Entfernung zweier Punkte von einander, der beiden Enden einer Fläche oder eines Körpers, wird nur durch eine gerade Linie und daher auch nur durch das Messen in gerader Richtung bestimmt.

b. Die Höhe wird durch das Messen einer geraden Senkrechten gefunden.

c. Ist eine Fläche nicht überall oder gar nicht zugänglich, wie z. B. eine Wand, an welcher ein Ofen oder ein Schrank steht, oder wie die Zimmerdecke; so wird dafür eine ihr gleichlaufende (Parallel-) Linie von derselben Länge gemessen.

d. Hat eine Fläche, deren Umfang bestimmt werden soll, lauter gleiche Seiten, so braucht bloß eine derselben gemessen zu werden; die Länge einer Seite, mit der Anzahl der Seiten multiplicirt, gibt den ganzen Umfang. Sind bei einem Vierecke nur die zwei einander gegenüberstehenden Seiten von gleicher Länge, so hat man zwei Seiten von verschiedener Länge zu messen; der ganze Umfang ist dann zweimal so groß, als beide zusammen genommen. Ist keine Seite der anderen gleich, so müssen sie alle gemessen und die Ergebnisse durch Addition vereinigt werden.

Gegenstand des Messens sind die Dimensionen des Schulzimmers und der Dinge in und an demselben.

§. 315. Der Winkel.

Ich ziehe eine gerade Linie. Setze ich nun an den Endpunkt eine andere Linie, so heißt das ein Winkel. Ein Winkel entsteht also, wo sich zwei Linien in einem Punkte vereinigen. Die beiden Linien nennt man Schenkel, den Punkt, wo die Linien sich treffen, Scheitelpunkt. — Ich nehme einen Zirkel; die beiden Arme desselben sind die Schenkel des Winkels, und je nachdem ich den Zirkel erweitere oder zusammenziehe, wird der Winkel größer oder kleiner. Steht ein Schenkel senkrecht auf dem andern, so heißt der Winkel ein rechter (Fig. 1.) Ist ein Winkel kleiner als ein rechter, so ist er ein spitziger (Fig. 2); ist er größer als ein rechter, so ist er ein stumpfer (Fig. 3.)

§. 316. Flächenmaße.

Unter Fläche versteht man das Aeußere oder die Grenze eines Körpers. Dieselbe ist nicht dick, sondern nur lang und breit, oder lang und hoch. Will man die Größe einer Fläche genau bestimmen, so muß man suchen, wie vielmal so groß sie ist, als eine andere Fläche von bekannter Größe. Daher können als Maße für die Flächen nur wieder Flächen genommen werden. Als solche dienen die Quadrate, d. i. Flächen, welche von vier gleichen Seiten eingeschlossen sind, und 4 gleiche, nämlich 4 rechte Winkel haben.

Der Lehrer zeichnet Figur 4, 5 und 6 an die Wandtafel, und fordert die Schüler auf, anzugeben, welche derselben ein Quadrat sei, welche nicht, und warum?

Da die Quadrate (hinsichtlich ihrer Größe) von unendlicher Verschiedenheit sein können, so sind diejenigen Quadrate, welche als Flächenmaße dienen sollen, näher zu bestimmen. Es sind dieß solche, deren eine (also jede) Seite genau ein Meter, oder ein Decimeter, oder ein Centimeter, oder ein Millimeter lang ist. Beträgt eine Seite des Quadrats ein Meter, so ist es ein Quadrat-Meter; beträgt sie ein Decimeter, so ist es ein Quadrat-Decimeter u. s. f.

Was ist also ein □Meter? ein □Decimeter? ein □Centimeter? ein □Dekameter? eine □Meile?

Zeichne an die Wandtafel ein □Meter! ein □Decimeter! Zeichnet auf eure Schiefertafeln ein □Decimeter, ein □Centimeter, ein □Millimeter! (Dabei wird vorausgesetzt, daß die Schüler das Decimeter mit seinen Unterabtheilungen als Maßstab in Händen haben.)

§. 315 Resolviren und Reduciren.

a. Mit ganzen Zahlen.

1) Verwandle dieß (an die Wandtafel gezeichnete) □Meter in □Decimeter! Verwandle 1 □Decimeter hievon in □Centimeter! — Thut Letzteres auf euren Schiefertafeln! Zerlegt nun auch □Centimeter in □Millimeter! (Vergl. §. 130.)

Aufl. 1 □^{m} = 10×10 oder 100 □^{dm}
1 □^{dm} = 10×10 oder 100 □^{cm}
1 □^{cm} = 10×10 oder 100 □^{mm}.

Also ist

1 □^{m} = 100 □^{dm} = 10000 □^{cm} = 1000000 □^{mm}
1 □^{dm} = 100 □^{cm} = 10000 □^{mm}
1 □^{cm} = 100 □^{mm}.

2) 3□^{m} 48 □^{dm} 75 □^{cm} 64 □^{mm} =? □^{mm}.

Ausr. 1 □^{m} = 100 □^{dm}; 3 □^{m} = 3×100 oder 300 □^{dm}; 300 □^{dm} + 48 □^{dm} = 348 □^{dm}.

1 □^{dm} = 100 □^{cm}; 348 □^{dm} = 348 × 100 oder 34800 □^{cm}; 34800 □^{cm} + 75 □^{cm} = 34875 □^{cm}.

1 □^{cm} = 100 □^{mm}; 34875 □^{cm} = 34875 × 100 = 3487500 □^{mm}, und 64 □^{mm} dazu = 3487564 □^{mm}.

Mithin sind 3 □^{m} 48 □^{dm} 75 □^{cm} 64 □^{mm}
= 348 □^{cm} 75^{cm} 64 □^{mm}
= 34875 □^{cm} 64^{mm}
= 3487564 □^{mm}.

Man verwandelt also die □Meter zuerst, indem man sie mit 100 multiplicirt, in □Decimeter und addirt die Anzahl der □Decimeter dazu; dann verwandelt man die □Dcm. indem man sie mit 100 multiplicirt, in □Centimeter und zählt die □Ctm. dazu u. s. f.

Jede Benennung nach dem □Meter nimmt zwei Stellen ein. Kommt es vor, daß die Zahl einer solchen nur einstellig ist, so wird ihr eine Null vorgesetzt. Z. B.

3) 4 □^{m} 9 □^{dm} 7 □^{cm} =? □Ctm.

Ausr. 4 □^{m} + 9 □^{dm} = 4 × 100 + 9 = 409 □^{dm}; 409 □^{dm} + 7 □^{cm} = 409×100+7=40907 □^{cm}.

4) 7540689 □^{mm}, wie viel □Ctm., □Dcm. ꝛc.?

Ausr. 100 □^{mm} = 1 □^{cm}; 100 □^{cm} = 1 □^{dm}, und 100 □^{dm} = 1 □^{m}. So oft also 100 □^{mm} in 7540689 □^{mm} enthalten sind, so viele □Ctm. gibt es; so oft in diesen wieder 100 □^{cm} enthalten sind, so viele □Dcm. gibt's. Man dividirt also wiederholt durch 100, und das geschieht, wenn man von der Rechten gegen die Linke immer 2 Stellen ablöst.

7540689 □^{mm} = 75406 □^{cm} 89 □^{mm}
= 754 □^{dm} 6 □^{cm} 89 □^{mm}
= 7 □^{m} 54 □^{dm} 6 □^{cm} 89 □^{mm}.

b. Mit Decimalbrüchen.

Sowie das Meter die Einheit für die Längenmaße ist, so bildet das □Meter die Einheit für die Flächenmaße. Die □Decimeter, □Ctm. und □Mllm. werden daher auch als Theile des □Meters betrachtet.

1 □^{m} = 100 □^{dm};	also ist	1 □^{dm} =	0,01 □^{m}
		24 □^{dm} =	0,24 □^{m}
1 □^{m} = 10000 □^{cm};	also ist	1 □^{cm} =	0,0001 □^{m}
		36 □^{cm} =	0,0036 □^{m}
1 □^{m} = 1000000 □^{mm};	also ist	1 □^{mm} =	0,000001 □^{m}
		45 □^{mm} =	0,000045 □^{m}

Für jede Unterabtheilung des □Meters gehören also 2 Decimalstellen.

Die □Decimeter stehen in der 1. und 2. Decimalstelle,
die □Centimeter " " " 3. " 4. "
die □Millimeter " " " 5. " 6. "

Fr. Wo stehen die □Dcm.? die □Ctm.? die □Mllm.? Was bedeuten die Ziffern in der 1. u. 2. Decimalstelle rc.?

Fehlende Stellen werden durch Nullen vertreten.

Wie schreibt man nun in Decimalbruchform
1) 37 □^{dm} 25 □^{cm}? (0,3725 □^{m})
2) 4 □^{m} 9 □^{dm} 65 □^{cm}? 4,0965 □^{m})
3) 72 □^{dm} 45^{cm} 85 □^{mm}? (0,724585 □^{m})
4) 7 □^{m} 96 □^{cm} 8 □^{mm}? (7,009608 □^{m})
5) 2 □^{m} 7 □^{dm} 6 □^{cm} 4 □^{mm}? (2,070604 □^{m}.)

Um einen solchen Decimalbruch zu lesen, so nimmt man die Stellen vom Komma aus nach rechts immer paarweise. Das erste Paar drückt die □Dcm., das zweite Paar die □Ctm, das dritte Paar die □Mllm. aus. Bleibt am Ende eine Stelle, so wird eine Null beigefügt.

4,7584 □^{m} = 4 □^{m} 75 □^{dm} 84 □^{cm}
0,976 □^{m} = 97 □^{dm} 60 □^{cm}
0,543218 □^{m} = 54 □^{dm} 32 □^{cm} 18 □^{mm}
7,0805 □^{m} 7 □^{m} 8□^{dm} 5 □^{cm}
0,00456789 □^{m} = 45 □^{cm} 67,89^{mm}.

Ein Quadrat-Decimalbruch von 0,1—0,49 wird weggeworfen, von 0,50—0,99 als Ganzes gerechnet und dieses der nächsten Stelle links zugezählt. Für 67,89 □^{mm} setzt man also 68 □^{mm}.

§. 318. Den Quadratinhalt einer Fläche zu finden.

Will man den Quadrat-Inhalt, d. i. die Anzahl der □Meter, der □Decimeter rc. einer Fläche finden, so wendet man bei dem Messen derselben nicht die Quadratmaße selbst an, sondern man sucht mittelst der Längenmaße, wie lang und breit sie ist. Aus der gefundenen

Länge und Breite wird dann der Flächen- oder Quadratinhalt berechnet. Wie dieß geschieht, läßt sich aus der Anschauung erkennen. Ist z. B. eine Fläche, wie Fig. 7 in verkleinertem Maßstabe zeigt, 5 Decimeter lang und 3 Decimeter breit; so denkt man sich zuerst (wie bei Figur 8) in der Länge von Decimeter zu Decimeter gerade Linien gezogen. Dadurch entstehen so viele Streifen, als die Fläche Decimeter breit ist, nämlich 3. Nun denkt man sich auch in der Breite (wie bei Figur 9) von Decimeter zu Decimeter gerade Linien gezogen. Hierdurch bildet sich aus jedem Streifen eine Reihe von so viel Quadratdecimetern, als die Fläche Decimeter lang ist, nämlich 5. Mithin ist dieselbe 3×5 oder 15 □Decimeter groß.

Die Zahl, welche die Breite angibt, bezeichnet die Anzahl der Reihen, und die Zahl, welche die Länge bezeichnet, sagt, wie viele Quadrate jede Reihe enthält. Darum geben Länge und Breite, mit einander multiplicirt, den Quadratinhalt der Fläche. — Bei folgenden Fällen unterlasse man nicht, die Aufgabe und deren Lösung durch Figuren anschaulich zu machen.

§. 319. Berechnung der Quadrate.

Aufgabe 1. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seite a. 2^{dm}, b. 3^{dm}, c. 4^{dm} ꝛc. lang ist?

Auflösung: Ein Quadrat, dessen Seite 2 Decimeter lang ist, ist eine Fläche von 2^{dm} Länge und 2^{dm} Breite. Dasselbe enthält also zwei Reihen von je 2 $□^{dm}$ und ist daher 2 × 2 oder 4 $□^{dm}$ groß. — Ein Quadrat, dessen Seite 3^{dm} mißt, gibt 3 Reihen von je 3 $□^{dm}$, ist also 3 × 3 oder 9 $□^{dm}$ groß u. s. w.

Da bei dem Quadrate Länge und Breite einander gleich sind, so kann man auch sagen, daß die Größe desselben gefunden werde, wenn man eine seiner Seiten mit sich selbst multiplicirt.

Aufgabe 2. Ein Garten hat die Form eines Quadrats und mißt an jeder Seite 15 Meter. Wie groß ist sein Flächeninhalt?
Antwort: 225 □Meter.

§. 320. Berechnung des länglichen Rechtecks.

a. Die Ausdehnungen sind einfach und gleichbenannt.

Beisp. 1. Ein (an die Wand gezeichnetes) Rechteck ist 3^{m} lang und 2^{m} breit. Wie groß ist sein Quadratinhalt?

Aufl. Man theilt die 4 Seiten von Meter zu Meter ab und verbindet dann die einander gegenüber liegenden Theilungspunkte durch gleichlaufende Linien. So bilden sich 2 Reihen von je 3 □Meter; der Inhalt des Rechtecks ist also = 2×3 oder 6 □Meter.

Beispiel 2. Ein Rechteck ist 6^{dm} breit und 9^{dm} lang; welches ist sein Quadratinhalt?

Aufl. Da sowohl die Länge als die Breite der an die Wandtafel gezeichneten Fläche in Decimetern besteht; so theilt man die 4 Seiten auch in Decimeter ab. Werden dann die Theilungspunkte, wie bekannt, verbunden; so entstehen lauter □Decimeter und zwar 6 Reihen von je 9 $□^{dm}$, im Ganzen also 6 × 9 oder 54 $□^{dm}$.

Beispiel 3. Ein (auf die Schiefertafeln gezeichnetes) Rechteck ist 8^{cm} lang und 5^{cm} breit; wie viel beträgt sein □Inhalt?

Aufl. Man theilt jede Seite von Centimeter zu Centimter ab und zieht dann die Verbindungslinien. So bilden sich □Centimeter und zwar 5 Reihen von je 8 □^{cm}; das Rechteck enthält also 5 × 8 oder 40 □^{cm}.

Beisp. Welches ist der Quadratinhalt einer Fläche, welche 3 Meter lang 0,7^{m} breit ist?

Aufl. 1^{m} lang und 1 ^{m} breit = 1 □^{m}
1 „ „ „ 0,1 „ „ = 0,1 □^{m}
1 „ „ „ 0,7 „ „ = 0,7 □^{m}
3 „ „ „ 0,7 „ „ = 3×0,7 = 2,1 □^{m}

Beisp. 5. Eine Fläche ist 0,6^{m} lang und 0,5^{m} breit.

Aufl. 1^{m} lang und 1 ^{m} breit = 1 □^{m}
1^{m} „ „ 0,1^{m} br. = 0,1 □^{m}
0,1^{m} „ „ 0,1^{m} br. = 0,01 □^{m}
0,6^{m} „ „ 0,1^{m} br. = 0,06 □^{m}
0,6^{m} „ „ 0,5^{m} br. = 6×5=0,30 □^{m}=30 □^{dm}.

Beisp. 6. Ein Rechteck ist 1,4^{m} breit und 1,8^{m} lang.

Aufl. 1,4 = 14 Zehntel, und 1,8 = 18 Zehntel.
0,1^{m} br. u. 0,1^{m} lg. = 0,1 × 0,1 □^{m} = 0,01 □^{m}
1,4 „ „ „ 1,8 „ „ = 1,4 × 1,8 □^{m} = 2,52 □^{m}

Beisp. 7. Eine Fläche ist 0,45^{m} br. und 0,67^{m} lang.

Aufl. 1^{m} br. und 1 ^{m} lg. = 1 × 1 □^{m} = 1 □^{m}
0,1^{m} br. u. 0,1 ^{m} lg. = 0,1 × 0,1 □^{m} = 0,01 □^{m}
0,01 „ „ „ 0,01 „ „ = 0,01 × 0,01 □^{m} = 0,0001 □^{m}
0,45 „ „ „ 0,67 „ „ = 0,45 × 0,67 □^{m} = 0,3015 □^{m}
= 30 □^{dm} 15 □^{cm}.

Beisp. 8. Ein Viereck ist 1,23^{m} br. und 1,46^{m} lang.

Aufl. 1,23 = 123 Hundertel, und 1,46 = 146 Hundertel.
0,01^{m} br. u. 0,01^{m} lg. = 0,01 × 0,01 □^{m}
1,23 „ „ „ 1,46 „ „ = 1,23 × 1,46 □^{m}
= 1,7958 □^{m} = 1 □^{m} 79 □^{dm} 58 □^{cm}.

b. Die Ausdehnungen sind einfach, aber ungleich benannt.

Wenn man eine Fläche in □Meter zerlegen soll, so wird der Forderung entsprochen, indem man die Länge und Breite in Meter abtheilt und die Theilungspunkte verbindet. Soll eine Fläche in □Decimeter zerlegt werden, so muß man ihre Länge und Breite in Decimeter abtheilen u. s. w. Hieraus ergibt sich das Verfahren für die Berechnung: man verwandelt die ungleich benannten Zahlen, welche die Länge und Breite bezeichnen, in gleichbenannte. Dieß kann, wie wir wissen, auf zweierlei Weise geschehen: durch Resolution und durch Reduktion. Entweder löst man die höheren Einheiten in die niederste der gegebenen auf, oder man drückt die niederen Einheiten durch einen Decimalbruch in Meter aus.

Beisp. 1. Ein Brett ist 6^{m} lang und 7^{dm} breit.

Ausrechnung.

a. 6^{m} = 60 ^{dm}. Theile ich jede Seite in Decimeter ab und ziehe dann die Verbindungslinien, so bilden sich 7 Reihen von je 60 □Decimeter, im Ganzen also 7 × 60 oder 420 □^{dm} = 4 □^{m} 20 □^{dm}.

b. 7 dm = 0,7 m; 1 m lang und 0,7 m breit = 0,7 □m; 6 m lang und 0,7 m breit = 6 × 0,7 □m = 4,2 □m = 4 □m 20 □dm.

Beisp. 2. Ein Viereck ist 8 cm breit und 9 dm lang.

Ausrechnung.

a. 9dm = 90cm. Eine Fläche von 8cm Breite und 90cm Länge gibt 8 Reihen von je 90 □cm. Sie enthält also 8 × 90 oder 720 □cm = 7 □dm 20 □cm.

b. 8 cm = 0,08 m, und 9 dm = 0,9 m.

0,1 m br. und 0,1 m lg. = 0,1 × 0,1 = 0,01 □m
0,01 m „ „ 0,1 m „ = 0,01 × 0,1 = 0,001 □m
0,08 m „ „ 0,9 m „ = 0,08 × 0,9 = 0,072 □m
= 0,0720 □m = 7 □dm 20 □cm

c. Die Ausdehnungen sind mehrfach benannt.

Beisp. 2. Ein Rechteck ist 1 m 3 dm br. und 2 m 7 dm lang.

Ausrechnung.

a. 1 m 3 dm = 13 dm, und 2 m 7 dm = 27 dm. Eine Fläche, welche 13 dm br. und 27 dm lg. ist, enthält 13 × 27 = 351 □dm oder 3 □m 51 □dm.

b. 1 m 3 dm = 1,3 m (= 13 Zehntel-Meter.)
2 m 7 dm = 2,7 m (= 27 Zehntel-Meter.)
0,1 m br. und 0,1 m = 0,1 × 0,1 □m
1,3 m br. und 2,7 m = 1,3 × 2,7 □m
= 3,51 □m = 3 □m 51 □dm.

Beisp. 2. Eine Wandtafel ist 2 m 4 dm 8 cm lang und 1 m 7 dm 4 cm breit; wie groß ist ihr □Inhalt?

a.

2 m 4 dm 8 cm = 248 cm
1 m 7 dm 4 cm = 174 cm
992
1736
248
43152 □cm
= 4 □m 31 □dm 52 □cm

b.

= 2,48 m
= 1,74 m
992
1736
248
4,3152 □m

Beisp. 3. Eine Wand ist 7 m 5 dm 4 cm lang und 2 m 8 dm hoch; wie viel beträgt ihr Flächeninhalt?

a.

7 m 5 dm 4 cm = 754 cm
2 m 8 dm 0 cm = 280
60320
1508
211120 □cm
= 21 □m 11 □dm 20 □cm

b.

= 7,54 m
= 2,8 m
6032
1508
21,112 □m

§. 321. Berechnung des verschobenen Vierecks.

Daß das verschobene Viereck abcd (Fig. 10) dem rechtwinkeligen Vierecke efcd an Größe gleich ist, ist auch ohne mathematischen Beweis leicht einzusehen. Die beste Veranschaulichung ist: man schneidet ein

Blatt Papier so zurecht, daß es ein verschobenes Viereck bildet, schneidet dann die hervorstehende Spitze auf der einen Seite ab und setzt sie auf der andern Seite so an, daß die Figur die Form eines Rechtecks annimmt. Die Grundlinie bleibt sich gleich und die Höhe bleibt sich gleich. Also wird der Quadratinhalt des verschobenen Vierecks eben so gefunden, wie der eines Rechtecks von gleicher Grundlinie und Höhe: man sucht die Länge ab und die Breite oder Höhe de und multiplicirt dann beide miteinander.

Aufgabe. Die Grundlinie ab sei = 8^{dm} und die Höhe de = 7^{dm}; wie groß ist der □Inhalt? (56□^{dm}.)

§. 322. Berechnung des ungleichseitigen Vielecks. (Fig. 11.)

Wenn man über der Grundlinie ab und dieser parallel eine gleichlange Linie zieht, welche die Linie cd bei e schräg schneidet, so wird von der Figur auf der einen Seite gerade so viel weggeschnitten, als auf der andern fehlt, um ein Rechteck zu bilden. Es lehrt also der Augenschein, daß ein ungleichseitiges Viereck genau so groß ist, als ein Rechteck, welches dieselbe Grundlinie und die mittlere Höhe hat. Um daher den Quadratinhalt einer solchen Fläche zu erhalten, so mißt man deren Länge und mittlere Breite und multiplicirt dann beide mit einander.

Die mittlere Breite ergibt sich auch, wenn man die kleinere und die größere Breite mißt und die Hälfte von deren Summe nimmt.

Aufgabe 1. Es sei die Länge ab = $8{,}6^{m}$, die kleinere Breite ad = $2{,}4^{m}$ und die größere Breite bc = $5{,}7^{m}$. Wie groß ist der □Inhalt?

Berechnung.

ad = $2{,}4^{m}$	4,05
bc = 5,7 „	×8,6
ad+bc = 8,1 „	2430
Mittlere Br. = $4{,}05^{m}$	3240
	34,830 □^{m}.

Aufgabe 2. Ein Grundstück ist 98^{m} 5^{dm} lang und auf der einen Seite 42^{m} 5^{dm}, auf der andern 37^{m} 3^{dm} breit. Wie viele Ar (= 100 □^{m}) ist dasselbe groß?

Antwort: 3930,15 □^{m} = 39 Ar 30,15 □^{m}.

§. 323. Berechnung der Dreiecke.

Wie sich aus der Anschauung (Figur 12 und 13) ergibt, so ist das Dreieck immer die Hälfte eines Vierecks von gleicher Grundlinie und Höhe. Der Inhalt eines Dreiecks wird daher gefunden, wenn man seine Grundlinie (ab) und seine senkrechte Höhe (ac oder ce) mit einander multiplicirt und hernach das Produkt halbirt.

Aufgabe 1. Es sei die Grundlinie ab = 8^{dm} und die Höhe ac = 6^{dm}. Wie groß ist der Flächeninhalt?

Antwort: 6 × 8 □^{dm}, getheilt durch 2 = 24 □^{dm}.

Anm. Dasselbe Ergebniß entspringt, wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die halbe Grundlinie mit der Höhe multiplicirt.

Aufgabe 2. Der Giebel eines Hauses ist 15^{m} 6^{dm} breit und 12^{m} 5^{dm} hoch. Wie viel beträgt der □Inhalt seiner Außenseite? Antwort: 97,5 □^{m}.

§. 324. Berechnung der Vielecke.

Alle geradlinigen Figuren, welche mehr als 4 Seiten haben, werden vielseitige oder vieleckige genannt. Sind bei einer vieleckigen Figur alle Seiten (und Winkel) einander gleich, so ist sie ein regelmäßiges Vieleck (Fig. 15); wenn nicht, so ein unregelmäßiges (Fig. 14).

Um den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vielecks zu finden, so zerlegt man dasselbe, indem man von einer Ecke zur andern Linien zieht, in Dreiecke, berechnet dann diese einzeln, und zählt die Ergebnisse zusammen.

Aufgabe: Von dem Fünfecke (Fig. 14) sei ac = 24^{m}; bf = 9^{m}; dg = 10^{m}; ad = 21^{m}; eh = 12^{m}; wie groß ist ein Quadratinhalt?

Auflösung: Durch die Linien ac und ad werden Dreiecke gebildet: I. abc, II. acd und III. ade.

I. Die Grundlinie ac = 24^{m}; die Höhe bf = 9^{m}; 9 × 24 = 216; $^{1}/_{2}$ × 216 = 108; das erste Dreieck also = 108 □^{m}.

II. Die Grundlinie ac = 24^{m}; die Höhe dg = 10^{m}; 10 × 24 = 240; $^{1}/_{2}$ × 240 = 120; das 2. Dreieck = 120 □^{m}.

III. Die Grundlinie ad = 21^{m}; die Höhe eh = 12^{m}; 12 × 21 = 252; $^{1}/_{2}$ × 252 = 126; das 3. Dreieck = 126 □^{m}.

Das ganze Fünfeck enthält also 108 + 120 + 126 = 354 □^{m}.

Wie das unregelmäßige Vieleck, so läßt sich auch das regelmäßige behandeln. Einfacher ist es aber, wenn man von den Ecken aus Linien auf den Mittelpunkt desselben zieht, wodurch so viele gleiche Dreiecke entstehen, als die Figur Seiten hat. Dann berechnet man eines derselben und nimmt das Ergebniß so oft mal, als Seiten oder Dreiecke vorhanden sind.

Aufgabe. Es sei bei Figur 15 die Grundlinie ab = 4^{m}, und die Höhe cd = 5^{m}; wie viele □^{m} enthält das Sechseck?

Auflösung: 4 × 5 = 20; die Hälfte davon ist 10. Das Dreieck abc ist also 10 □^{m} groß. Von derselben Größe sind auch alle übrigen Dreiecke. Folglich enthält das ganze Sechseck 6 × 10 oder 60 □^{m}.

§. 325. Berechnung der krummen Oberfläche des Cylinders.

Rollt man ein Blatt Papier von der Form eines Rechtecks so zusammen, daß die beiden Seitenlinien aneinander stoßen, so entsteht ein hohler Cylinder. Die Länge des Rechtecks bildet den Umfang des Cylinders, die Höhe des Rechtecks die Höhe des Cylinders. Hieraus folgt, daß die krumme Oberfläche eines Cylinders oder einer Walze gefunden wird, wenn man den Umfang mit der Höhe multiplicirt.

Die krumme Oberfläche einer Walze von 2,4 m Umfang und 3 m Höhe ist also einem Rechtecke gleich, welches 2,4 m lang und 3 m hoch oder breit ist. Dieselbe beträgt daher 3 × 2,4 = 7,2 □m.

§. 326. Berechnung der Kreisfläche.

(Fig. 16.)

Der Kreis wird durch einen Zirkel mit gleicher Oeffnung beschrieben. Daher ist die Kreislinie oder der Umkreis von dem Mittelpunkte überall gleichweit entfernt, und daher sind auch die Halbmesser eines Kreises — die geraden Linien von dem Mittelpunkte bis zum Umkreis — alle einander gleich. Eine gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht und mit ihren beiden Enden die Kreislinie berührt, wird der Durchmesser genannt. Der Umfang eines Kreises verhält sich zum Durchmesser desselben wie 314 zu 100, d. i. der Umfang enthält stets 314 solche Theile, wie der Durchmesser deren 100 hat. Er ist also $3^{14}/_{100}$ (= 3,14 oder genauer 3,1416) mal so groß, als dieser.

Fragen: Wie verhält sich der Durchmesser eines Kreises zum Halbmesser desselben? der Halbmesser zum Durchmesser? Wie findest du aus dem gegebenen Durchmesser den Kreisumfang und umgekehrt? Wie aus dem Halbmesser und umgekehrt?

Der Kreis kann als ein regelmäßiges Vieleck von (unzählig) vielen Seiten angesehen werden. Denkt man sich nun vom Mittelpunkte aus nach allen Ecken Halbmesser gezogen, so entstehen (unendlich) viele Dreiecke. Die gemeinschaftliche Höhe derselben ist der Halbmesser, und ihre Grundlinien bilden, zusammen genommen, den Kreisumfang. Der Inhalt aller Dreiecke und somit auch der Inhalt des ganzen Kreises wird daher gefunden, wenn man Umfang und Halbmesser mit einander multiplicirt und das Produkt halbirt, oder wenn man Umfang und Durchmesser mit einander multiplicirt und das Produkt durch 4 theilt.

Beispiel. Der Umfang eines Kreises = 22 m, sein Halbmesser = 3,5 m; wie groß ist seine Fläche?

Antwort: 3,5 × 22, getheilt durch 2 = 38,5 □m.

Gewöhnlich ist nur ein Stück gegeben: entweder nur der Halbmesser, oder der Durchmesser, oder der Umfang. Ist der Halb- oder der Durchmesser gegeben, so ist nach dem Obigen zunächst der Umfang zu suchen, dieser dann mit dem Halbmesser zu multipliciren und das Produkt zu halbiren. Zeigen wir diese Operationen bloß an, so entwickelt sich eine sehr einfache Formel.

Der Durchmesser sei 8 m.
Der Umfang ist also 8 m × 3,14.
Der Halbmesser = 4.

Also ist die Kreisfläche $= \frac{4 \times 8 \times 3{,}14 \ \square^{m}}{2}$

2 gegen 8 gehoben = 4 × 4 × 3,14 □m.

Man multiplicirt den Halbmesser mit sich selbst und das Produkt mit 3,14.

Ist der Umfang gegeben, so wird zuerst der Durchmesser ge-

sucht. Man findet diesen, indem man, wie schon bekannt, den Umfang durch 3,14 dividirt.

Wie viel beträgt der Flächeninhalt

1) einer kreisr. Scheibe von 6 ^{dm} im Halbm.? (113,04 □^{dm})
2) eines Kreises von 5,6 ^{m} im Durchm.? (24,6176 □^{m})
3) eines kreisrunden See's von 1413 ^{m} Umfang?
(158962,5 □^{m} = 15 Hektar 89 Ar 62,5 □^{m}).

§. 327. Aus dem Flächeninhalte eines Rechtecks und einer Ausdehnung desselben die andere zu finden.

Der Flächeninhalt ist das unmittelbare Produkt aus Länge und Breite. Ist daher die Größe der Fläche und die eine Ausdehnung derselben (die Länge oder Breite) bekannt; so findet man die andere, indem man den Flächeninhalt durch die gegebene Ausdehnung dividirt.

Beispiel 1. Eine Fläche ist 24 □^{dm} groß; in ihrer Breite mißt sie 4^{dm}; wie viel beträgt ihre Länge?

Aufl. Ist eine Fläche 4^{dm} breit und 1^{dm} lang, so enthält sie 4 □^{dm}; ist sie 2^{dm} lang, so enthält sie 2 × 4 □^{dm} u. s. f. So vielmal 1^{dm} Länge, so vielmal 4 □^{dm} Inhalt. Folglich auch: so vielmal 4 □^{dm} Inhalt, so vielmal 1^{dm} Länge. Die gegebene Fläche enthält 24 □^{dm}. So oft daher 4 □^{dm} in 24 □^{dm} enthalten sind, so vielmal 1^{dm} beträgt ihre Länge, nämlich 6 × 1^{dm} oder 6^{dm}.

Beispiel 2. Ein Rechteck, dessen eine Seite 4,8 ^{m} beträgt, ist 36 □^{m} groß. Wie lang ist die andere Seite?

Aufl. Die eine Seite = 4,8^{m}. Beträgt die andere Seite 1^{m}, so ist der □Inhalt = 4,8 □^{m}; beträgt sie 2^{m}, so ist der Inhalt = 2 × 4,8 □^{m} u. s. f. So oft daher 4,8 □^{m} in dem □Inhalt der ganzen Fläche, d. i. in 36 □^{m} enthalten sind, so vielmal 1^{m} beträgt die zu suchende Seite. 4,8 in 36 = 48 in 360 = 4 in 30 = 2 in 15 = 7,5. Die gesuchte Seite ist also 7,5 ^{m} lang. (Probe: 7,5 × 4,8 = 36.)

§. 327. Das alte und das neue Flächenmaß.

1 Quadratfuß	=	0,085182 □^{m}	1 □^{m}	=	11,7396 □Fuß
1 □Zoll, zehnth.	=	8,5182 □^{cm}	1 □^{dm}	=	11,7396 □Zoll dc.
1 □Zoll, 12theil.	=	5,9154 □^{cm}	1 □^{cm}	=	0,16905 □Zoll ddc.
1 □Linie, 12theil.	=	4,1079 □^{mm}	1 □^{mm}	=	0,24343 □Linie ddc.
1 □Ruthe, (10th.)	=	8,5182 □^{m}	1 Ar	=	11,7396 □Rth.
1 Tagwerk	=	0,3407 Hektar	1 Hektar	=	2,9349 Tagw.

Näherungswerthe:

1 □^{m}	nahe	=	11$\frac{3}{4}$ □Fß.
4 □^{m}	„	=	47 □Fß.
6 □^{cm}	„	=	1 □Zoll, 12theilig.
34 Ar	„	=	1 Tagw.
34 Hektar	„	=	100 Tagw.
1 Hektar	„	=	3 Tgw.

Beispiel 1. Ein Landmann hat 98 Tgw. 65 Decimale Feld; wie viel macht dieß nach dem metrischen Maße?

Ausr. 1 Tgw. $=$ $0,3407$ Hektar
$98,65$ Tgw. $= \times 98,65$
$= 33,610055$, sehr nahe $33,61$ Hektar $=$ 33 Hektar 61 Ar

Beispiel 2. $4 \square^{m}\ 50 \square^{dm}$, wie viel □Fuß?

Ausrechnung.

$1 \square^{m} \ldots\ldots = 11,7396$ □Fuß
$4 \square^{m}\ 50 \square^{dm} = \times 4,5$
$= 52,8282$ □Fuß $= 52$ □Fuß 82 □Zoll 82 □Lin. dc.

II. Körperberechnung.

§. 329. Die Körpermaße.

Eine (mathematische oder gedachte) Linie ist nur lang; eine Fläche ist lang und breit; ein Körper aber ist lang, breit und hoch (tief oder dick). Als Maß für die Körper dient der Würfel oder Kubus. Derselbe ist ein achteckiger, von 6 gleichen Quadratflächen umschlossener Körper. Seine 12 Kanten — die scharfen Erhebungen, welche durch das Zusammenstoßen der Flächen entstehen — sind alle einander gleich. Er ist daher eben so hoch als lang und breit.

Sowie man die Linien nach Meter, Deci-, Centi- und Millimeter, und die Flächen nach Quadratmeter, Quadratdecimeter ꝛc. bestimmt, so sucht man bei den Körpern, wie viele Würfelmeter, Würfeldecimeter ꝛc. sie enthalten. Ein Würfel- oder Kubikmeter ist ein Würfel, welcher 1 Meter lang, 1^{m} breit und 1^{m} hoch ist. Was ist nun ein Kubikdecimeter? ein Kubikcentimeter? ein Kubikmillimeter? eine Kubikmeile?

§. 330. Resolviren und Reduciren.

Nach §. 131 ist
1 Kubikmeter $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$ Kubikdecimeter.
Eben so ist
1 Kubikdecim. $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$ Kubikcentimeter,
und 1 Kubikcentim. $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$ Kubikmillimeter.

Eine Einheit höherer Benennung macht bei den Längenmaßen 10, bei den Flächenmaßen 100, bei den Körpermaßen 1000 Einheiten, der nächstniederen Benennung. Die Unterabtheilungen des Meters werden daher durch einstellige Zahlen, die des Quadratmeters durch zweistellige, die des Kubikmeters durch dreistellige Zahlen bezeichnet.

1) $4 c^{m}$, $856 c^{dm}$ $785 c^{cm} =?$ c^{cm}.

Ausrechnung.

$4 c^{m}\ 856 c^{dm} = 4 \times 1000 + 856 c^{dm} = 4856 c^{dm}$
$4856 c^{dm}\ 785 c^{cm} = 4856 \times 1000 + 785 = 4856785\ c^{cm}$.

Also sind

$4c^{m}\ 856c^{dm}\ 785c^{cm} = 4856c^{dm}\ 785c^{cm}$

$= 4856785c^{cm}$.

Fehlende Stellen werden durch Nullen vertreten.

2) $8c^{m}\ 75c^{dm}\ 8c^{cm} = 8075c^{dm}\ 8c^{cm}$

$= 8075008c^{cm}$

3) $57934682c^{cm}$, wie viel c^{m}, c^{dm} und c^{cm}?

Ausr. 1000 Einheiten einer niederen Benennung geben eine Einheit der nächsthöheren. Man dividirt also durch 1000, d. i. man löst von der Rechten gegen die Linke je drei Stellen ab.

$57|934|682c^{cm} = 57c^{m}\ 934c^{dm}\ 682c^{cm}$.

b. In Decimalbrüchen.

Die Grundeinheit für die Längenmaße ist das Meter, für die Flächenmaße das Quadratmeter, für die Körpermaße das Kubikmeter.

$1c^{m} = 1000c^{dm}$; also $1c^{dm} = 0{,}001c^{m}$

24 " = 0,024 "

375 " = 0,375 "

$1c^{m} = 1000000c^{cm}$; also $1c^{cm} = 0{,}000001c^{m}$

36 " = 0,000036 "

748 " = 0,000748 "

Die Kubikdecimeter stehen in der 1., 2. und 3. Decimalstelle, die Kubikcentimeter stehen in der 4., 5. und 6. Decimalstelle.

Wo stehen die Kubikmeter? wo die Kubikdecimeter, die Kubikcentimeter?

Um einen Decimalbruch, welcher Körpermaße bezeichnet, zu lesen, so nimmt man vom Komma aus nach rechts immer drei Stellen zusammen. Die ersten drei Stellen enthalten die Kubikdecimeter, die folgenden drei Stellen die Kubikcentimeter. Bleibt am Ende nur eine Ziffer, so werden zwei Nullen beigefügt; bleiben 2 Ziffern, so wird nur noch für die dritte eine Null gesetzt.

$5{,}738.962c^{m} = 5c^{m}\ 738c^{dm}\ 962c^{cm}$

72,073.8 " = 72 " 73 " 800 "

359,450.73 " = 359 " 450 " 730 "

§. 331. Berechnung des Würfels.

Ist ein Würfel 2^{dm} lang (folglich auch breit und hoch), so beträgt seine Grundfläche 2×2 oder 4 $\square^{dm}$. Auf jedes □Decimeter kann ein Kubikdecimeter gesetzt werden. Auf der Grundfläche von 4 $\square^{dm}$ können somit 4 c^{dm} neben einander stehen. Sie bilden eine Schicht von 1^{dm} Höhe. Da der Würfel 2^{dm} hoch ist, so enthält er zwei dergleichen Schichten. Er ist also 2×4 oder 8 Kubikdecimeter groß.

Ist ein Würfel 3^{dm} lang, so enthält er 3 Schichten von je 3×3 oder 9 c^{dm}. Er ist also $3 \times 3 \times 3$ oder 27 c^{dm} groß.

Bei 4^{dm} Länge enthält ein Würfel 4 Schichten von je 4×4 oder 16 c^{dm}; sein Rauminhalt ist also $= 4 \times 4 \times 4 = 64\ c^{dm}$, u. s. w.

Anm. Das Produkt aus Länge und Breite bezeichnet zunächst den Quadratinhalt der Grundfläche, dann aber auch die Anzahl der Würfel, welche zusammen eine Schicht bilden. Die Zahl, welche die Höhe bestimmt, sagt, wie viele dergleichen Schichten der ganze Körper enthält. Darum gibt das Produkt aus der Länge, Breite und Höhe den Kubikinhalt. Da beim Würfel alle Seiten einander gleich sind, so kann man, um dessen Inhalt zu finden, die Zahl, welche die Länge des Würfels bezeichnet, mit sich selbst und das Produkt wieder mit derselben Zahl multipliciren.

Aufg. Welches ist der Kubikinhalt einer Grube, welche a. 4^m, b. 2^m 7^{dm} lang, breit und hoch ist?

Auflösung.

a. Eine Grube, welche 4^m lang, breit und hoch ist, hat eine Grundfläche von 4 × 4 oder 16 $\square^m$ und 4 Schichten von 4 × 4 oder 16 c^m; ihr Kubikinhalt ist also 4 × 4 × 4 oder 4 × 16 = 64 c^m.

b. Der Kubikinhalt eines Raumes, welcher 2^m 7^{dm} lang, breit und hoch ist, läßt sich auf zweierlei Weise berechnen.

Erstens: 2^m 7^{dm} = 27^{dm}. Die Grundfläche beträgt 27 × 27 oder 729 $\square^{dm}$ und der Kubikinhalt 27 × 27 × 27 oder 27 × 729 c^{dm}, nämlich 19683 c^{dm} oder 19 c^m 683 c^{dm}.

Zweitens: 2^m 7^{dm} = 2,7^m. Hiernach hat die Grundfläche 2,7 × 2,7 $\square^m$ und der Rauminhalt = 2,7 × 2,7 × 2,7 c^m, d. i. 19,683 c^m oder 19 c^m 683 c^{dm}.

§. 332. Das Prisma und der Cylinder.

Das Prisma (Fig. 17, 18, 19) ist ein Körper, welcher zwei gleiche Drei- oder Vier- oder Vielecke als Grundflächen und drei oder mehrere ebene Seitenflächen hat. Der Cylinder (die Rolle oder Walze, Fig. 20) hat zwei ebene kreisrunde Grundflächen und eine gewölbte Seitenfläche. Beide (Prisma und Cylinder) sind überall gleich dick.

Beispiel 1. Ein rechtwinkelig behauener Quaderstein ist 1^m 3^{dm} 7^{cm} lang, 8^{dm} 5^{cm} breit und 8^{dm} 6^{cm} hoch; wie viel beträgt sein Kubikinhalt? Antw. 1 c^m 1 c^{dm} 470 c^{cm}.

a. Ich verwandle die drei Ausdehnungen in Centimeter und multiplicire sie miteinander. So erhalte ich den Kubikinhalt in Kubikcentimetern.

b. Ich drücke die drei Ausdehnungen durch Decimalbrüche in Meter aus. Mit einander multiplicirt, geben sie den Inhalt in Kubikmetern.

Beispiel 2. Wie groß ist der Kubikinhalt eines dreiseitigen 3^m 7^{dm} hohen Körpers, dessen zwei (untere und obere) Grundflächen Dreiecke sind von 8^{dm} 4^{cm} Breite und 7^{dm} 3^{cm} Höhe?

Aufl. Die Grundfläche beträgt 0,84 × 0,73 $\square^m$, getheilt durch 2 = 0,3066 $\square^m$.

Von der untern Grundfläche bis zu 1^m Höhe beträgt der Kubikinhalt 0,3066 c^m, bis zu 3,7^m Höhe 3,7 × 0,3066 c^m = 1,13442 c^m = 1 c^m 134 c^{dm} 420 c^{cm}.

Beispiel 3. Ein Cylinder hat 6^{dm} 7^{cm} 8^{mm} im Durchmesser und ist 4^m 2^{dm} hoch. Wie groß ist sein Kubikinhalt?

Aufl. Zuerst berechne ich die Grundfläche. Diese ist ein Kreis von 0,678^m im Durchmesser. Der Halbmesser = 0,339^m; die Kreisfläche also = 0,339 × 0,339 × 3,14 = 0, 0,36085194 $\square^m$.

Nun suche ich den Kubikinhalt. Wäre der Cylinder 1^m hoch, so würde sein Inhalt so viele Kubikmeter betragen, als seine Grundfläche Quad=

ratmeter beträgt. Da er 4,2 m hoch ist, so ist sein Inhalt = 4,2 × 0,36085194 cm, nämlich 1,515578148 cm = 1 cm 515 cdm 578 ccm 148 cmm.

Beispiel 4. Ein viereckiges Gefäß ist 1 m 6 dm 2 cm 5 mm lang und breit und 1 m 6 dm 4 cm tief. a. Wie viel beträgt sein Kubikinhalt? b. Wie viel Liter Wasser faßt es? c. Welches Gewicht hat dieses?

Aufl. a. Die Grundfläche = 1,625 × 1,625 = 2,640625 □m. Der Kubikinhalt = 1,64 × 2,640625 = 4,330625 cm.

b. 1 cdm = 1 Liter; 4,330625 cm = 4330,625 cdm, also auch eben so viel Liter.

c. 1 Liter Wasser ist dem Gewichte nach = 1 Kilogramm; also wiegen 4330,625 lt Wasser eben so viel Kgr, nämlich 4330 Kgr 625 gr = 4 Tonnen 330 Kgr 625 gr.

§. 333. Die Pyramide und der Kegel.

Die Pyramide (Fig. 21, 22, 23) hat, wie das Prisma, entweder ein Dreieck oder ein Viereck, oder ein Vieleck als Grundfläche; der Kegel (Fig. 24) hat, wie der Cylinder, als Grundfläche einen Kreis. Beide nehmen gegen ihre Höhe an Dicke verhältnißmäßig ab und endigen in einer Spitze.

Eine Pyramide ist genau $^1/_3$ von einem Prisma, welches gleiche Grundfläche und Höhe mit ihm hat. Dasselbe Verhältniß besteht zwischen Kegel und Cylinder.

So lehrt die Stereometrie. Um den Schüler davon zu überzeugen, so fertige man einen Cylinder und einen Kegel von gleichen Grundflächen und gleicher Höhe, beide hohl. Mit derselben Masse Sand, welche der Cylinder auf einmal faßt, läßt sich der Kegel dreimal füllen.

Der Rauminhalt einer Pyramide und eines Kegels wird daher gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe vervielfacht und das Ergebniß durch 3 theilt, oder wenn man die Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe multiplicirt.

Aufgabe 1. Eine vierseitige Pyramide ist 4 m breit und tief und 12 m hoch; wie groß ist ihr Kubikinhalt?

Aufl. Die Grundfläche = 4 × 4 = 16 □m; der Kubikinhalt = 12 × 16, getheilt durch 3, oder 4 × 16 = 64 cm.

Aufg. 2. Ein Kegel hat 8 dm Durchmesser und 1 m 6 dm Höhe; wie viel beträgt sein Rauminhalt?

Aufl. Die Grundfläche = 0,4 × 0,4 × 3,14 = 0,5024 □m; der Rauminhalt = 1,6 × 0,5024 cm, durch 3 getheilt = 0,267956 . . cm = 267 cdm 946 ccm.

Aufgabe 3. Wie groß ist der Kubikinhalt einer 4seitigen Pyramide von 12 m Breite und Tiefe und 45 m Höhe? (2160 cm.)

Aufgabe 4. Ein Kegel hat 6 m Durchmesser und 20 m Höhe; was ist sein Rauminhalt? Antwort: 188,4 Kubikmeter.

§. 334. Der abgestumpfte Kegel.

Ein abgestumpfter Kegel entsteht, wenn die Spitze eines Kegels abgeschnitten wird. Dieß kann auf zweierlei Weise geschehen: so, daß

die obere Fläche mit der Grundfläche gleichlaufend ist, und so, daß sie mit dieser nicht gleichlaufend ist. Wir ziehen nur den ersteren Fall in Betracht. Ein abgestumpfter Kegel, dessen obere Fläche mit der Grundfläche gleichlaufend ist, läßt sich als eine Walze ansehen, deren Durchmesser gleich ist dem mittleren Durchmesser des abgestumpften Kegels. Man addirt also den obern und untern Durchmesser und nimmt von der Summe die Hälfte; aus dem so gefundenen mittleren Durchmesser berechnet man die Grundfläche, und diese, mit der Höhe multiplicirt, gibt den kubischen Inhalt.

Beispiel 1. Der untere Durchmesser sei 6^m, der obere 4^m, die Höhe 12^m; welches ist der Kubikinhalt?

Ausrechnung: $6 + 4 = 10$; die Hälfte von $10 = 5$. Der mittlere Durchmesser ist also 5^m. Die Kreisfläche des mittleren Durchschnitts $= 5 \times 5 \times 3{,}14$ getheilt durch $4 = 19{,}625$ $\square^m$; der kubische Inhalt $= 12 \times 19{,}625 = 235{,}5$ Kubikmeter.

Beispiel. 2. Ein abgesägter Baumstamm ist 15^m lang; sein Stammende hat $0{,}9^m$, sein Kopfende $0{,}7^m$ im Durchmesser; wie viel beträgt sein Kubikinhalt?

Ausr. Der mittlere Durchmesser $= 0{,}9 + 0{,}7^m$, getheilt durch $2 = 0{,}8^m$; der Halbmesser $= 0{,}4^m$; die Kreisfläche $= 0{,}4 \times 0{,}4 \times 3{,}14 = 0{,}5024$ $\square^m$; der Kubikinhalt $= 15 \times 0{,}5024 = 7{,}536c^m$ $= 7c^m$ $536c^{dm}$.

§. 335. Die Kugel.

Die Kugel hat nur eine einzige vollkommen runde Fläche, welche in allen Punkten gleichweit von dem Mittelpunkte entfernt ist.

Eine Kugel hat dieselbe Oberfläche, wie ein Cylinder, dessen Durchmesser und Höhe dem Kugeldurchmesser gleich sind. Demnach wird die Oberfläche einer Kugel gefunden, wenn man den Kugelumfang mit dem Kugeldurchmesser multiplicirt. Bei näherer Betrachtung ergibt sich, daß dieß eben so viel ist, als wenn man den Kugeldurchmesser mit sich selbst und das Produkt mit 3,14 multiplicirt.

Aufgabe 1. Der Durchmesser einer Kugel ist $0{,}8^m$; wie groß ist ihre Oberfläche? Antwort: Ist der Durchmesser $= 0{,}8^m$, so ist der Umfang $= 3{,}14 \times 0{,}8$; mithin ist die Kugeloberfläche $= 3{,}14 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 3{,}14 \times 0{,}64 = 2{,}0096$ $\square^m = 2$ $\square^m$ 96 $\square^{cm}$.

Aufgabe 2 Der Umfang einer Kugel ist $2{,}67^m$; wie groß ist ihre Oberfläche?

Aufl. Der Durchmesser $= 2{,}67^m$, dividirt durch $3{,}14 = 0{,}85^m$; die Oberfläche also $= 2{,}67 \times 0{,}85 = 2{,}2695$ $\square^m$.

Denkt man sich eine Kugel aus lauter Pyramidchen zusammengesetzt, deren Spitzen im Mittelpunkte zusammentreffen; so bilden die Grundflächen derselben zusammengenommen die Kugeloberfläche, und die Höhe einer Pyramide gibt den Halbmesser der Kugel. Man findet

also den Kubikinhalt einer Kugel, wenn man ihre Oberfläche mit ihrem Halbmesser multiplicirt und das Produkt durch 3 theilt.

Aufg. 1. Eine Kugel hat 3^{dm} Durchmesser, wie groß ist a. ihre Oberfläche? b. ihr Rauminhalt?

Aufl. a. die Oberfläche der Kugel = 3 × 3 × 3,14 = 9 × 3,14 = 28,26 $\square^{dm}$. b. Der Halbmesser = $\frac{1}{2}$ × 3^{dm} = $1{,}5^{dm}$; der Rauminhalt der Kugel ist also $\frac{1}{3}$ von 1,5 × 28,26 = 0,5 × 28,26 = 14,13 Kubikdezimeter.

Aufg. 2. Eine Kugel hat $2{,}4^{m}$ Durchmesser, was macht ihr Rauminhalt? Antwort: 7,23456 c^{m}.

Aufg. 3. Durch theilweise Messung hat man gefunden, daß der Umfang der Erdkugel 5400 Meilen beträgt. Wie groß ist a. der Durchmesser, b. der Halbmesser, c. die Oberfläche, d. der Kubikinhalt derselben?

Antwort: der Erddurchmesser = 1719,7 und der Erdhalbmesser = 859,8 Meilen, die Erdoberfläche = 9282060 Quadratmeilen, der Rauminhalt der Erde = 2659310190 Kubikmeilen.

§. 336. Aus dem Kubikinhalte eines rechtwinkligen Körpers und zweien Ausdehnungen desselben die dritte zu finden.

Ich multiplicire drei Zahlen mit einander und erhalte 60 als Produkt. Von den 3 Zahlen heißt die eine 3 und die andere 4. Wie heißt die dritte? (3 × 4 = 12; 12 in 60 = 5; die dritte Zahl heißt 5.)

Der Kubikinhalt eines rechtwinkeligen Körpers ist das Produkt aus Länge, Breite und Höhe. Wie werde ich nun eine von den drei Ausdehnungen finden, wenn die beiden andern und der Kubikinhalt gegeben sind? (Ich dividire den Kubikinhalt durch das Produkt der gegebenen Ausdehnungen.)

Aufg. Ein rechtwinkliges Gefäß soll 720 Kubikdecimeter (Liter) halten und inwendig 10^{dm} lang und 9^{dm} breit sein; welche Höhe muß es bekommen?

Ausr. a. 10 × 9 = 90; 720 getheilt durch 90 = 8; also 8^{dm}.

b. Da die Länge = 10^{dm}, die Breite = 9^{dm}, so ist die Grundfläche = 10 × 9 oder 90 $\square^{dm}$, und 1 Schichte von 1 ^{dm} Höhe = 90^{cdm}. So vielmal 90^{cdm} das Gefäß halten soll, eben so vielmal 1^{dm} hoch muß es gemacht werden. Die Höhe muß daher so viele Decimeter betragen, als 90 c^{dm} in 720 c^{dm} enthalten sind, nämlich 8.

§. 337. Das alte und das neue kubische Maß.

1 Kubikfuß = 0,024861 c^{m}	1 c^{m} = 40,2235 Kubikfuß.
1 Kubikzoll = 14,38721 c^{cm}	1 c^{cm} = 0,069506 Kubikzoll.

Aufg. 120 Kbfuß 600 Kbzoll., wie viel Kubikmeter?

Aufl. 120 Kubfß. = 120 × 0,024861 = 2,98332 c^{m}.
600 Kbzoll. = 600 × 14,38721 = 8632,326 c^{cm}.
2,98332 c^{m} = 2 c^{m} 983 c^{dm} 320 c^{cm}
8632,326 c^{cm} = 8 c^{dm} 632 c^{cm} 326 ^{cmm}.
2 c^{m} 991 c^{dm} 952 c^{cm} 326 c^{mm}.

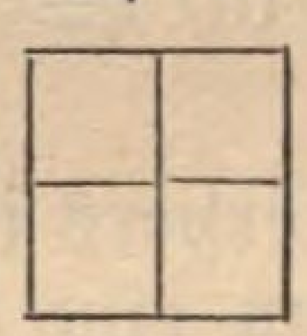
III. Die Quadratzahlen und ihre Wurzeln.

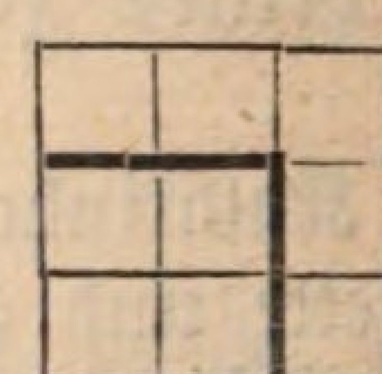
§. 338. *Entwicklung.*

a. Eine Quadratzahl entsteht, wenn man irgend eine Zahl mit sich selbst multiplicirt. So ist 2.2 oder 4 die Quadratzahl von 2, 3.3 oder 9 die Quadratzahl von 3 ꝛc. Die Quadratzahl ist also das Produkt aus zwei gleichen Faktoren. Statt 2.2 setzt man aber 2^2, und statt 3.3 setzt man 3^2 ꝛc. Man setzt also den Faktor nur einmal und hängt ihm, um anzuzeigen, daß er zweimal zu stehen habe, die kleine Ziffer ^{2} an. Demnach ist $1^2 = 1.1$ oder 1, $2^2 = 2.2$ oder 4, $3^2 = 3.3$ oder 9 ꝛc.

Den Faktor nennt man **Grundzahl**, wenn man von ihm die Quadratzahl sucht, und **Quadratwurzel**, wenn man ihn aus einer Quadratzahl bestimmt. Das Verfahren, die Quadratwurzel, d. i. einen der zwei gleichen Faktoren, von einer Zahl zu finden, heißt das **Ausziehen** der Quadratwurzel. Das Zeichen für diese Operation ist $\sqrt[2]{\ }$ oder bloß $\sqrt{\ }$. Bei $7^2 = 49$ ist 7 die Grundzahl und 49 die Quadratzahl davon; bei $\sqrt{}(49 = 7)$ ist von 49 7 die Quadratwurzel.

Die Benennung **Quadratzahl** kommt daher, weil sich die Menge der Einheiten einer solchen Zahl in Form von einem Quadrate oder durch ein Quadrat darstellen läßt.

$2^2 = 4 =$ • • / • • $=$ 

$3^2 = 9 =$ • • • / • • • / • • • $=$ 

Man sagt deßhalb statt Quadratzahl auch bloß **Quadrat**.

Stelle so die Quadratzahl der Zahlen von 1—10 dar und präge sie dir ein! Die Quadratzahlen von 20, 30 . . . . . 90 aber bilde frei im Kopfe! Eben so die Quadratzahlen von 11, 12, 13 . . . . . 19.

b. $23^2 = ?$ Da $23 = 20 + 3$, so ist 23^2 oder $23 \times 23 =$

$$\begin{array}{r} 20 + 3 \\ \times\, 20 + 3 \\ \hline 9 \\ 60 \\ 60 \\ 400 \\ \hline 23^2 = 529 \end{array}$$

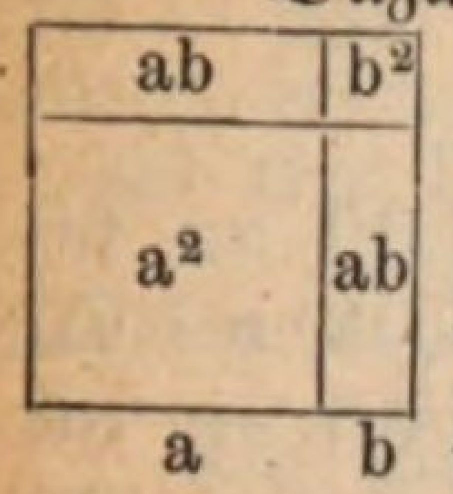
Besser:

$$\begin{array}{l} \quad 20 + 3 \\ \times\ 20 + 3 \\ \hline 20 \,.\, 20 = 400 = 20^2 \\ \left.\begin{array}{l} 20 \,.\, 3 = 60 \\ 3 \,.\, 20 = 60 \end{array}\right\} = 2\,(20 \,.\, 3) \\ 3 \,.\, 3 = 9 = 3^2 \\ \hline 23^2 = 529 \end{array}$$

Es ist also $23^2 = 20^2 + 2(20.3) + 3^2$. Nennt man die **Zehner** den **ersten** und die **Einer** den **zweiten** Theil der in's Quadrat erhobenen Zahl, so besteht die Quadratzahl einer **zweitheiligen Zahl**

aus dem Quadrate des ersten Theils,
aus dem doppelten Produkte des 1. und 2. Theils und
aus dem Quadrate des zweiten Theils.

Dazu führt auch folgende Anschauung:



Wie vorhin die Zahl 23 in Zehner und Einer, so ist hier die Grundlinie des ganzen Quadrats und zugleich jede andere Seite desselben in die zwei ungleichen Theile a und b abgetheilt. Der Flächeninhalt des ganzen Quadrats zerfällt hiernach durch Ziehung der entsprechenden Linien

in das Quadrat des größeren Theils (= a^2),

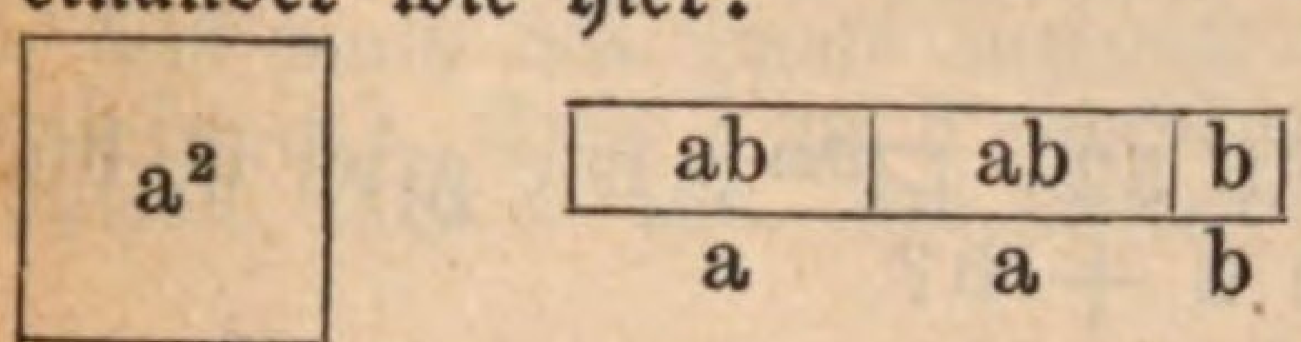
in 2 Rechtecke, von denen jedes den größeren Theil als eine und den kleineren Theil als andere Ausdehnung hat (= 2 ab), und

in das Quadrat des kleineren Theils (= b^2), mithin in

$$a^2 + 2ab + b^2$$

und das ist die Formel für das Ausziehen der Quadratwurzel.

Löst man bei obiger Figur die 2 Rechtecke und das Quadrat des kleineren Theils ab und legt diese 3 Stücke in einer Richtung nebeneinander wie hier:



so zeigt sich, daß die Quadratzahl oder das Quadrat einer 2theiligen Größe auch besteht:

1. aus der Quadratzahl (oder dem Quadrte) des 1. Theils und
2. aus dem Produkte (oder Rechtecke), welches den doppelten ersten Theil und den zweiten Theil (2a + b) als einen Faktor (als Länge) und den zweiten Theil (b) als anderen Faktor (als Breite) hat.

c. $1^2 = 1$	$10^2 = 100$	$100^2 = 10000$
$3^2 = 9$	$30^2 = 900$	$300^2 = 90000$
$4^2 = 16$	$40^2 = 1600$	$400^2 = 160000$
$9^2 = 81$	$99^2 = 9801$	$999^2 = 998001$

Vergleicht man an Vorstehendem die Grundzahlen mit ihren Quadratzahlen und sieht dabei auf die Anzahl ihrer Stellen, so ergibt sich Folgendes: die einstelligen Grundzahlen (1—9) geben ein= und zweistellige Quadratzahlen; die zweistelligen Grundzahlen (10—99) geben drei= und vierstellige Quadratzahlen; die dreistelligen Grundzahlen (100—999) geben fünf= und sechsstellige Quadratzahlen. Die Quadratzahl enthält also entweder doppelt so viel Stellen als ihre Grundzahl, oder doppelt so viel Stellen weniger eine.

Hieraus folgt umgekehrt, daß eine ein= oder zweistellige Quadratzahl nur eine einstellige Wurzel. eine drei= oder vierstellige Quadratzahl nur eine zweistellige Wurzel, eine fünf= oder sechsstellige Quadratzahl nur eine dreistellige Wurzel haben kann rc. Man theilt daher beim Ausziehen der Quadratwurzel die Quadratzahl von rechts nach links durch senkrechte Striche in Klassen zu 2 Stellen, wie: 5|29, 40|96, 1|51|29, 98|80|01. So viele Klassen die Quadratzahl hat, so viele Stellen hat ihre Wurzel.

§. 339. Das Ausziehen der Wurzel aus vollkommenen Quadratzahlen.

Zunächst wird Folgendes eingeübt:

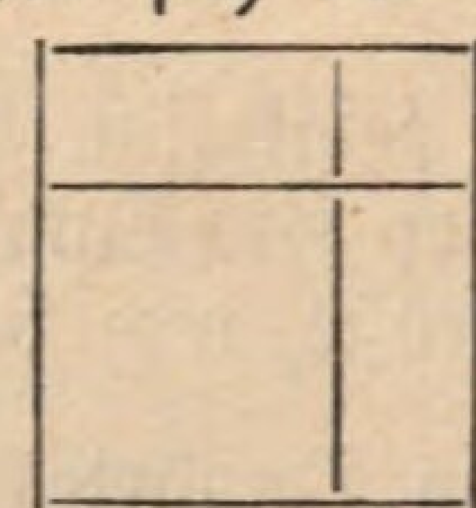
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{36.00} = 60$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{400} = 20$	$\sqrt{49.00} = 70$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{900} = 30$	$\sqrt{64.00} = 80$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{1600} = 40$	$\sqrt{81.00} = 90$
$\sqrt{25} = 5$		$\sqrt{2500} = 50$	

Die Quadratwurzel von 1 ist 1; denn 1 . 1 ist 1. Die Q.-Wurzel von 4 ist 2; denn 2 . 2 ist 4 rc. Die Q.-Wurzel von 1600 (16 Hundert) ist 40; denn 40 . 40 ist 1600 rc.

Nun wird zum schriftlichen Verfahren übergegangen.

Beispiel 1. $\sqrt{529} = ?$

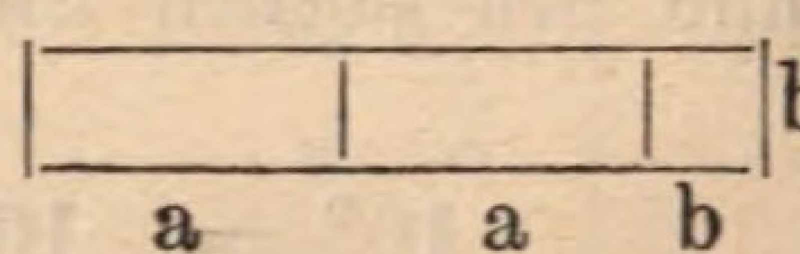
Da 5|29 zwei Klassen gibt, so wissen wir voraus, daß die Wurzel eine zweitheilige, d. i. eine aus Zehnern und Einern bestehende Zahl ist. Daher stellt sich die Aufgabe auch so:

Das Quadrat  enthält 529 □dm; wie groß ist die Seite a + b?

a b

Verfahren: $\sqrt{5|29} = 20 + 3 = 23$

	400
2 . 20 = 40	129
3 . 43	129



Erkl. Zuerst sucht man den ersten Theil (a) oder die Zehner der Wurzel. Die Quadratzahlen der Zehner sind 100, 400, 900 rc.; 500 ist nicht dabei. Die nächste Quadratzahl unter ihr ist 400. Die Wurzel von 400 ist 20. Der erste Theil oder a ist also 20; $20^2 = 20 . 20$ oder 400. Von den 529 □ des ganzen Quadrats bilden also 400 das Quadrat von a, und 529—400 oder 129 kommen auf das abgelöste Rechteck $2ab + b^2$.

Nun suchen wir den 2. Theil (b) oder die Einer der Wurzel. Der 2. Theil ist gleich der Breite des Rechtecks, dessen Quadratinhalt = 129 und dessen Länge = 2a + b. Wie wir wissen, wird die Breite eines Rechtecks gefunden, wenn man seinen Quadratinhalt durch seine Länge dividirt. Die Länge unseres Rechtecks ist nun zwar nicht vollständig, doch nahezu bekannt. Denn da a = 20, so ist 2a = 2 . 20 oder 40. Es fehlt also zur ganzen Länge nur noch der Theil b, welcher der Breite gleich und noch unbekannt ist. Wir müssen daher jetzt eben so verfahren wie beim Dividiren überhaupt, wenn z. B. gesucht werden soll, wie oft 41, oder 42, oder 43 rc. in 129 enthalten ist. Wir sehen von den Einern ab und suchen, wie oft 40 in 120 liegt.

40 in 120 liegt 3mal. Die Breite des Rechtecks oder b ist also = 3. Mithin ist die ganze Länge desselben = 40 + 3 oder 43, und sein Quadratinhalt = 3 . 43 oder 129; 129 von 129 geht auf. Die Wurzel von 529 oder die Seite a + b des ganzen Quadrats ist also 20 + 3 oder 23.

Beispiel 2. $\sqrt{46|24} = 60 + 8 = 68$

	3600
2 . 60 = 120	1024
8 . 128	1024

Erkl. Die Wurzel aus 46 (= 36 + 10) ist 6, aus 46.00 also 60 (=a); 60.60 = 3600 (=a^2); 3600 von 4624 bleibt 1024; das ist der Inhalt für das Rechteck, dessen Länge = 2a + b. Da a = 60, so ist 2a = 2.60 oder 120; 120 in 1020 oder 12 in 102 = 8 (= b); die ganze Länge des Rechtecks ist also 120 + 8 = 128, und der Inhalt desselben = 8.128 oder 1024. Geht auf. Die Wurzel aus 4624 ist also 60 + 8 oder 68.

Auf gleiche Weise wird die Wurzel gesucht von 625; 1296; 2025; 2916; 5184; 7569; 9604; dann wird zum **kürzeren** Verfahren übergegangen.

Beispiel 3. $\sqrt{17|64} = 42$

	16
8.	164
82	164

Erkl. Die Wurzel aus 17 (oder 16 + 1) ist 4 (=a), eigentlich 40; 4.4 = 16 (eigentlich 40.40 = 1600 = a^2); 16 von 17 bleibt 1; dazu die folgende Klasse macht für 2ab + b^2 zusammen 164. Da a = 4, so ist 2a = 8 (eigentlich 80, was durch den Punkt angezeigt ist); 8 liegt in 16 (eigentlich 80 in 160) 2mal (= b.) Diese 2 der 8 angehängt, macht 82. Das ist die ganze Länge des Rechtecks. 2.82 = 164. Die Wurzel aus 1764 ist also 42.

Beisp. 4. $\sqrt{11|90|25} = \overset{a\ \ b}{\widehat{34}}5$ (a b c)

	9
6.	290
64	256
68.	3425
685	3425

Kürzer: $\sqrt{11|90|25} = 345$

	9
64	290
	256
685	3425
	3425

Erkl. Die Quadratzahl hat 3 Klassen, die Wurzel also 3 Stellen. Man sucht zuerst die Wurzeltheile aus der ersten und zweiten Klasse, d. i. aus 1190, und sieht dabei von der folgenden Klasse ganz ab.

Die Wurzel aus 11 ist 3 (=a), eigentlich 30; 3.3 = 9 (eigentlich 30.30 = 900 = a^2); 9 von 11 bleibt 2; dazu die folgende Klasse, macht für 2ab + b^2 zusammen 290. Ist a = 3 (30), so ist 2a = 6 (60); 6 liegt in 29 (nämlich 60 in 290) 4mal (= b). Diese 4 der 6 angehängt, macht 64; 4 . 64 = 256; 256 von 290 = 34; hiezu die letzte Klasse, gibt 3425.

Nun sieht man die zwei gefundenen Wurzeltheile a + b oder 34 wieder als ersten Theil, als a, an und bestimmt hiezu den zweiten Theil b (eigentlich c).

Also ist jetzt a = 34 (eigentlich 340); 2a = 2 . 34 oder 68 (eigentlich 2 . 340 oder 680); 68 in 342 (eigentlich 680 in 3420) = 5; diese 5 der 68 angehängt, gibt 685; 5 . 685 = 3425. Die Wurzel ist also 345.

Noch einige Beispiele.

$\sqrt{51|84|00} = 720$

	49
142	284
	284
	00

$\sqrt{36|48|16} = 604$

	36
12.	4816
1204	4816

$\sqrt{55|77|10|24} = 7468$
49
$144 \mid 677$
576
$1486 \mid 10110$
8916
$14928 \mid 119424$
119424

Die Wurzel aus 55 ist 7; 7 . 7 oder 49 von 55 ab, läßt 6; dazu die nächste Kl., macht 677; a = 7, 2a = 14; 14 in 67 liegt 4mal; 4 . 144 = 576, von 677 ab, läßt 101; dazu die nächste Kl., gibt 10110; a = 74, 2a = 148; 148 in 1011 liegt 6mal; 6 . 1486 = 8916, abgezogen, läßt 1194; dazu die letzte Kl., ist 119424; a = 746, 2a = 1492; 1492 in 11942 liegt 8mal; 8 . 14928 = 119424, geht auf. Also ist die Wurzel aus 55771024 = 7468.

Aufgaben:

$\sqrt{591361}$	$\sqrt{1841449}$	$\sqrt{25725184}$
$\sqrt{651249}$	$\sqrt{5499025}$	$\sqrt{12809241}$
$\sqrt{921600}$	$\sqrt{55696369}$	$\sqrt{41319194}$
$\sqrt{300304}$	$\sqrt{73444900}$	$\sqrt{79834225}$
$\sqrt{427216}$	$\sqrt{23097636}$	$\sqrt{97930816}$

§. 340. Das Ausziehen der Wurzel aus Decimalbrüchen.

$0{,}1^2 = 0{,}01$	$0{,}01^2 = 0{,}0001$	$0{,}001^2 = 0{,}000001$
$0{,}3^2 = 0{,}09$	$0{,}09^2 = 0{,}0081$	$0{,}008^2 = 0{,}000064$
$0{,}4^2 = 0{,}16$	$0{,}25^2 = 0{,}0625$	$0{,}012^2 = 0{,}000144$
$0{,}9^2 = 0{,}81$	$0{,}99^2 = 0{,}9801$	$0{,}999^2 = 0{,}968001$

Hiernach sind die Quadratzahlen der Zehntel **Hundertel**, die der Hundertel **Zehntausendtel** und die der Tausendtel **Millionțel**. **Die Quadratzahl eines Deimalbruchs hat also immer doppelt so viel Stellen, als dieser.** Darum ist auch der Decimalbruch, aus welchem die Wurzel zu ziehen ist, in Klassen zu 2 Stellen abzutheilen. Fehlt eine Stelle, so wird eine Null, oder, wenn der Bruch ein periodischer ist, die treffende Stelle der Periode beigefügt. Das Verfahren bei dem Ausziehen der Wurzel ist das bisherige.

$\sqrt{0{,}12|96} = 0{,}36$
9
$66 \mid 396$
396

Die Wurzel aus 0 Ganzen = 0; die Wurzel aus 12 (Hunderteln) = 3 (Zehntel); das Quadrat derselben ab, läßt 3 (Hundertel). Dazu die nächste Klasse macht 396 (Zehntausendtel.) a = 3 (nämlich 30); also ist 2a = 6 (60); 6 in 39 (60 in 390) = 6; 6 . 66 = 396. Geht auf; also 2c.

$\sqrt{0{,}01|51|29} = 0{,}123$
1
$22|51$
44
$243|729$
729

$\sqrt{0{,}00|75|69} = 0{,}087$
64
$167|1169$
1169

Die Wurzel aus 0 Ganzen = 0 Ganze, und die Wurzel aus 00 Hunderteln = 0 Zehntel 2c.

```
√54,24|32|25 = 7,365
  49
 143 | 524
       429
 1466 | 9532
        8796
 14725 | 73625
         73625
```

```
√7|19,84|89 = 26,83
  4
 46 | 319
      276
 528 | 4384
       4224
 5363 | 16089
        16089
```

In den 2 letzten Beispielen, wo mit den Decimalen ganze Zahlen verbunden sind, wurde die Wurzel erst aus diesen bestimmt und zu dem Reste hievon die Klasse der Zehntel und Hundertel herunter geführt.

Aus dem letzten Beispiele ist auch zu ersehen, daß die Abtheilung in Klassen vom Decimalkomma aus geschieht, bei den ganzen Zahlen von rechts nach links, bei den Decimalen von links nach rechts.

§. 341. Das Ausziehen der Wurzel aus nicht vollkommenen (oder Irrational-) Zahlen.

$\sqrt{7} = ?$ Da $7 = 7{,}0000\ldots$, so ist die $\sqrt{7} =$

```
√7,00|00|00 = 2,645 . . .
  4
 46 | 300
      276
 524 | 2400
       2096
 5285 | 30400
        26525
         3975
```

Oder:

```
√7 = 2,645 . . .
  4
 46 | 300
      276
 524 | 2400
       2096
 5285 | 30400
        26425
         3975
```

Hierbei geht es nie auf. Die Wurzel läßt sich daher auch nicht ganz genau bestimmen. Sie wird aber um so vollständiger, je länger man die Operation fortsetzt. Mithin kommt es darauf an, welcher Grad von Genauigkeit erreicht werden will. In den gewöhnlichen Fällen wird es genügen, die Wurzel auf 2 oder höchstens 3 Decimalstellen zu bestimmen.

```
√0,24 = 0,489 . . .
  16        (nahe 0,49.)
 88 | 800
      704
 969 | 9600
       8721
        879
```

```
√48,50 = 6,96 . .
  36
 129 | 1240
       1611
 1386 | 8900
        8316
         585
```

§. 342. Das Ausziehen der Wurzel aus gemeinen Brüchen.

Da $^2/_3 \cdot {}^2/_3 = {}^4/_9$, so wird ein gemeiner Bruch in sein Quadrat erhoben, indem man sowohl den Zähler, als den Nenner mit sich selbst multiplicirt. Und da umgekehrt $\sqrt{^4/_9} = {}^2/_3$, so folgt, daß aus einem

gemeinen Bruche die Wurzel gefunden wird, indem man diese sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner desselben zieht.

$\sqrt{16/25} = 4/5 \qquad \sqrt{6^1/_4} = \sqrt{25/4} = 5/2 = 2^1/_2.$
$\sqrt{36/49} = 6/7 \qquad \sqrt{3^6/_{25}} = \sqrt{81/25} = 9/5 = 1^4/_5.$

Sind Zähler und Nenner nicht vollkommene Quadratzahlen, so verwandelt man den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch und sucht aus diesem die Wurzel. $27/32 = 0{,}84375$; also ist $\sqrt{27/32} = \sqrt{0{,}84|37|50} = 0{,}918 \ldots$

IV. Die Kubikzahlen und ihre Wurzeln.

§. 343. Entwicklung.

1. Eine Kubikzahl ist das Produkt aus drei gleichen Faktoren. $2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 2^3 = 8$, die Kubikzahl von 2 ist 8. Umgekehrt ist $\sqrt[3]{8} = 2$, d. i. die Kubikwurzel von 8 ist 2.

Der Name Kubikzahl kommt daher, weil sich die Menge der Einheiten einer solchen Zahl in Würfelform darstellen läßt, oder auch, weil der Rauminhalt eines Kubus gefunden wird, wenn man die Größe einer Kante desselben 3mal als Faktor setzt und das Produkt hieraus sucht.

2. $1^3 = 1$	$5^3 = 125$	$10^3 = 1.000$	$100^3 = 1.000000$
$2^3 = 8$	$6^3 = 216$	$20^3 = 8.000$	$200^3 = 8.000000$
$3^3 = 27$	$7^3 = 343$	$30^3 = 27.000$	$300^3 = 27.000000$
$4^3 = 64$	$8^3 = 512$	$40^3 = 64.000$	$400^3 = 64.000000$
	$9^3 = 729$	u. s. w.	u. s. w.

Die Kubikzahlen der Grundzahlen 1 bis 9 werden vollständig eingeprägt. Die Kubikzahlen der reinen Zehner aber betragen eben so viel Tausender und die der Hunderter eben so viele Millionen, als jene Einer.

3. Nun suchen wir, welche Bestandtheile der Kubus einer zweitheiligen Grundzahl hat. $24 = 20 + 4$; also ist $24^3 = (20 + 4) . (20 + 4) . (20 + 4)$.

$$
\begin{array}{l}
\quad 20 + 4 \\
\times\ 20 + 4 \\
\hline
\quad 20 \,.\, 20 + 20 \,.\, 4 + 20 \,.\, 4 + 4 \,.\, 4 \text{ (Quadrat)} \\
\times\ 20 + 4 \\
\hline
\quad 20 \,.\, 20 \,.\, 20 + 20 \,.\, 20 \,.\, 4 \\
\qquad\qquad + 20 \,.\, 20 \,.\, 4 + 20 \,.\, 4 \,.\, 4 \\
\qquad\qquad + 20 \,.\, 20 \,.\, 4 + 20 \,.\, 4 \,.\, 4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 20 \,.\, 4 \,.\, 4 + 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \\
\hline
\quad 20 \,.\, 20\ 20 + 3\,(20 \,.\, 20 \,.\, 4) + 3\,(20 \,.\, 4 \,.\, 4) + 4 \,.\, 4 \,.\, 4 =
\end{array}
$$

$= 20^3 + 3\,(20^2 \,.\, 4) + 3\,(20 \,.\, 4^2) + 4^3$; dieß ist, wenn man den 1. Theil durch a und den 2 durch b bezeichnet,

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Das ist die Formel für das Ausziehen der Kubikwurzel. Sie zeigt, daß der Kubus einer zweitheiligen Zahl besteht

a. aus der Kubikzahl des ersten Theils,

b. aus der 3fachen Quadratzahl des ersten Theils multiplicirt durch den zweiten Theil,

c. aus der 3fachen Quadratzahl des zweiten Theils multiplicirt durch den ersten Theil, und

d. aus der Kubikzahl des zweiten Theils.

4. $1^3 = 1$	$10^3 = 1.000$	$100^3 = 1.000.000$
$4^3 = 64$	$43^3 = 79.507$	$432^3 = 80.621.568$
$9^3 = 729$	$99^3 = 970.299$	$999^3 = 997.002.999$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Kubikzahlen der einstelligen Grundzahlen höchstens 3stellig, die der zweistelligen Grundzahlen höchstens 6stellig und die der dreistelligen Grundzahlen höchstens 9stellig sind Und hierauf gründet sich für das Ausziehen der Kubikwurzel die Abtheilung der gegebenen Zahl von rechts nach links in Klassen zu 3 Stellen.

§. 344. Das Ausziehen der Wurzel aus vollkommenen Kubikzahlen.

$$\sqrt[3]{39|304} = \underset{a}{30} + \underset{b}{4} = 34$$

$$a^3 = 30^3 = 27\,000$$

$$3a^2 = 3 \,.\, 30^2 = 2700 \,|\, 12\,304 \,|\, 4$$

$$3a^2b = 3 \,.\, 30^2 \,.\, 4 = 10\,800$$

$$3ab^2 = 3 \,.\, 30 \,.\, 4^2 = 1\,440$$

$$b^3 = 4^3 = 64$$

$$12\,304$$

Die Wurzel aus 39 (oder 27+12) ist 3, aus 39000 also 30; $30^3=27000$; dieß abgezogen, läßt 12304. Ist $a = 30$, so ist $a^2 = 30^2$ und $3a^2 = 3 \,.\, 30^2$ oder 2700. Um b zu finden, wird gesucht, wie oft 2700 in 12304 enthalten ist. Geht 4mal; $b = 4$. Demnach ist $3a^2b = 3 \,.\, 30^2 \,.\, 4$ oder 10800, $3ab^2 = 3.30.4^2$ oder 1440, und $b^3 = 4^3$ oder 64, zusammen 12304. Dieß von 12304 ab, geht auf. Die Wurzel ist also 30 + 4 oder 34.

$$\sqrt[3]{421|875} = 70 + 5 = 75.$$

$$70^3 = 343$$

$$3 \,.\, 70^2 \,|\, 78\,875 \,|\, 5$$

$$3 \,.\, 70^2 . 5 = 73\,500$$

$$3 \,.\, 70 . 5^2 = 5\,250$$

$$5^3 = 125$$

$$78875$$

$$\sqrt[3]{80|621|568} = \overset{a\ \ b}{\widehat{4\ 3}}\,2 \qquad (a\ b\ c)$$

$$\begin{aligned}
a^3 &= 4^3 = 64 \\
3a^2 &= 3\,.\,40^2 \,|\, 16\,621\,|\,3 \\
3a^2b &= 3\,.\,40^2\,.\,3 = 14\,400 \\
3ab^2 &= 3\,.\,40\,.\,3^2 = \ \ 1\,080 \\
b^3 &= 3^3 = \ \ \ \ 27 \\
& \overline{\ 15\,507\ } \\
3a^2 &= 3\,.\,430^2 \,|\, 1\,114\,568\,|\,2 \\
3a^2b &= 3\,.\,430^2\,.\,2 = 1\,109\,400 \\
2ab^2 &= 3\,.\,430\,.\,2^2 = \ \ 5160 \\
b^3 &= 2^3 = \ \ \ \ 8 \\
& \overline{\ 1\,114\,568\ }
\end{aligned}$$

Die Kubikwurzel aus 80 ist 4; also ist $a^3 = 4^3 = 64$; 64 von 80 bleibt 16, dazu die nächste Klasse, macht 16621, und dieß ist für $3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Da $a = 40$, so ist $a^2 = 1600$ und $3a^2 = 4800$; 4800 ist in 16621 3mal enthalten; $b = 3$. Demnach ist $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 15507$. Dieß von 16621 ab, läßt 1114, dazu die nächste Klasse, macht 1114568.

Wie beim Ausziehen der Quadratwurzel, wenn diese dreitheilig ist, so betrachten wir auch hier nun $a + b$ als a. Mithin ist $a = 430$, $a^2 = 430^2$, und $3a^2 = 3\,.\,430^2 = 554700$, welche Zahl in 1114568 nur 2mal liegt; $b = 2$. Demnach ist $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1114568$. Geht auf. Die Wurzel ist also 432.

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{373|248|000} = 720. \\
7^3 &= 343 \\
3\,.\,70^2 &\,|\, 30\,248\,|\,2 \\
3\,.\,70^2\,.\,2 &= 29\,400 \\
3\,.\,70\,.\,2^2 &= \ \ 840 \\
2^3 &= \ \ \ \ 8 \\
& \overline{\ 30248\ } \\
& \overline{\ \ 000\ }
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&\sqrt[3]{220|348|864} = 604 \\
6^3 &= 216 \\
3\,.\,60^2 &\,|\, 4\,348\,|\,0 \\
3\,.\,600^2 &\,|\, 4\,348\,864\,|\,4 \\
3\,.\,600^2\,.\,4 &= 4\,320\,000 \\
3\,.\,600\,.\,4^2 &= \ \ 28\,800 \\
4^3 &= \ \ \ \ 64 \\
& \overline{\ 4348\,864\ }
\end{aligned}$$

Aufgaben.

1) $\sqrt[3]{830584}$.
6) $\sqrt[3]{758550528}$.

2) $\sqrt[3]{438976}$.
7) $\sqrt[3]{669921875}$.

3) $\sqrt[3]{571787}$.
8) $\sqrt[3]{17596287801}$.

4) $\sqrt[3]{300763}$.
9) $\sqrt[3]{567869252041}$.

5) $\sqrt[3]{1481544}$.
10) $\sqrt[3]{151334226289}$.

§. 345. Das Ausziehen der Wurzel aus Decimalbrüchen.

$0{,}9^3 = 0{,}729$; $0{,}99^3 = 0{,}970299$, und $0{,}999^3 = 0{,}997002999$.

Die Kubikzahl eines Decimalbruchs hat also 3mal so viel Stellen

als die Grundzahl; deßhalb muß man sie von links nach rechts in Klassen zu 3 Stellen abtheilen.

$\sqrt[3]{0{,}262|144} = 0{,}64$

262

$60^3 = 216$

$3 . 60^2 \quad | \; 46144 \, | \; 4$

$3 . 60^2 . 4 = 43200$

$3 . 60 . 4^2 = 2880$

$4^3 = 64$

46144

$\sqrt[3]{103{,}823} = 4{,}7$

$4^3 = 64$

$3 . 40^2 \quad | \; 39823 \, | \; 7$

$3 . 40^2 . 7 = 33600$

$3 . 40 . 7^2 = 5880$

$7^3 = 343$

39823

§. 346. **Das Ausziehen der Wurzel aus Irrational-Zahlen.**

$\sqrt[3]{12} = 2{,}28 \ldots$

$2^3 = 8$

$3 . 20^2 \quad | \; 4000 \, | \, 2$

$3 . 20^2 . 2 = 2400$

$3 . 20 . 2^2 = 240$

$2^3 = 8$

2648

$3 . 220^2 \, | \, 1352000 \, | \, 8$

$3 . 220^2 . 8 = 1161600$

$3 . 220 . 8^2 = 42240$

$8^3 = 512$

1204352

147648

V. Von dem Grundsteuer-Kataster.

Eine in Bayern im zweiten Viertel dieses Jahrhunderts durchgeführte sehr vortreffliche Einrichtung ist die Art und Weise, wie die Grundsteuer berechnet wird. Dieselbe ist nämlich nicht nur von der Größe eines Grundstückes, sondern zugleich auch von dessen Bodengüte abhängig gemacht. Deßhalb wurde das ganze Land in allen seinen einzelnen Parcellen neu vermessen und die Bodengüte der einzelnen Lagen möglichst genau bestimmt.

Als Grundeinheit des Maßes ist das bayerische Tagwerk angenommen. Dasselbe ist 40000 Quadratfuß groß und ist in allen Regierungsbezirken (mit Ausnahme von Unterfranken) in 100 Theile eingetheilt, welche kurzweg Decimale heißen. Unter einem Decimale versteht man also $^1/_{100}$ Tagwerk.

2 Tagwerke 45 Decimale = 2,45 Tagwerk; 68 Decimale = 0,68 Tagwerk; 9 Decimale = 0,09 Tagwerk.

Ein solches Decimal = 400 Quadratfuß, das ist eine Fläche, 20 Fuß lang und breit, oder 40 Fuß lang und 10 Fuß breit.

In Unterfranken, wo schon eine größere Zertheilung der Grundstücke Platz gegriffen, ist das Tagwerk in 1000 Theile eingetheilt. Diese Theile heißen gleichfalls Decimale. Hier hat man sich also unter einem Decimal $^1/_{1000}$ von einem Tagwerk vorzustellen.

2 Tagw. 375 Decim. also = 2,375 Tagw.; 865 Decim. = 0,865 Tagw; 70 Decim. = 0,070 Tagw.; 9 Decim. = 0,009 Tgw.

Ein Decimal dieser Art = 40 Quadratfuß, also eine Fläche von 10 Fuß Länge und 4 Fuß Breite.

Hinsichtlich der Bodengüte (Bonität) sind die einzelnen Grundstücke in Klassen gebracht, welche durch Ziffern bezeichnet werden. Je besser der Boden eines Feldes, desto höher seine Klassenziffer. Ein Grundstück mit der Klassenziffer 16 ist von doppelter Bodengüte als ein anderes mit der Klassenziffer 8.

Denken wir uns drei Aecker mit A, B, C bezeichnet.
A sei 2 Tagw. groß und habe die Bodenklasse 8.
B sei 2 Tagw. groß und habe die Bodenklasse 16.
C sei 4 Tagw. groß und habe die Bodenklasse 16.

Die Aecker A und B sind von gleicher Größe; jeder derselben ist 2 Tagwerk groß. Hinsichtlich ihrer Bodengüte aber sind sie verschieden. Die Bodenklasse B ist 2mal so hoch, als die des A; B wird daher, unter gleichen übrigen Umständen, 2mal so viel ertragen, als der Acker A.

Die Aecker B und C haben gleiche Bodengüte. Beide liegen in der 16. Bonitätsklasse. C ist jedoch 2mal so groß als B. Der Ertrag und dadurch auch der Werth des C besteht daher in dem Doppelten von dem des B, folglich in dem Vierfachen von dem des A.

Dieß Ertrags- und Werths-Verhältniß der drei Grundstücke zu einander wird auf das Genaueste durch das Produkt aus der Flächengröße und der Klassenziffer ausgedrückt. Dasselbe ist
von A = 2 × 8 = **16**
von B = 2 × 16 = **32** (= 2 × 16.)
von C = 4 × 16 = **64** (= 2 × 32 = 4 × 16.)

Darum heißt man die Zahlen 16, 32 und 64 „Verhältnißzahlen." Aus ihnen berechnet sich die Steuer. Die einfache Steuer — das Steuer-simplum — ist von A = 16 kr., von B = 32 kr., von C = 64 kr.

Wie vielmal die einfache Steuer jährlich zu erheben ist, wird durch die Staats-Regierung mit Zuziehung der Stände des Reichs von 2 zu 2 Jahren bestimmt. Werden z. B. 2,8 Simpla bezahlt, so ist die Jahressteuer

von A = 2,8 × 16 kr. = 44,8 kr. = 44 kr. 6,4 hlr. = **44 kr. 6 hlr.**
„ B = 2,8 × 32 kr. = 89,6 kr. = 89 kr. 4,6 hlr. = **89 kr. 5 hlr.**
„ C = 2,8 × 64 kr. = 179,2 kr. = 179 kr. 1,6 hlr. = **179 kr. 2 hlr.**

Der Lehrer nehme hierauf einige Steuerkatasterauszüge, welche jeder bayerische Unterthan für seinen Grundbesitz in Händen hat, ausführlich mit den Schülern durch, damit sie solche in ihrer Einrichtung kennen und die Vortrefflichkeit derselben würdigen lernen. Dann zeichne er Folgendes mit Weglassung der Verhältnißzahl und Steuer an die Wandtafel und gebe den Schülern auf, die hiefür leer gelassenen Rubriken auszufüllen.

Pl.-Nr.	Bezeichnung des steuerbaren Objekts.	Tagw.	Decim.	Bonitätsklasse.	Verhältnißzahl.	Einfache Steuergröße.		
						fl.	kr.	hl.
715	Hausleiten . . .	2	74	14	38,4	—	38	3
836	Morgarten . . .	0	96	13	12,5	—	12	4
1235	Eggerten . . .	3	25	15	48,8	—	48	6
894	Siegesthal . . .	1	08	12	13,0	—	13	—
456	Langenlohe . . .	4	79	17	81,4	1	21	3
579	Breitenfeld . . .	8	42	16	134,7	2	14	6
	Summe	21	24	—	328,8	5	28	6

Die Jahressteuer hievon = 2,8 × 328,8 kr. = 920,64 kr. Die $^4/_{100}$ werden weggeworfen. 920,6 kr. = 15 fl. 20 kr. 5 hlr.

Für Unterfranken.

Pl.-Nr.	Bezeichnung des steuerbaren Objekts.	Tagw.	Decim.	Bonitätsklasse.	Verhältnißzahl.	Einfache Steuergröße.		
						fl.	kr.	hl.
722	Hausleiten . . .	2	745	14	38,4	—	38	3
836	Morgarten . . .	0	964	13	12,5	—	12	4
1257	Eggerten . . .	3	257	15	48,9	—	48	7
894	Siegesthal . . .	1	082	12	13,0	—	13	—
476	Langenlohe . . .	4	798	17	81,6	1	21	5
579	Breitenfeld . . .	8	420	16	134,7	2	14	6
	Summe	21	266	—	329,1	5	29	1

Die Jahressteuer = 2,8×329,1 kr. = 921,48 kr. = 921,5 kr. = 15 fl. 21 kr. 4 hl.

VI. Algebraische Aufgaben.

Für Präparandenschulen.

1) Von welcher Zahl sind $^6/_7$ um $32^1/_2$ größer, als $^5/_8$ derselben?

2) A hat wöchentlich 30 Stunden Unterricht zu geben. B sagt zu ihm: „$^7/_{12}$ meiner Unterrichtszeit sind gleich $^7/_{10}$ der deinigen.“ Wie viel Stunden gibt B wöchentlich Unterricht?

3) Wie heißt die Zahl, deren 9faches um $22^1/_2$ kleiner ist, als deren 15faches.

4) Ein Vater ist um 51 Jahre älter oder, was gleichviel ist, 4mal so alt, als sein Sohn. Wie alt sind sie beide?

5) Der 12. Theil einer Zahl ist um $49^1/_2$ kleiner als dieselbe. Wie heißt sie?

6) Nachdem A gesagt hatte, wie viel Vermögen er habe, entgegnete B: „Ich besitze nur $^{11}/_{18}$mal so viel. Hätte ich 1250 fl. mehr, so würde mir noch $^1/_9$ von dem Deinigen fehlen, um dir gleich zu stehen.“ Wie viel Vermögen hatte jeder?

7) Wie heißen die zwei Zahlen, deren Summe $= 120$ und deren $7^1/_2$facher Unterschied $= 60$?

8) Auf die Frage, wie viel sein Jahresgehalt betrage, antwortete A: „Wenn ich $3^1/_2$mal so viel hätte, als ich habe, so würden mir immer noch $15 \times 8^1/_3$ fl. auf 1000 fl. fehlen.“ Wie viel Gehalt hatte er jährlich?

9) Wie heißen die zwei Theile von 536, deren einer $^3/_5$ des andern beträgt?

10) X hat $1^1/_2$mal so viel Krthlr. als Preußenthaler, und 36 Guldenstücke. Die Zahl seiner Krthlr. und seiner Guldenstücke zusammen ist um 60 größer, als die seiner Preußenthaler. Wie viel preuß. Thaler hat er?

11) Ich denke mir eine gewisse Zahl. Multiplicire ich dieselbe durch 6, addire zum Produkte 8, dividire die Summe durch 5, und ziehe vom Quotienten 7 ab, so erhalte ich 9. Welche Zahl ist es?

12) Es kauft Jemand 2 Hektoliter Wein von verschiedenen Sorten und bezahlt dafür 51 Mrk.; wenn das Hektoliter von der besseren Sorte um 9 Mrk. 80 Pf. im Preise höher steht, als das Hektoliter von der geringeren Sorte, wie viel hat er für jedes Hektoliter bezahlen müssen?

13) 8 Hl Weizen und 6 Hl Roggen zusammen kosten 214 Mrk. Der Unterschied der Preise beträgt 4 Mrk. per Hl. Wie theuer ist ein Hl jeder Fruchtgattung?

14) A kauft 16 Pfd. Kaffee und 24 Pfd. Zucker und zahlt dafür 41,6 Mrk. Wenn nun 4 Pfd. Kaffee so viel kosten, als 7 Pfund Zucker, wie viel hat er für das Pfund Kaffee und für das Pfd. Zucker bezahlt?

15) Wie heißen die zwei Theile von 100, wenn der eine um 8 größer ist, als $^1/_3$ des andern?

16) A, B und C haben mit einander 300 Mrk. Die Baarschaft des

B ist um 12 M., die Baarschaft des C um 24 M. größer, als $^1/_6$ von der des A. Wie viel Geld besitzt jeder von ihnen?

17) Ich denke mir eine Zahl; wenn ich 36 dazu lege, so erhalte ich so viel über 60, als sie selbst unter 60 steht. Wie heißt sie?

18) A und B haben mit einander 100 fl. Würde A an B 12 fl. abgeben, so hätten beide gleichviel. Wie viel beträgt die Baarschaft eines jeden?

19) Auf die Frage, wie viele Meilen weit er mit dem Bahnzug gefahren sei, antwortete A: „Hätte ich 24 Meilen mehr zurückgelegt, so würde $^1/_4$ des Weges 27 Meilen machen." Wie viele Meilen beträgt demnach der zurückgelegte Weg?

20) 2 Freunde, welche 92 Meilen von einander entfernt sind, reisen einander entgegen. A macht täglich $5^1/_2$, B 6 Meilen. Nach wie viel Tagen treffen sie zusammen?

21) Die Eisenbahn von A nach B hat ein doppeltes Geleise und ist 75 Meilen lang. Wenn nun diesen Weg der Postzug in 10, der Eilzug in 8 Zeitstunden zurücklegt, und beide von der entgegengesetzten Seite aus zu gleicher Zeit abgehen, wann werden sie einander begegnen?

22) Beide Züge gehen einmal von A nach B ab und zwar der Postzug Mittag 12 Uhr, der Eilzug eine halbe Stunde darauf. Wann wird der Eilzug den Postzug einholen?

23) B will sich auf einige Zeit verreisen und überschlägt die Reisekosten. Nimmt er an, daß seine Reise 30 Tage daure, so bleiben ihm 35 fl. seines Geldes übrig; nimmt er 40 Tage an, so fehlen ihm 20 fl. Wie viel beträgt seine Baarschaft?

24) Arbeitet C 28 Tage um Lohn, so fehlen ihm zur Bezahlung eines Schuldpostens 10,8 Mrk.; arbeitet er 34 Tage, so fehlen ihm noch 2,9 Mrk. a. Wie viel verdient er täglich? b. Wie viel beträgt die Schuld?

25) Zwei Freunde fragen einander nach ihrem Alter. A sagt: „Nach 36 Jahren werde ich $2^1/_2$mal so alt sein, als jetzt", und B: „Vor 8 Jahren war ich $^5/_7$mal so alt, als gegenwärtig." Wie alt sind demnach beide?

26) Ich denke mir eine Zahl. Ihr 5faches + 15 ist eben so viel, als ihr 6faches + 4. Welches ist diese Zahl?

27) Ein Wasserbecken hat zwei Zuflußröhren, A und B, und zwei Abflußröhren X und Y; A füllt es in 8 Stunden, B in 10 Std.; X leert es in 12 Std., Y in 15 Std. Wie lange dauert die Füllung des leeren Beckens, wenn geöffnet sind: 1) A und B? 2) A und X? 3) B und Y? 4) A, B, X und Y?

28) Bei 3 Brüdern beträgt das Alter von A und B zusammen 120 Jahre, von B und C 136 Jahre und von A und C 128 Jahre. Wie alt ist jeder derselben?

29) 175 fl. wurden mit Krthlrn. und prß. Thalern gezahlt. Wie viele Stücke waren es von jeder Sorte, da ihre ganze Anzahl 81 betrug?

30) A und B spielten Billard. Vor dem Spiele hatte A 28 und B 49 Mrk.; nach dem Spiele hatte B $2^1/_2$mal so viel Geld, als A. Wie viel hat B gewonnen?

31) A, B und C theilen eine Summe im Verhältniß von 3, 5, 7 unter sich. Der auf C kommende Antheil beträgt 320 fl. mehr, als der des A. Wie viel beträgt die Summe und wie viel erhält jeder?

32) Ein Fischer gibt seinem Sohne für jeden vollen Zug mit dem Netze 25 Pf. Belohnung, läßt ihn aber für jeden Fehlzug 15 Pf. Strafe bezahlen. Wenn nun der Sohn nach 12 Zügen gerade 1 Mrk. erhält, wie viel leere und wie viel volle Züge hat er gethan?

33) Ein Erdhaufen von 3300 Kubikfuß soll durch 3 Fuhrleute weggeräumt werden. Der erste Fuhrmann verspricht in je 6 Stunden 246 Kubikfuß, der zweite in 7 Stunden 336 Kubikfuß und der dritte in 9 Std. 387 Kubikfuß hinwegzuschaffen. Wann werden alle drei zugleich fertig?

34) Ein Kaufmann gewann durch einen glücklichen Handel $16\frac{2}{3}\%$ und die dazu verwendete Summe wuchs hierdurch auf 1470 fl. Was war sein angelegtes Kapital?

35) Ein Spieler verlor im ersten Spiel den 6. Theil und in dem zweiten Spiele den 8. Theil seiner mitgebrachten Baarschaft. Im dritten Spiele gewann er zwar den 5 Theil derselben wieder, sein Verlust betrug aber immer noch 2,75 Mrk. Wie viel Geld hatte er mitgebracht?

36) Eine Gesellschaft von 113 Personen besteht aus Männern, Frauen und Kindern; der Männer sind 5 mehr als der Frauen, der Kinder 7 mehr als der Erwachsenen. Wie viel Männer, Frauen und Kinder befinden sich darunter?

37) Die Garnison einer Stadt besteht aus 1075 Mann, theils Infanterie, theils Kavallerie. Jeder Infanterist bekommt monatlich 5 fl., jeder Kavallerist 7 fl. Wie viele Kavalleristen und wie viele Infanteristen sind es, wenn der monatliche Sold 5825 fl. beträgt?

38) Ein Maurermeister verdiente mit seinen 8 Gesellen und 4 Handlangern 375,6 Mrk. Der Meister erhielt täglich 2,25 Mrk., jeder Geselle 1,25 Mrk. und jeder Handlanger 85 Pfg. Wie lange haben sie für dieses Geld gearbeitet?

39) Dem Boten A wird nach 12 Stunden der Bote B nachgeschickt. Die Schnelligkeit des B verhält sich zu der des A wie 8 : 3. Nach wie viel Stunden wird A von B eingeholt werden?

40) $\frac{5}{6}$ einer gewissen Zahl betragen 200 weniger, $\frac{7}{10}$ derselben aber 280 weniger, als welche andere Zahl?

41) Aus einem gewissen Orte wird ein Kurier abgesendet, der alle 5 Stunden 7 Meilen macht. 8 Stunden darauf wird ihm ein anderer nachgeschickt, und dieser muß, um jenen einzuholen, alle 3 Stunden 5 Meilen machen. Wann wird der 2. Kurier den ersten erreichen?

42) Ein Regiment marschirt aus dem Orte A geraden Wegs nach dem Orte B und macht täglich $3\frac{1}{2}$ Meilen. 8 Tage nachher marschirt ein anderes Regiment aus dem Orte B gerade auf A los und macht täglich $5\frac{1}{6}$ Meilen. Beide Orte sind 80 Meilen von einander entfernt. An welchem Tage nach dem Ausmarsche des ersten werden beide Regimenter zusammentreffen?

43) A ist vor 3 Tagen von einem gewissen Orte abgereist und

legt täglich $4^2/_3$ Meilen zurück, B reist ihm vom nämlichen Orte aus nach und will ihn in 6 Tagen eingeholt haben. Wie viele Meilen muß B zu dem Ende täglich machen?

44) Um 12 Uhr stehen beide Zeiger einer Uhr über einander. Wann und wie oft werden dieselben in den nächsten zwölf Stunden wieder übereinander stehen?

45) A will eine goldene Uhr ausspielen und macht zu dem Zwecke eine gewisse Anzahl Loose. Gibt er das Loos für 1,4 Mrk., so verliert er an der Uhr 5,4 Mrk.; gibt er das Loos für 1,7 Mrk., so gewinnt er 4,2 Mrk. daran. Wie viel hat ihn die Uhr gekostet und wie viel Loose hat er gemacht?

46) Ein Vater ist jetzt um 36 Jahre älter als seine drei Kinder zusammen. Wann werden diese zusammen eben so alt sein, wie ihr Vater?

47) Bei einem Wagen hat jedes Vorderrad 2,7, jedes Hinterrad 3,5 Meter Umfang. Wenn nun bei einer Reise das Vorderrad 2000 Umläufe mehr als das Hinterrad gemacht hat: wie groß ist der Weg, den man zurücklegte?

48) Ein Kapitalist ziehet von seinen auf Zinsen stehenden Kapitalien 2940 fl. jährliche Renten; vier Fünftel derselben tragen 4 und ein Fünftel trägt 5 procent. Wie viel Geld hat er ausstehen?

49) In einer zahlreichen Gesellschaft wollte man für einen Armen eine gewisse Summe sammeln. Als sich jeder von der Gesellschaft zu einem Beitrage von 80 Pfg. erbot, ergaben sich 4,8 Mrk. zu viel. Es wurde daher der Vorschlag gemacht, daß jeder nur 72 Pfg. geben solle. Da fand sich aber, daß alsdann 2,88 Mrk. an der gewünschten Summe fehlen würden. Aus wie viel Personen bestand die Gesellschaft? Wie viel sollte für den Armen gesammelt werden? Und wie viel mußte jeder dazu beitragen?

50) „Wie geht es zu, fragte ein Spaziergänger einen andern, daß du mir um 3000^m vorangeeilt bist, da ich doch doppelt so große Schritte mache als du?“ — „Das gebe ich zu, erwiderte ihm jener; aber ich machte fünfmal so viele Schritte als du.“ Wenn es sich nun wirklich so verhielt; wie viel Meter mußte jeder zurückgelegt haben?

51) A gibt ein Kapital von 5500 fl. zu $4^0/_0$ auf Zinsen, und $4^1/_2$ Jahr nachher ein anderes Kapital von 8000 fl. zu $5^0/_0$. Wenn er nun diese zwei Kapitalien fortwährend auf Zinsen stehen läßt, nach wie viel Jahren wird er von beiden gleich viel an Zinsen bezogen haben?

52) Es hat Jemand drei Stücke Metall von gleicher Größe. Von dem ersten wiegen 5 ccm $79^3/_4$ Dgr, von dem zweiten $3^1/_4$ ccm 41 Dgr, von dem dritten $4^2/_7$ ccm 91 Dgr. Wenn nun diese 3 Stücke zusammen $949^2/_3$ Dgr wiegen, wie groß ist jedes von ihnen?

53) A hat $^1/_5$ mehr Geld als B. Verliert A an B $^1/_4$ seines Geldes, und hierauf B an A 8 fl., so haben Beide gleich viel. Wie viel betrug zuerst die Baarschaft eines jeden?

54) Eine Anzahl von Geldstücken soll in Form eines Quadrats neben einander gelegt werden. Beim ersten Versuch bleiben 61 Stücke übrig; vermehrt man aber die Seite des Quadrats um 2 Stücke, so fehlen 75. Wie groß ist die Anzahl der Geldstücke?

55) Ein General wollte sein Regiment in ein Quadrat stellen. Er versuchte es auf zwei Arten. Das erstemal blieben ihm 164 Mann übrig; das zweitemal, da er die Seite des Quadrats um einen Mann vergrößerte, blieben ihm 75 übrig. Wie stark war das Regiment?

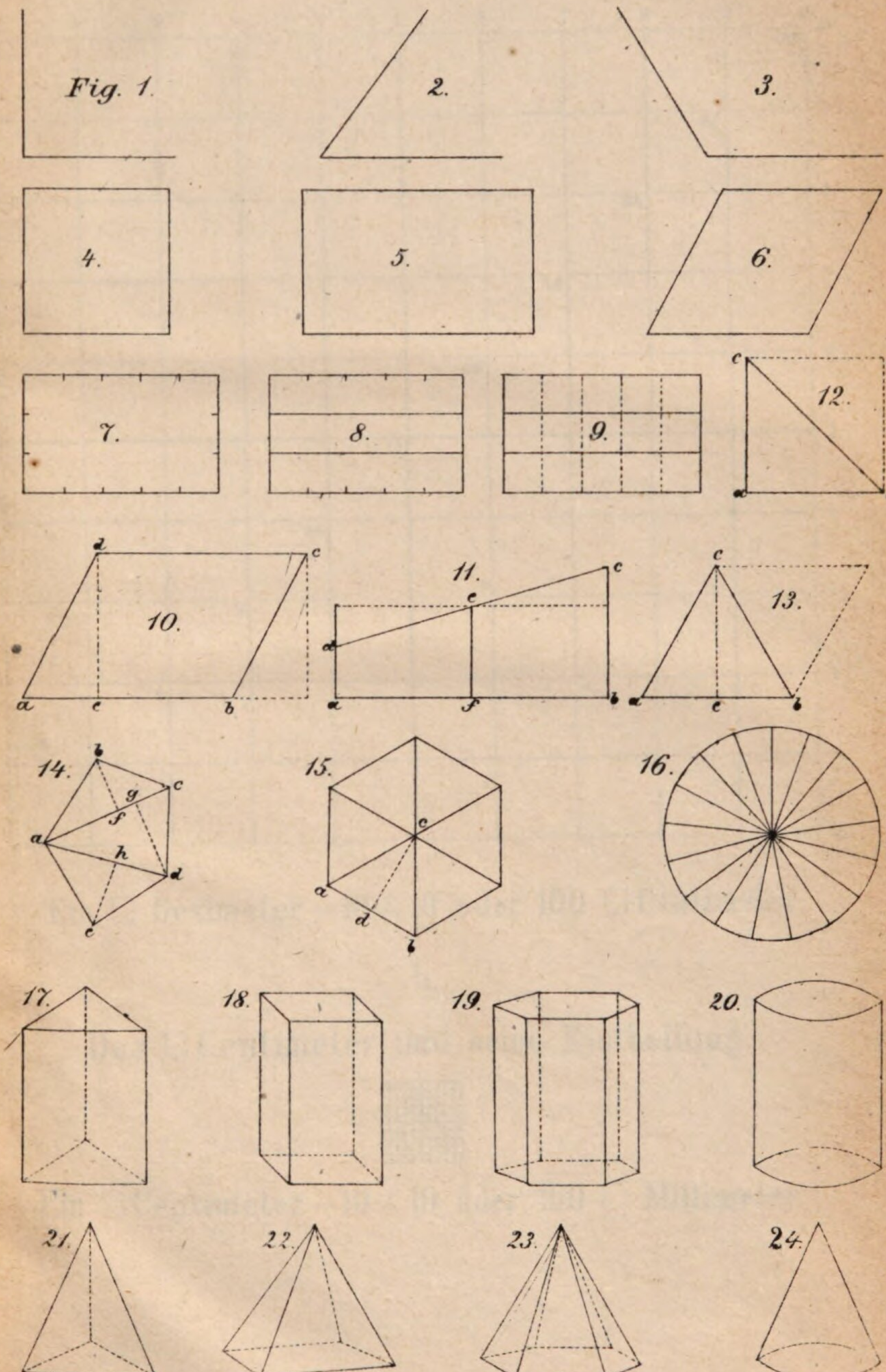
56) Zwei Fässer hielten zusammen 440 Liter Wein. Nachdem aus dem ersten der 5te und aus dem zweiten der 3te Theil abgezapft war, blieb in dem einen noch eben so viel wie in dem andern. Wie viel hält jedes Faß?

57) Die Jahreszahl der Gründung einer Stadt läßt sich aus folgenden Angaben bestimmen. Subtrahirt man die Hälfte der Jahreszahl von der Zahl 468, subtrahirt den Rest von 135 und dividirt mit diesem neuen Reste in 79, so erhält man $1\frac{35}{44}$ zum Quotienten. Wie heißt die Zahl?

58) Zwei Oeffnungen, aus denen fortwährend Wasser fließt, verhalten sich wie 5 : 13, die Geschwindigkeit der beiden Wasserströme aber wie 8 : 7. Wenn nun aus der einen Oeffnung in einer gewissen Zeit 612 c^{dm} Wasser mehr floß, als aus der andern, wie viel Wasser gab jede Oeffnung in dieser Zeit?

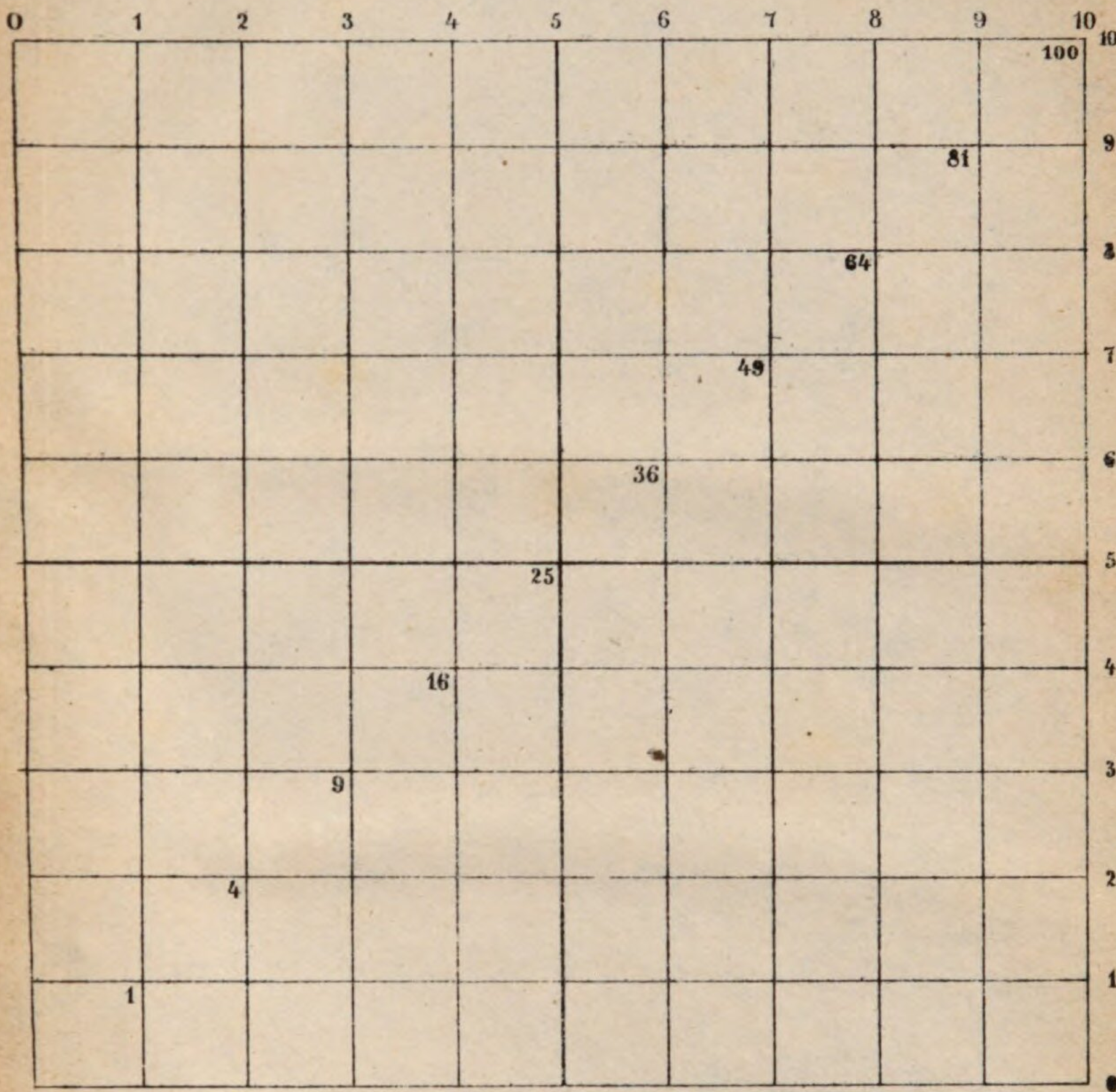
59) Ein Hund verfolgt einen Hasen. Ehe der Hund zu laufen anfängt, hat der Hase schon 50 Sprünge gemacht. Wenn nun der Hase in eben der Zeit 6 Sprünge macht, in welcher der Hund 5 Sprünge thut, und 9 Hasensprünge = 7 Hundesprüngen; wie viele Sprünge wird der Hase noch machen können, ehe der Hund ihn einholt?

60) Zwei Bombardiere A und B, werfen aus einer Batterie verschiedene Bomben. A hat schon 36 Würfe gemacht, ehe B zu werfen anfängt, und macht in eben der Zeit 8 Würfe, in der B 7 macht; hingegen braucht B zu 3 Würfen so viel Pulver, wie A zu 4. Wie viel Würfe wird B machen müssen, bis er so viel Pulver verbraucht hat als A?


Fig. 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
12.
10.
11.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.

a.

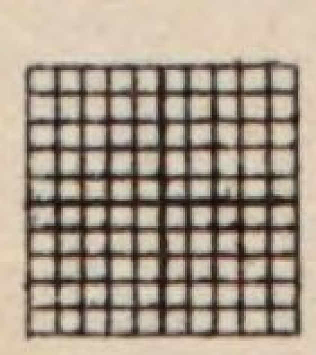
Das □ Dezimeter und seine Eintheilung:



Ein □ Dezimeter = 10 × 10 oder 100 □ Centimeter.

b.

Das □ Centimeter und seine Eintheilung:



Ein □ Centimeter = 10 × 10 oder 100 □ Millimeter

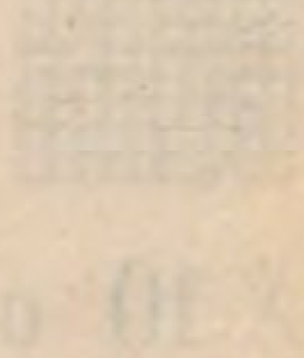
Das □Decimeter und seine Eintheilung.



Ein □Decimeter = 10 × 10 oder 100 □Centimeter

b.

Das □Centimeter und seine Eintheilung.



Ein □Centimeter = 10 × 10 oder 100 □Millimeter

Bei **Fr. Seybold** in **Ansbach** ist ferner erschienen und durch jede Buchhandlung zu beziehen:

Heuner, **Aufgaben zum Kopfrechnen**, drei Hefte à 6 kr.:

Erstes Heft: Elementarklasse, 10. Aufl.
Zweites Heft: Mittelklasse, 36. Aufl. } **Neue Ausgaben.**
Drittes Heft: Oberklasse, 34. Aufl.

Aufgaben zum Zifferrechnen, drei Hefte à 6 kr.:

Erstes Heft: Die Zahlen von 1—1000. 87. Aufl.

Zweites Heft: Die 4 Grundrechnungsarten mit unbenannten, ein- und mehrfach benannten, ganzen und gebrochenen Zahlen und mit den leichteren gemeinen Brüchen. 100. Aufl. **Jubel-Ausgabe.**

Drittes Heft: Die Decimalbrüche und gemeinen Brüche mit Anwendung; einfache und zusammengesetzte Regeldetri; Tausch-, Verwandlungs-, Procent-, Gewinn- und Verlust-, Zins-, Abzugs-, Theilungs-, Mischungs-, Flächen- und Körperberechnung; vermischte Aufgaben. 65. Aufl.

Ergebnisse zum 2. Zifferrechnen. Steif brosch. Preis 8
Ergebnisse zum 3. Zifferrechnen. Steif brosch. Preis 8

Heuner, **Fleischmann und Panzer**, **Sprachstoff für die Elementarklasse.** Bearbeitet nach den neuesten Schulverordnungen in Bayern. 6. Aufl. (Zum Besten des Lehrerwaisen-Stifts.) Preis 8 kr. in Parthieen à 7 kr.

Jüdt, **Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie und Trigonometrie mit ihren Resultaten.** Cart. Preis 18 kr.

Lutz, (Redakteur des Schul-Blattes aus Franken.) **Aufgaben zur Uebung im schriftlichen Gedanken-Ausdrucke.** 3 Hefte.

Erstes Heft: Die Mittelklasse. 10. Aufl. Preis 12 kr.
Zweites Heft: Die Oberklasse. 7. Aufl. Preis 12 kr.
Drittes Heft: Briefe und Geschäfts-Aufsätze für Fortbildungsschulen. 4. Aufl. Preis 15 kr.

Ulmer, Dr., **Der deutsche Satzbau.** Zum Unterrichte und zur Selbstbildung. 3. Aufl. Preis 20 kr.

☛ Heuner's ꝛc. Sprachstoff ꝛc., Jüdt's Aufgaben ꝛc., Lutz's drei Aufgabenhefte und Dr. Ulmer's Satzbau sind unter die Zahl der vom kgl. bayerischen Ministerium genehmigten Lehrmittel aufgenommen.

Bomhard, v., Valedictiones scholasticae. Preis 1 fl.
Krauß, XVIII **Vor- und Nachspiele für die Orgel.** Op. 31. Preis 27 kr.
Meyer, Dr., **Authentische Mittheilungen über Caspar Hauser.** Preis 2 fl.
Muck, (Pfarrer) **Geschichte der Münsterkirche zu Kloster Heilsbronn** Preis 1 fl. 20 kr.
Sixt, Ch. H. **Paul Eber.** Ein Stück Wittenberger Lebens aus den Jahren 1532 bis 1569. Preis 40 kr.
Zorn, (Stadtpfarrer und Kreisscholarch). **Weihnachts- und Neujahrs-Predigten.** Preis 36 kr.
—— **Der religiöse Memorirstoff in der Volksschule.** Preis 24 kr.

☛ **Sämmtliche von irgend einer Buchhandlung angekündigten Bücher, Musikalien, Zeitschriften ꝛc. können ohne Preiserhöhung durch Fr. Seybold in Ansbach bezogen werden.**

Ansbach. C. Brügel und Sohn.

Haeusler

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Heuner, Johann F.

Lehrgang des Rechenunterrichtes in Volks-Schulen Mit 2 Figurentaf

Ansbach 1875

Math.p. 219 li
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11318370-5